

Zbigniew Brzoska

**WYTRZYMAŁOŚĆ
MATERIAŁÓW**

Pw

Warszawa 1972

Państwowe Wydawnictwo Naukowe

Podręcznik dla wydziałów mechanicznych politechnik

Okładkę projektował *Jacek Zieliński*

Redaktor *Irena Gruba*

Redaktor techniczny *Romana Szybińska*

Korektor *Genowefa Koźma*

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1972

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE – WARSZAWA

Wydanie I. Nakład 5000+250 egz. Ark. wyd. 39,25. Ark. druk. 29,75.
Papier druk. sat. kl. V, 70 g, 70×100 cm.
Oddano do składania 22 II 1971 r. Podpisano do druku w czerwcu 1972 r.
Druk ukończono w lipcu 1972 r.
Zam. nr 1785/72 – K-1/198. Cena zł 68,–

Poznańskie Zakłady Graficzne im. M. Kasprzaka w Poznaniu

SPIS RZECZY

Wstęp	9
1. Wiadomości podstawowe	9
1.1. Zadania i metody wytrzymałości materiałów	9
1.2. Uproszczony model ciała	10
1.3. Siły zewnętrzne i wewnętrzne	13
1.4. Wysiłek przekroju pręta	15
1.5. Definicja naprężeń. Stan napięcia	19
1.6. Definicja przemieszczeń i względnych odkształceń	21
1.7. Prawo Hooke'a w przypadku rozciągania	22
1.8. Wykres rozciągania	26
1.9. Współczynnik bezpieczeństwa	28
1.10. Zasada superpozycji	30
 Część pierwsza	
ANALIZA PRĘTA STATYCZNIE WYZNACZALNEGO	33
2. Rozciąganie lub ściskanie	33
2.1. Model rozciąganego pręta a konstrukcje rzeczywiste	33
2.2. Przykłady analizy prętów wzdłużnie obciążonych	35
2.3. Pierścień kołowy równomiernie obciążony	41
2.4. Energia odkształcenia przy rozciąganiu	43
2.5. Stan napięcia i odkształcenia przy rozciąganiu	45
3. Skręcanie prętów	50
3.1. Stan czystego ścinania	50
3.2. Skręcanie prętów. Wykresy momentów skręcających	54
3.3. Skręcanie pryzmatycznego pręta o przekroju kołowym	57
3.4. Skręcanie prętów o przekrojach niekołowych	61
3.5. Skręcanie rur o dowolnym obrysie	65
3.6. Skręcanie cienkościennych profili otwartych	70
3.7. Przykłady zastosowania teorii	72
4. Momenty bezwładności płaskich przekrojów pręta	77
4.1. Moment bezwładności przekroju względem osi	77
4.2. Momenty bezwładności względem osi równoległych	81

4.3. Odśrodkowy moment bezwładności. Definicja głównych osi	84
4.4. Wyznaczenie centralnych osi głównych. Główne centralne momenty bezwładności	87
4.5. Biegunowy moment bezwładności przekroju	90
5. Zginanie proste	92
5.1. Uwagi wstępne	92
5.2. Analityczne określenie momentów gnących i sił tnących	94
5.3. Niektóre ułatwienia obliczeń	102
5.4. Wykreślna metoda wyznaczania momentów gnących	104
5.5. Naprężenia przy czystym zginaniu	108
5.6. Naprężenia przy zginaniu poprzecznym	113
5.7. Zastosowania teorii	120
5.8. Linia ugięcia belki	125
5.9. Wykreślna metoda wyznaczania linii ugięcia	132
6. Złożone zagadnienia zginania	138
6.1. Zginanie ukośne	138
6.2. Zginanie prętów krępych przy istnieniu sił wzdłużnych	146
6.3. Mimośrodowe ściskanie prętów smukłych	150
6.4. Naprężenia krytyczne i smukłość pręta	155
6.5. Wymiarowanie prętów ściskanych	159
6.6. Naprężenia przy zginaniu prętów płasko zakrzywionych	162
6.7. Optymalizacja kształtu belek	167
Część druga	
BEZPIECZEŃSTWO KONSTRUKCJI	173
7. Analiza stanu naprężenia i odkształcenia	173
7.1. Analiza płaskiego stanu naprężenia	174
7.2. Uproszczona analiza trójwymiarowego stanu naprężenia	179
7.3. Uproszczona analiza stanu odkształcenia	183
7.4. Uogólnione prawo Hooke'a	187
7.5. Uwagi końcowe	190
8. Hipotezy wytrzymałościowe. Wytrzymałość złożona pręta	193
8.1. Zjawiska towarzyszące trwałym odkształceniom	193
8.2. Hipotezy wytrzymałościowe: Hubera i τ_{max}	195
8.3. Naprężenia zredukowane	199
8.4. Zniszczenie materiału. Hipoteza Mohra	202
8.5. Wytrzymałość złożona pręta	205
8.6. Uwagi końcowe	211

Część trzecia

KONSTRUKCJE PRĘTOWE	212
9. Statycznie wyznaczalne konstrukcje prętowe	212
9.1. Ramy płaskie	212
9.2. Ramy obciążone przestrzennie	218
9.3. Wyznaczanie przemieszczeń w ustrojach płaskich	222
9.4. Wyznaczanie przemieszczeń (c.d.): uogólnienie wyników	232
9.5. Naprężenia i odkształcenia w sprężynach śrubowych	241
9.6. Zasady wzajemności	246
9.7. Energia odkształcenia ciała	249
9.8. Twierdzenie Castigliana	254
10. Statycznie niewyznaczalne ustroje prętowe	256
10.1. Zasady i metody rozwiązania	256
10.2. Równania kanoniczne metody sił	261
10.3. Przykłady belek statycznie niewyznaczalnych	265
10.4. Belki ciągłe. Równania trzech momentów	271
10.5. Statycznie niewyznaczalne ramy ściśle płaskie	276
10.6. Ramy przestrzenne i płaskie obciążone przestrzennie	288
10.7. Wyznaczanie przemieszczeń w ustrojach statycznie niewyznaczalnych	295
10.8. Naprężenia montażowe i cieplne	299
10.9. Uwagi końcowe	304
Część czwarta	
USTROJE DWUWYMIAROWE	307
11. Tarcze kołowe i grubościennie rury	307
11.1. Analiza tarczy kołowej o stałej grubości δ	308
11.2. Analiza naprężeń i odkształceń tarczy	310
11.3. Przybliżone rozwiązanie tarcz o zmiennej grubości	315
11.4. Grubościennie rury przy działaniu ciśnienia	321
12. Płyty i osiowosymetryczne powłoki	327
12.1. Osiowosymetryczne zgięcie płyty kołowej	328
12.2. Przykłady analizy płyt kołowych	336
12.3. Niektóre przypadki zginania płyt prostokątnych	344
12.4. Błonowy stan napięcia w osiowosymetrycznych powłokach	348
12.5. Osiowosymetryczne zginanie rury kołowej	354
13. Pręty cienkościennie	362
13.1. Schemat statyczny. Zginanie pręta o przekroju otwartym	362
13.2. Rury jednoobwodowe	368

13.3. Nieswobodne skręcanie profilu dwuteowego	374
13.4. Nieswobodne skręcanie innych profili otwartych	380
13.5. Uwagi ogólne o pracy prętów cienkościennych	383
Część piąta	
NIELINIOWE ZAGADNIENIA WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW	388
14. Praca ustrojów sprężysto-plastycznych 388	
14.1. Zasadnicze cechy pracy ustrojów sprężysto-plastycznych	388
14.2. Zginanie belki sprężysto-plastycznej	395
14.3. Sprężysto-plastyczne skręcanie wałka kołowego	403
15. Zagadnienia stateczności ustrojów 407	
15.1. Podstawowe pojęcia. Metody rozwiązania	407
15.2. Energetyczna metoda badania stateczności ustrojów	414
15.3. Wyboczenie pręta w zakresie sprężysto-plastycznym	419
15.4. Przegląd zagadnień stateczności ustrojów	422
15.5. Jednoczesne zginanie i ściskanie	427
Część szósta	
DZIAŁANIE OBCIĄŻEŃ ZMIENNYCH	431
16. Reakcja ustroju na obciążenia zmienne 431	
16.1. Drgania własne układu o jednym stopniu swobody	432
16.2. Okresowe obciążenia ustroju o jednym stopniu swobody	438
16.3. Działanie obciążeń nieokresowych	446
16.4. Przybliżona teoria zjawisk uderzenia	449
16.5. Uwagi końcowe	454
17. Zmęczenie materiałów 457	
17.1. Objawy i mechanizm zjawiska zmęczenia	457
17.2. Ilościowe ujęcie zjawisk zmęczenia	461
17.3. Wpływ spiętrzenia naprężeń na wytrzymałość zmęczeniową	468
17.4. Wpływ stanu powierzchni i wielkości elementu	473
17.5. Uwagi końcowe	476

Wstęp

1 WIADOMOŚCI PODSTAWOWE

1.1. Zadania i metody wytrzymałości materiałów

Jak uczy doświadczenie, pod działaniem sił wszystkie ciała stałe odkształcają się. Niekiedy siły te mogą spowodować takie nieodwracalne zmiany kształtu, że ciało (ustrój, element maszyny) traci wartość użytkową i, jak mówimy, ulega ono *zniszczeniu*. Doświadczenie poucza również, że zjawiska odkształcenia i zniszczenia zależą od: 1) rodzaju materiału (stal, szkło itp.) i jego stanu (rodzaj obróbki mechanicznej, cieplnej, chemicznej); 2) kształtu i wymiarów ciała (wał maszyny, zbiornik gazu itp.); 3) rodzaju i wartości sił (ciśnienie gazu, ciężar itp.) i ich przebiegu w czasie (stałe lub zmienne); 4) innych oddziaływań (temperatura, promieniowanie itp.).

Wytrzymałość materiałów jest nauką o trwałości spotykanych w praktyce typowych elementów konstrukcji pod działaniem sił. Głównym jej zadaniem jest określenie *wytrzymałości* elementu, czyli odporności na zniszczenie, i jego *podatności*, czyli wartości i rodzaju odkształceń. Stosowane w tej nauce metody umożliwiają dokonanie stosunkowo prostych obliczeń dających ilościową ocenę wytrzymałości i podatności w stosunku do postawionych wymagań. Wymagania te zależą od przeznaczenia elementu. Na ogół sprowadzają się one do gwarancji *dostatecznego bezpieczeństwa* i *dostatecznej sztywności*, tzn. do tego, że w warunkach pracy nie nastąpi uszkodzenie elementu i że odkształcenia nie przekroczą wartości uniemożliwiających prawidłowe jego funkcjonowanie. Rozróżnia się przy tym zagadnienia; *kontroli* i *kształtowania*. Pierwsze z nich polegają na sprawdzeniu spełnienia powyższych wymagań w istniejącej konstrukcji. Drugie występują przy projektowaniu konstrukcji i polegają na takim doborze parametrów, z reguły wymiarów elementu, aby te wymagania były zachowane.

Podstawą wytrzymałości materiałów są przesłanki doświadczone i teoretyczne. Pierwsze opisują własności materiałów, a w szczególności ich odkształcenie, w funkcji obciążeń przy różnych warunkach zewnętrznych. Drugie stanowią zastosowanie zasad mechaniki ogólnej, a przede wszystkim *praw statyki*, bez *znajomości której studiowanie wytrzymałości*

materiałów nie jest do pomysłenia. W odróżnieniu od mechaniki ogólnej, w wytrzymałości materiałów kładzie się główny nacisk na badanie odkształceń i prawie zupełnie pomija się zagadnienia ruchu ciała jako sztywnej całości.

Równoległe do wytrzymałości materiałów istnieją dyscypliny poświęcone podobnej problematyce jak: teoria sprężystości, teoria plastyczności, reologia. Szczególnie bliska wytrzymałości materiałów jest teoria sprężystości omawiająca w sposób bardziej ścisły te same w zasadzie zagadnienia, kosztem jednakże użycia złożonego aparatu matematycznego i żmudnych często rachunków. Te komplikacje ograniczają zastosowanie teorii sprężystości, pomimo że jej wyniki dają głębsze zrozumienie zjawisk. W odróżnieniu od tego, w nauce wytrzymałości materiałów kładziemy główny nacisk na stronę praktyczną i dla ułatwienia analizy godzimy się na stosowanie różnych metod przybliżonych bądź upraszczających założeń. Ich słuszność weryfikujemy porównując wyniki uproszczonej analizy z wynikami doświadczeń bądź z wynikami z teorii sprężystości. W ten sposób realizujemy to, co w wytrzymałości materiałów powinno być myślą przewodnią, a mianowicie, że środek ciężkości praktycznej analizy nie leży w stosowaniu złożonego aparatu matematycznego, lecz w analizie strony fizycznej zagadnienia, znalezieniu prawidłowych uproszczeń i doprowadzeniu do prostych ilościowych zależności.

1.2. Uproszczony model ciała

Podstawowe uproszczenia, o których mówiono poprzednio, dotyczą: 1) samego materiału, 2) opisu kształtu ciała. Wprowadzenie tych uproszczeń przekształca rzeczywisty obiekt w to, co nazywamy *schematem obliczeniowym*, w którym zachowane zostają tylko istotne dla danego zagadnienia cechy obiektu.

Uproszczenia w opisie materiału są konieczne z racji trudności, jakie nasuwa rzeczywista budowa materii. Materiał każdego ciała składa się z atomów, między którymi działają siły. Obciążając ciało powodujemy stopniową zmianę odległości między atomami. Towarzyszy temu zmiana sił wzajemnego ich przyciągania aż do chwili osiągnięcia równowagi między obciążeniem a zmienionymi siłami międzyatomowymi. W swej więc istocie zjawiska wytrzymałościowe są molekularne i w takim ujęciu są omawiane w fizyce ciała stałego. W zagadnieniach inżynierskich takie ujęcie nie jest możliwe. Obiekty stosowane w technice zawierają $10^{20} \div 10^{30}$ atomów, a ich ustawienie wykazuje bardzo liczne odstępstwa od regularności. Jakakolwiek próba ilościowego ujęcia oddziaływań między poszczególnymi atomami jest skazana na niepowodzenie. Z tego powodu pojęciami cząstkowej budowy materiału będziemy się posługiwać dla zrozumienia zjawisk tylko od strony jakościowej.

W wytrzymałości materiałów odstępujemy nie tylko od atomu jako obiektu ilościowych badań, lecz zaniedbujemy także właściwości ich mikrostruktury. Jak wiadomo, poza materiałami bezpostaciowymi (szkło, plastyki), w których ustawienie atomów uważamy za chaotyczne, istnieją materiały polikrystaliczne, na przykład metale, w których mikrokryształy (ziarna) mają względnie regularną budowę atomową. Właściwości fizyczne pojedynczego ziarna, którego wymiary w metalach są rzędu 0,01 mm, są różne w różnych

kierunkach. Jeśli jednak elementarny obiekt jest kostką o wymiarach kilkunastokrotnie większych od wymiarów ziarna, to wspomniana różnokierunkowość gubi się, gdyż ustawienie ziaren w tej kostce jest chaotyczne. Właściwości takiej elementarnej kostki są uśrednione i są takie same w różnych miejscach ciała. Idealizując to zakładamy, że materiał ciała jest *jednorodny* i że każda, nawet nieskończenie mała, kostka ma takie same właściwości fizyczne.

Z pojęcia jednorodności wynika, że w uproszczonym modelu materia wypełnia objętość ciała w sposób ciągły. Przy opisie takiego ciała można stosować pojęcia i cały aparat analizy matematycznej, jak różniczkowanie i całkowanie.

Aby takie jednorodne ciało opisywało prawidłowo zjawiska, jego właściwości muszą być takie same jak uśrednione właściwości ciała rzeczywistego. Jedną z nich jest ta, że wywołane obciążeniem odkształcenia znikają całkowicie lub częściowo po odciążeniu. Tę właściwość ciała nazywamy *sprężystością*. Jeśli ten powrót do pierwotnego kształtu jest całkowity, to ciało nazywamy *idealnie sprężystym*, jeśli jest niecałkowity, to ciało nazywamy *częściowo sprężystym*. Odkształcenia znikające po odciążeniu nazywamy *sprężystymi*, podczas gdy pozostające po odciążeniu noszą nazwę odkształceń *trwałych* lub *plastycznych*. Przeciwnościem ciała idealnie sprężystego jest ciało *idealnie plastyczne*, nie mające odkształceń sprężystych. Rzeczywiste ciała nigdy nie są ani idealnie sprężyste, ani idealnie plastyczne, aczkolwiek odstępstwa od jednego lub drugiego ideału mogą być znikome. Okazuje się z doświadczeń, że w pewnych przedziałach obciążenia zależnych od rodzaju, stanu i temperatury materiału takie materiały, jak stale i większość stopów metali, szkło, drewno, beton, można traktować jako idealnie sprężyste. Z uwagi na techniczne znaczenie *większość zagadnień wytrzymałości materiałów rozpatruje się przy założeniu idealnej sprężystości materiału*.

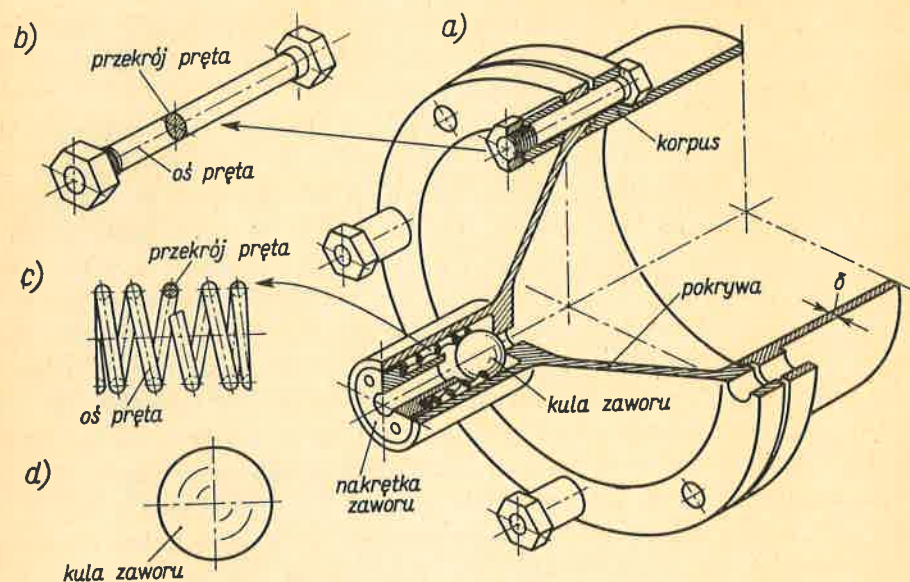
Przy obciążaniu ciała i narastającym odkształceniu obciążenia te wykonują pewną pracę zużytą na zmianę odległości między atomami i związaną z tym zmianę energii potencjalnej cząstek. Ta tak zwana *energia odkształcenia* jest zwracana w procesie odciążania. Codziennym przykładem tego procesu jest sprężyna zegarka, która przy odkształceniu („nakręcanie zegarka”) akumuluje w sobie energię oddawaną następnie na pokonanie oporów ruchu, gdy sprężyna wraca do pierwotnego kształtu. W takim energetycznym ujęciu ciałem idealnie sprężystym jest to, w którym praca zwrócona w procesie odciążania jest równa pracy włożonej przy obciążaniu ciała. Jeśli praca zwrócona jest mniejsza niż włożona, to ciało jest częściowo sprężyste. Różnica między tymi wielkościami zużyta zostaje na nieodwracalne zmiany w materiale, tj. trwałe jego odkształcenie.

Opierając się na wynikach doświadczeń, przyjmujemy dla większości materiałów (metale, plastyki itp.), że właściwości elementarnej kostki nie zależą od jej orientacji, tj. kąтового ustawienia w ciele. Takie materiały nazywamy *izotropowymi* (równokierunkowymi). Istnieją jednak i materiały *anizotropowe* (różnokierunkowe), jak na przykład drewno, gdzie uśrednione⁽¹⁾ właściwości elementarnej kostki są bardzo różne w zależności od jej orientacji w stosunku do kierunku słoików. Anizotropowe są i inne materiały, jak papier, tkaniny lub modne obecnie plastyki zbrojone włóknem szklanym, których anizo-

⁽¹⁾ To znaczy bez wnikania w komórkową budowę drewna.

tropia wynika z procesu technologicznego (papier) bądź, jak w tkaninach, z samej ich budowy. W większości zagadnień będziemy zajmować się materiałami izotropowymi.

Równoległe do uproszczeń dotyczących materiału wprowadzamy uproszczone modele geometryczne spotykanych w praktyce elementów. Rozpatrzmy to na przykładzie zbiornika ciśnieniowego (rys. 1.1a), w którym cienkościenny walcowy korpus zamknięty jest pokrywą



Rys. 1.1. Podział konstrukcji na typowe elementy

z kulowym zaworem bezpieczeństwa. Jak widać, elementy tej konstrukcji dają się podzielić na trzy grupy. Pierwsza z nich, tzw. *pręty*, obejmuje elementy takie jak śruby, sprężynę (rys. 1.1b, c), w których jeden wymiar, tj. długość, jest duży w porównaniu do dwóch pozostałych. Grupa druga, tzw. *powłoki*, reprezentowana przez korpus i pokrywę, to elementy, w których jeden wymiar, tj. grubość δ , jest mały w porównaniu z dwoma pozostałymi. Wreszcie do grupy trzeciej, tzw. *brył*, zaliczamy takie elementy, jak kulę zaworu, nakrętkę śruby, w których wszystkie wymiary są tego samego rzędu. W wytrzymałości materiałów zajmujemy się głównie prętami.

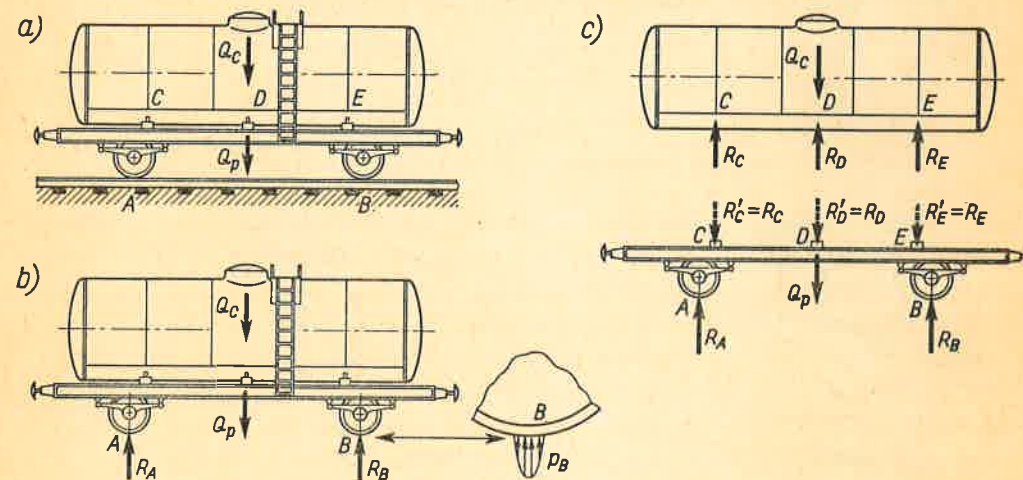
Powstanie pręta można przedstawić jako wynik ruchu środka ciężkości płaskiej figury wzdłuż pewnej linii w taki sposób, że figura ta w każdym punkcie jest prostopadła do tej linii. Tak zdefiniowaną linię nazywamy *osią pręta*, a płaską figurę *poprzecznym przekrojem pręta*. W zależności od kształtu osi może być pręt *prosty* (rys. 1.1b) lub *zakrzywiony*. Przykładem płasko zakrzywionego pręta jest pierścień tłokowy, przykładem przestrzennie zakrzywionego — sprężyna (rys. 1.1c). Sam przekrój pręta może być stały lub zmienny i przy ruchu wzdłuż osi może wykazywać obrót. W tym ostatnim przypadku mówimy, że pręt jest *naturalnie skręcony*. Technicznym przykładem takiego pręta jest wiertło spiralne.

Wprowadzona systematyka umożliwia analizę wytrzymałościową realnych obiektów według ograniczonej liczby schematów niezależnie od przeznaczenia danego elementu.

Takim jednolitym schematem można na przykład objąć wały maszyn przenoszące ruch obrotowy z jednego agregatu na drugi, niezależnie od tego, czy konkretne zadanie dotyczy wału napędzającego śrubę okrętową, czy też wrzeciona obrabiarki. Daje to ogromne uproszczenie rozważań.

1.3. Siły zewnętrzne i wewnętrzne

Miarą mechanicznego oddziaływania ciał na siebie są siły. Rozpatrując dane ciało izolowane od innych, pierwotnie z nim połączonych, zastępujemy ich działanie na to ciało siłami, które nazywamy *zewnętrznymi*. Siły zewnętrzne dzielimy na *objętościowe* i *powierzchniowe*. Pierwsze z nich działają na każdą cząstkę ciała, drugie przyłożone są tylko na jego powierzchni. Przykładem sił objętościowych są siły własnego ciężaru ciała, przykładem drugich jest ciśnienie cieczy otaczającej ciało lub ciśnienie w obszarach styku ciała badanego z innymi. Siłami zewnętrznymi dla danego ciała są nie tylko siły o znanej wartości, tzw. *siły czynne*, lecz i reakcje więzów, tzw. *siły bierne*, uzupełniające układ sił czynnych do układu będącego w równowadze. Biorąc dla przykładu wagon-cystrnę (rys. 1.2a, b) mamy tu siły czynne: ciężar zbiornika z cieczą Q_c i ciężar podwozia Q_p . Siłami biernymi są ciśnienia na powierzchniach styku kół A i B z szyną. Jak widać, wymiary powierzchni styku są bardzo małe w porównaniu z wymiarami wagonu. Gdy obiekt



Rys. 1.2. Określenie obciążenia konstrukcji

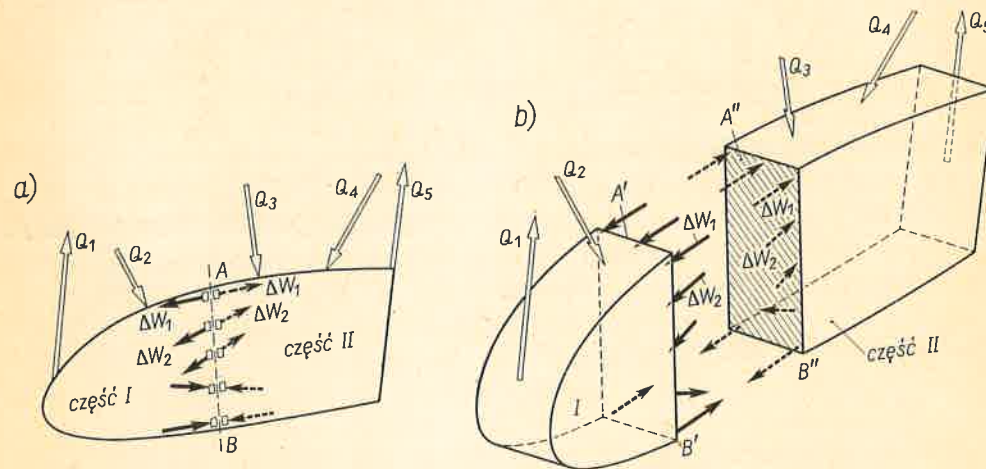
tem badanym jest cały wagon, wówczas ciśnienia te, jak p_B , można zastąpić⁽¹⁾ ich wypadkowymi *skupionymi siłami* R_A i R_B , które wyznaczamy z warunków równowagi. Cały zespół sił czynnych (Q_c i Q_p) oraz biernych (R_A i R_B) nazywamy *obciążeniem* obiektu.

⁽¹⁾ Taka idealizacja jest niedopuszczalna, gdy przedmiotem badania są zjawiska w samym polu styku i jego bezpośrednim otoczeniu, gdyż wtedy wymiary pola styku są rzędu wymiarów badanej części.

Postać obciążenia, tzn. liczba sił zewnętrznych, ich wartości i charakter, zależy przede wszystkim od tego, gdzie przebiega umowna granica między badanym obiektem a otoczeniem. Gdyby badanym obiektem był tylko zbiornik cysterny (rys. 1.2c), wówczas obciążenie stanowiłyby tylko jedna siła czynna Q_c i reakcje R_C, R_D, R_E podpór C, D, E zbiornika na podwoziu. W odróżnieniu od poprzedniego przypadku, reakcji R_C, R_D, R_E nie można obliczyć z będących do dyspozycji dwóch równań równowagi. Rozwiązanie takich zagadnień, tzw. statycznie niewyznaczalnych, wymaga zbadania odkształceń ustroju i jest omówione w rozdz. 10.

W odróżnieniu od sił zewnętrznych pochodzących od ciał nie należących do umownie określonego obiektu, wszystkie inne oddziaływania między częściami należącymi do danego obiektu nazywamy siłami wewnętrznymi. Mogą to być oddziaływania między poszczególnymi elementami obiektu, a biorąc ogólnie — między wszystkimi cząstkami ciała. Zgodnie z trzecim prawem Newtona (zasada działania i przeciwdziałania) siły te są zawsze parami przeciwne, tzn. że działają wzdłuż tej samej prostej, mają równe wartości bezwzględne, lecz przeciwne zwroty. Z tego powodu ich istnienia nie można wykryć z badania równowagi ciała jako jednej całości. Widać to z rys. 1.2c, gdy zbiornik i podwozie złączymy z powrotem, wtedy bowiem siły R_C, R_C', \dots stają się siłami wewnętrznymi dla całości, a ich działanie odpowiednio się kasuje.

Dla ujawnienia reakcji R_C, R_D i R_E konieczne było izolowanie zbiornika od podwozia przez myślowe przecięcie więzów (podpór). Tę samą metodę przecięć stosujemy dla ujawnienia wewnętrznych sił ΔW , wywołanych w danym ciele obciążeniem Q_1, \dots, Q_5 (rys. 1.3a).



Rys. 1.3. Ujawnienie sił wewnętrznych

Siły ΔW (ciągłe strzałki) działania cząstek części II na odpowiadające im cząstki części I; siły ΔW (przerwane strzałki) działania cząstek części I na cząstki części II.

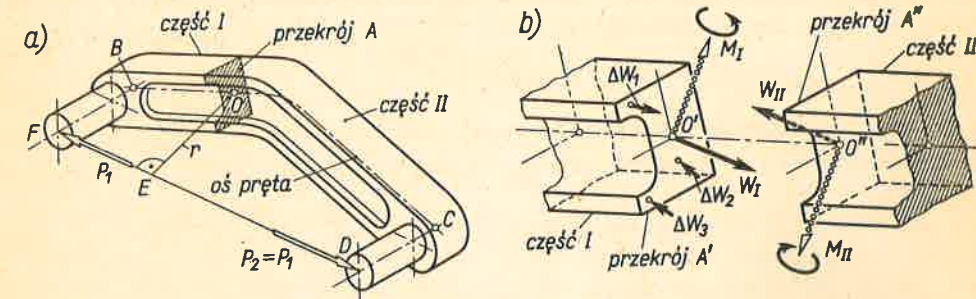
W tym celu ciało to rozcinamy myślowo przekrojem AB na dwie oddzielne części I i II przykładając w nowo powstałych przekrojach $A'B'$ i $A''B''$ takie układy sił $\Delta W_1, \Delta W_2, \dots$, jakie istniały przed przecięciem (rys. 1.3b). Dzięki temu mamy obecnie dwa odrębne ciała I i II, z których każde oddzielnie jest w równowadze, albowiem obraz sił nie zmienił się,

z tym że układy sił ΔW są teraz odpowiednio dla części I i II siłami zewnętrznymi. Z uwagi na charakter sił ΔW jest rzeczą jasną, że znając układ sił ΔW dla części I znamy tym samym układ sił ΔW dla części II. Układy te, przy założonej jednorodności materiału, klasyfikujemy jako siły powierzchniowe rozłożone w sposób ciągły w przekrojach $A'B'$ i $A''B''$.

Opisaną metodą przecięć będziemy posługiwać się w całej nauce wytrzymałości materiałów.

1.4. Wysiłek przekroju pręta

Metodę przecięć zastosujemy obecnie do konstrukcji prętowej (rys. 1.4a), której myślowe rozcięcie, z reguły prostopadłe do osi pręta, uzewnętrznia w nowo powstałych przekrojach A' i A'' układ sił $\Delta W_1, \Delta W_2, \dots$ (rys. 1.4b). Wartości tych sił w poszczególnych punktach przekroju A' części I nie są znane. Jakie by jednak one nie były, można je zre-



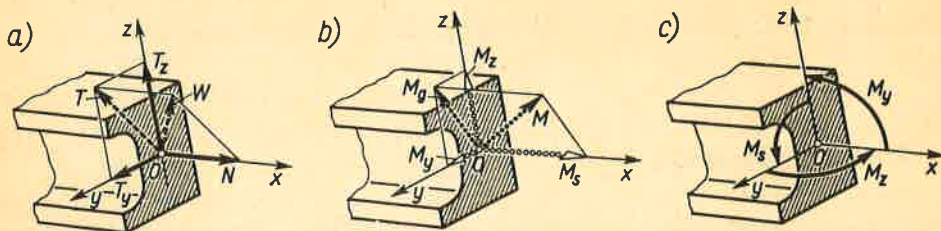
Rys. 1.4. Wysiłek przekroju konstrukcji prętowej

dukować do środka ciężkości O' tego przekroju. W wyniku otrzymamy, ogólnie biorąc, wypadkową siłę W_I i wypadkowy moment M_I . Ten zespół W_I i M_I nazwiemy **wysiłkiem przekroju A'** , a samą siłę W_I i moment M_I **elementami wysiłku** tegoż przekroju. Podobnie W_{II} i M_{II} związane z punktem O'' są elementami wysiłku przekroju A'' części II. Z własności sił ΔW wynika, że elementy W_{II} i M_{II} są odpowiednio przeciwne do elementów W_I i M_I .

Elementy wysiłku W_I i M_I , jako wypadkowe układu sił ΔW , zapewniają równowagę części I, jako odrębnego ciała. Aby tak było, siły W_I i P_1 muszą tworzyć parę sił, a moment M_I musi być przeciwny do momentu siły P_1 względem punktu O' , jego wektor zatem jest prostopadły do płaszczyzny OEF , ma wartość $P_1 r$, a zwrot jak na rys. 1.4b. Na ogół wyznaczenie wysiłku przekroju⁽¹⁾ nie jest tak proste i wymaga sformułowania

⁽¹⁾ Wprowadzone określenie „wysiłek przekroju” oddaje wiernie aktywną rolę przekroju w zapewnieniu równowagi badanej części ciała. Oddaje ono również to, że wynik redukcji sił ΔW jest zespołem wypadkowej siły W i wypadkowego momentu M . Pojęcie „wysiłek przekroju” ma swój odpowiednik w innych językach (ros. — *силовой фактор*, franc. — *effort*) i jest bardziej zwarte, niż używane dotychczas w naszej literaturze określenia „wypadkowa sił wewnętrznych w przekroju” lub „główny wektor sił wewnętrznych w przekroju i moment główny sił wewnętrznych w przekroju”.

równań równowagi. W takim przypadku wysiłek przekroju przedstawiamy nie przez wypadkową siłę W i wypadkowy moment M , lecz przez ich składowe w prostokątnym układzie x, y, z . Początek układu pokrywa się ze środkiem ciężkości badanego przekroju, oś x jest styczna do osi pręta, a osie y i z są do niej prostopadłe i leżą w płaszczyźnie prze-

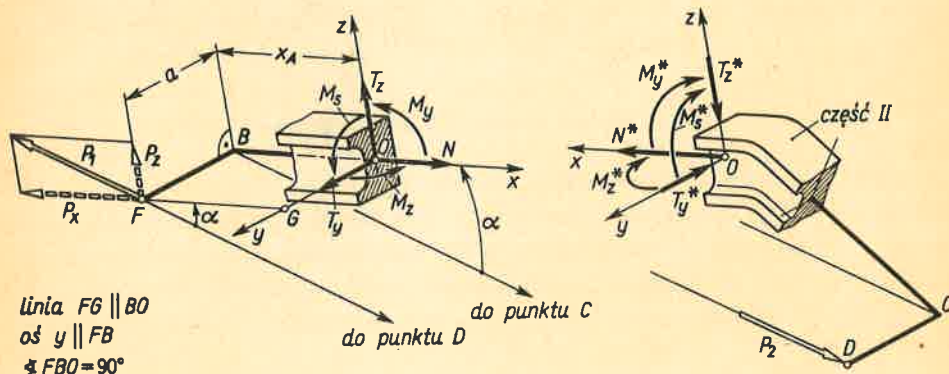


Rys. 1.5. Przedstawienie wysiłku przekroju przez składowe

kroju (rys. 1.5a). Składowe siły W na te osie są odpowiednio N, T_y, T_z . Składową N działającą wzdłuż osi pręta nazywamy siłą wzdłużną lub normalną, składowe T_y i T_z siłami tnącymi lub poprzecznymi. Niekiedy łączymy siły T_y i T_z w jedną wypadkową siłę tnącą T :

$$T = \sqrt{T_y^2 + T_z^2} \quad (a)$$

Rozkładając podobnie wektor momentu M na osie x, y, z mamy składowe momenty M_x, M_y, M_z (rys. 1.5b), z których pierwszy o wektorze pokrywającym się z osią pręta



Rys. 1.6. Określenie składowych wysiłku przekroju z równań równowagi

Ustrój z rys. 1.4 narysowano schematycznie zostawiając jedynie fragmenty w otoczeniu myślowego przekroju A .

nazywamy momentem skręcającym, pozostałe, tj. M_y i M_z , o wektorach prostopadłych do osi x nazywamy momentami gnącymi.⁽¹⁾ Niekiedy łączymy momenty M_y i M_z w jeden wypadkowy moment gnący M_g

$$M_g = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \quad (b)$$

⁽¹⁾ Często składowe momenty przedstawiamy zakrzywionymi strzałkami w płaszczyznach ich działania (rys. 1.5c). I tak moment M , działa w płaszczyźnie xz , jego więc obrazem jest zakrzywiona strzałka w tej płaszczyźnie.

Dla wyznaczenia sześciu składowych wysiłku, tj. $N, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z$, badanego przekroju formułujemy sześć równań równowagi badanej części konstrukcji (rys. 1.6), a mianowicie trzy równania równowagi sumy rzutów:

$$N + \sum P_x = 0, \quad T_y + \sum P_y = 0, \quad T_z + \sum P_z = 0, \quad (1.1)$$

oraz trzy równania równowagi momentów względem osi x, y, z :

$$M_x + \sum M_{xP} = 0, \quad M_y + \sum M_{yP} = 0, \quad M_z + \sum M_{zP} = 0, \quad (1.2)$$

gdzie P_x, P_y, P_z oznaczają odpowiednio składowe siły zewnętrznych na osie x, y, z , M_{xP}, M_{yP}, M_{zP} ich momenty względem odpowiednich osi, a sumowanie obejmuje wszystkie siły zewnętrzne (czynne i bierne) działające na część badaną. W konkretnym przypadku jedyną siłą zewnętrzną dla części I jest siła P_1 , której składowe na osie x, y, z są: $P_x = -P_1 \cos \alpha, P_y = 0, P_z = P_1 \sin \alpha$. Równania (1.1) i (1.2) przyjmują postać

$$N - P_1 \cos \alpha = 0, \quad T_y + 0 = 0, \quad T_z + P_1 \sin \alpha = 0, \quad (c)$$

$$M_x - P_z a = 0, \quad M_y - P_z x_A = 0, \quad M_z - P_x a = 0, \quad (d)$$

skąd mamy składowe wysiłku przekroju A' części I

$$\left. \begin{aligned} N &= P_1 \cos \alpha, & T_y &= 0, & T_z &= -P_1 \sin \alpha, \\ M_x &= P_1 a \sin \alpha, & M_y &= P_1 x_A \sin \alpha, & M_z &= P_1 a \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Ujemna wartość jakiejś składowej, np. T_z , oznacza, że w rzeczywistości ma ona zwrot przeciwny do założonego. Analogicznie możemy napisać równania (1.1) i (1.2) dla składowych N, T_y, \dots, M_z wysiłku przekroju A'' części II . Potrzeba jednak taka nie istnieje, gdyż wiemy, że te składowe są przeciwne względem podanych wzorami (e). Wynika stąd, że wysiłek przekroju można wyznaczać z warunków równowagi jednej lub drugiej części myślowo rozciętej konstrukcji. Wniosek ten wykorzystujemy w obliczeniach pisząc równania (1.1) i (1.2) dla tej części, dla której mają one prostszą postać.

Przy formułowaniu równań (1.1) i (1.2) należałoby uwzględnić, że konstrukcja poddana obciążeniu jest odkształcona. Wpływałoby to na ustawienie sił zewnętrznych, położenie myślowego przekroju A i w wyniku odbiłoby się na wartościach P_x, \dots, M_{zP} . W praktyce jednak okazuje się, że odkształcenia ciał są na ogół bardzo małe w porównaniu do pierwotnych wymiarów i z małym błędem (rzędu promille) możemy równania równowagi (1.1) i (1.2) formułować tak, jak gdyby obciążone ciało miało postać pierwotną. Powyższa reguła wymiarów początkowych stanowi zasadnicze założenie w większości zagadnień. Reguły tej nie stosuje się w zagadnieniach stateczności (rozdz. 15) oraz w bardzo rzadkich przypadkach, gdy nawet małe odkształcenia zmieniają w istotny sposób pracę ustroju.

Istotna różnica między badaniem wysiłku przekroju w nauce wytrzymałości materiałów a badaniem równowagi ciała w statyce tkwi nie w metodzie, lecz w ilości. Badanie równowagi pewnego ciała (rys. 1.4a) na gruncie statyki polega na ogół na jednokrotnym wykonaniu tej czynności. W wytrzymałości materiałów chcemy znać dla tego samego ciała wysiłek nie jednego przekroju A , lecz szeregu przekrojów. Za każdym przy tym kolejnym rozcięciu mamy inny obiekt. Widać to z rys. 1.6, gdy zmieniamy odległość x_A , i z wzorów (e), gdzie M_y jest funkcją tej odległości. Ta odmienność podejścia jest koniecz-

na, gdyż od wysiłku przekroju zależą siły ΔW w punktach przekroju, a od nich z kolei zależy bezpieczeństwo.

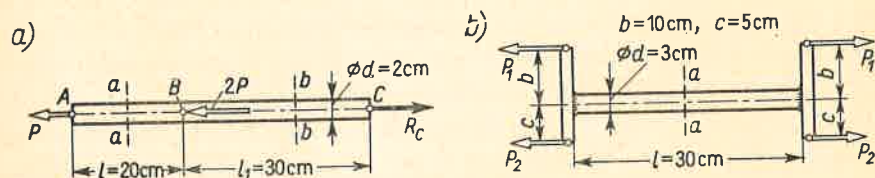
Przedstawienie wysiłku przekroju przez składowe N , T , M_s i M_θ (rys. 1.5) umożliwia klasyfikację tzw. *prostych przypadków pracy pręta*. Jeśli w badanym przekroju istnieje tylko siła normalna N , to mówimy, że w tym przekroju pręt pracuje na *rozciąganie* lub *ściskanie*, zależnie od tego, czy siła N działa na zewnątrz, czy do wewnątrz badanej części pręta. Jeśli w przekroju działa tylko M_s , to mówimy, że w tym przekroju pręt pracuje na *skręcanie*. Wreszcie, gdy działa tylko moment M_θ (wzór b), wówczas taki przypadek nazywamy *czystym zginaniem*. Te proste przypadki cechują się tym, że mogą one obejmować nie jeden przekrój, lecz wszystkie przekroje na odcinku pręta o *skończonej* długości. W odróżnieniu od tego, działaniu siły T towarzyszy zawsze pojawienie się momentu M_θ w sąsiednich przekrojach. Z tego powodu działanie siły tnącej T traktujemy łącznie z istnieniem odpowiedniego M_θ jako tzw. *zginanie poprzeczne*. Ten ostatni przypadek jest prostym przykładem tzw. *wytrzymałości złożonej*, do której zalicza się również przypadki jak na rys. 1.6.

Zadania

1. Na wałek (rys. 1.7a) działają wzdłuż osi wałka siły $P = 10 \text{ kN}$, $2P = 20 \text{ kN}$ i równoważąca je reakcja R_c . Wyznaczyć wysiłek przekrojów $a-a$ i $b-b$.

Odp. $N_a = 10 \text{ kN}$, $N_b = 30 \text{ kN}$. Pozostałe składowe wysiłku równe zeru.

2. Wałek z dwiema poprzeczkami (rys. 1.7b) obciążono równoważącymi się grupami sił $P_1 = P_2 = 5 \text{ kN}$. Znaleźć wysiłek przekroju $a-a$ dla części wałka na lewo od tego przekroju.



Rys. 1.7.

Odp. Siła $N_a = 10 \text{ kN}$ (rozciągająca); moment $M_\theta = 250 \text{ Nm}$, zwrot przeciwny niż na rys. 1.5c. Pozostałe składowe wysiłku równe zeru.

3. Powtórzyć zadanie 2, gdy siła P_2 zmieni zwrot na przeciwny.

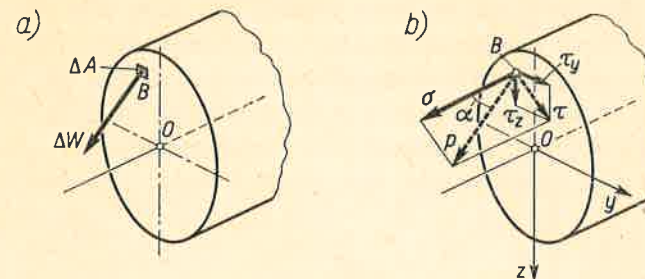
Odp. Wysiłek przekroju ma tylko składową $M_\theta = -750 \text{ Nm}$.

4. W nauce statyki korzystamy często z twierdzenia, że „każdą siłę działającą na ciało sztywne można dowolnie przesunąć wzdłuż jej linii działania”. Czy to twierdzenie jest słuszne dla zagadnień wytrzymałości materiałów? Rozumowanie przeprowadzić na przykładzie (rys. 1.7a), raz – gdy siły P i $2P$ działają tak, jak to podano, drugi raz, gdy przy nie zmienionych P i R_c siła $2P$ jest przesunięta do punktu A .

Odp. Twierdzenie nie jest słuszne, albowiem przez zmianę punktu zaczepienia zmienia się wysiłek przekrojów. W konkretnym przykładzie wysiłek przekroju $a-a$ jest raz $N_a = P$, drugi raz $N_a = 3P$ i warunki pracy pręta na odcinku AB są inne niż poprzednio. Wynika stąd, że w zagadnieniach wytrzymałości materiałów nie wolno zmieniać punktów zaczepienia sił. Nieznajomość tego wniosku powoduje częste błędy u studentów.

1.5. Definicja naprężeń. Stan napięcia

Jak już powiedziano, wewnętrzne siły ΔW (rys. 1.3) rozłożone są w sposób ciągły na polu myślowego przekroju. Wielkość siły ΔW zależy więc od wielkości tego pola. Aby otrzymać właściwą miarę sił wewnętrznych na polu przekroju, wprowadzamy pojęcie



Rys. 1.8. Określenie naprężenia wypadkowego p i składowych σ i τ

natężenia tych sił, tzw. *naprężenie*. Jeśli w myślowym przekroju ciała (rys. 1.8a) na elementarne pole ΔA działa siła ΔW , to *średnim wypadkowym naprężeniem* p_{sr} nazwiemy wektor współkierunkowy z ΔW o wartości

$$p_{sr} = \Delta W / \Delta A. \quad (a)$$

Zmniejszając wymiary (szerokość i wysokość) pola ΔA mamy w granicy *wypadkowe naprężenie* p w punkcie B o wartości

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta A} \quad (1.3)$$

o kierunku i zwrocie takim jak elementarna siła ΔW . Podstawową jednostką naprężenia w przyjętym od 1966 r. w Polsce układzie jednostek SI (metr, kilogram masy, sekunda) jest *paskal* (Pa):

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2. \quad (b)$$

Dla praktycznych zastosowań jednostka ta jest zbyt drobna i dlatego posługujemy się wielokrotnością milion razy większą, tj. *megapaskalem* (MPa):

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2. \quad (c)$$

W używanym jeszcze przejściowo technicznym układzie jednostką naprężenia jest kilogram siły na kwadratowy centymetr. Jest ona związana z nowymi jednostkami zależnością

$$1 \text{ kg/cm}^2 = 0,0981 \text{ MPa} \approx 0,1 \text{ MPa}. \quad (d)$$

Pojęcie wypadkowego naprężenia stosujemy bardzo rzadko. Zazwyczaj posługujemy się jego składowymi (rys. 1.8b), z których składowa σ , prostopadła do przekroju,

$$\sigma = p \cos \alpha, \quad (1.4a)$$

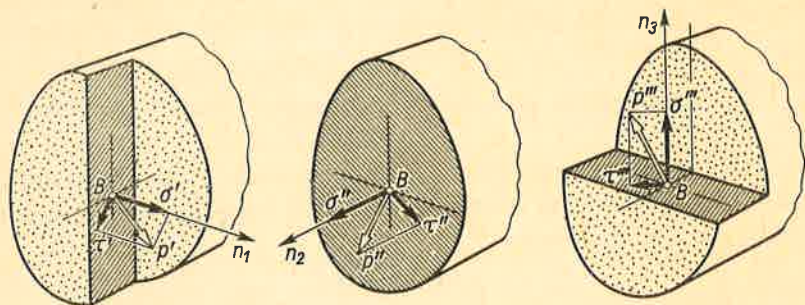
nosi nazwę *naprężenia normalnego*, podczas gdy druga składowa τ działająca w płasz-

czyżnie przekroju,

$$\tau = p \sin \alpha, \quad (1.4b)$$

nazywa się *naprężeniem stycznym*. To ostatnie rozkładamy z kolei na dwa składowe naprężenia styczne: τ_y i τ_z zorientowane w kierunkach osi y i z obranych na przekroju.

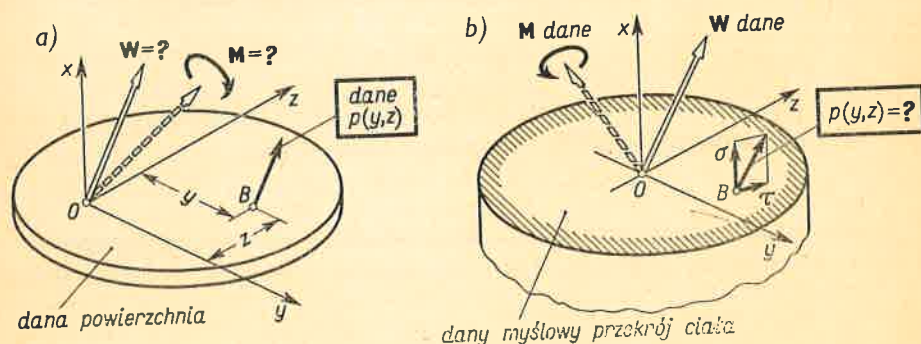
Należy zaznaczyć, że **definiowanie naprężenia jako wektora w danym punkcie ciała jest dopuszczalne tylko wtedy, gdy myślowy przekrój traktujemy jako stały**, to znaczy nie dopuszczamy innego poprowadzenia przecięcia przez ten punkt. Jeśli to ograniczenie usunąć (rys. 1.9), to otrzymamy różne wypadkowe naprężenia p', p'', p''' i różne ich składowe σ', \dots, τ''' . Jest to oczywiste, gdyż różnym przekrojom towarzyszy przecinanie (myślowe) różnych więzów łączących punkt B z otoczeniem, przy czym siły w tych więzach mogą być bardzo różne. Ponieważ przez dany punkt B można poprowadzić nieskończenie



Rys. 1.9. Odmienność naprężeń zależnie od sposobu przecięcia

wiele różnych przekrojów, zatem w wyniku mamy całą mnogość różnych wektorów p tworzących tzw. *stan naprężenia w danym punkcie B*. Analiza tego stanu podana jest w rozdz. 7.

Określenie wartości σ i τ w poszczególnych punktach przekroju jest podstawowym zadaniem w wytrzymałości materiałów. Jest ono w pewnym sensie odwrotne do znanego



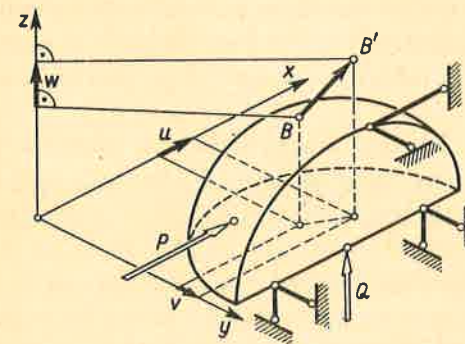
Rys. 1.10. Ilustracja podstawowego zadania wytrzymałości

z mechaniki ogólnej szukania nieznaney wypadkowej siły W i momentu M dla znanych obciążeń $p(y, z)$ rozłożonych w sposób ciągły na danej powierzchni (rys. 1.10a). W wytrzymałości materiałów *znany wysiłek przekroju*, tj. wypadkowe W i M (rys. 1.10b),

a szukamy $p(y, z)$ pod postacią jego składowych $\sigma(y, z)$ i $\tau(y, z)$. Jest rzeczą jasną, że dla rozwiązania tego zadania musimy znać *charakter*⁽¹⁾ rozkładu σ i τ , inaczej bowiem odpowiedź nie byłaby jednoznaczna. Takie informacje może dać tylko zbadanie odkształceń.

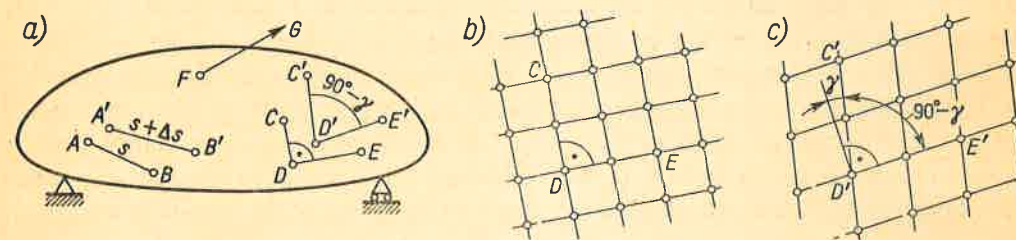
1.6. Definicja przemieszczeń i względnych odkształceń

Przy badaniu odkształceń konieczne jest najpierw określenie ich miary. Zakładamy, że przed obciążeniem badane ciało jest unieruchomione. Po obciążeniu na skutek odkształcalności materiału poszczególne punkty ciała zmieniają swoje położenie, na przykład punkt B zajmie położenie B' (rys. 1.11). Wektor $\overline{BB'}$ łączący pierwotne i końcowe położenie tego



Rys. 1.11. Określenie przemieszczeń: wypadkowego $\overline{BB'}$ i składowych u, v, w

samego punktu ciała nazywamy *przemieszczeniem punktu*. Rzuty tego wektora na stałe osie x, y, z nazywamy składowymi przemieszczeniami punktu i oznaczamy odpowiednio przez u, v i w . Przemieszczenia te są na ogół bardzo małe w porównaniu do wymiarów ciała, znajomość ich jednak jest ważna w zagadnieniach praktycznych.



Rys. 1.12. Definicja względnych odkształceń i kąta odkształcenia postaciowego

Same przemieszczenia nie dają jeszcze obrazu intensywności zmiany wymiarów i postaci w poszczególnych miejscach ciała. Miarę taką otrzymamy badając zmianę, jakiej przy obciążeniu doznaje bądź wybrany odcinek AB , bądź pierwotnie prosty kąt CDE (rys. 1.12a). Jeśli odcinek AB przejdzie po obciążeniu w położenie $A'B'$ zmieniając przy tym swą

⁽¹⁾ Na przykład, że σ jest liniową funkcją y i z , a τ jest prostopadłe i proporcjonalne do OB itp.

długość z s na $s + \Delta s$, to intensywność zmiany wymiarów liniowych określimy jako

$$\varepsilon_{\delta r} = \Delta s / s \quad (4)$$

i nazwiemy ją *średnim względnym wydłużeniem odcinka AB*. Aby lepiej oddać sytuację w bezpośrednim otoczeniu punktu A , skracamy długość s odcinka AB . Graniczna wartość

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{s} \quad (1.5)$$

jest lokalną intensywnością zmiany wymiarów liniowych i nosi nazwę *względnego wydłużenia w punkcie A w obranym kierunku AB*. Widać, że wielkość ε określona jest liczbą oderwaną. Jej wartość jest na ogół małym ułamkiem i dlatego podaje się ją w procentach lub promillach. Jest oczywiste, że określenie wartości ε dla jednego obranego kierunku AB nie daje pełnego obrazu względnych odkształceń w otoczeniu punktu A . Taki obraz otrzymamy, jeśli będą znane wartości ε we wszystkich możliwych kierunkach wychodzących z punktu A .

Drugą niezależną od ε miarą intensywności odkształcenia jest zmiana kąta prostego CDE . Załóżmy, że przed odkształceniem w otoczeniu punktu D atomy znajdują się w węzłach prostokątnej regularnej siatki (rys. 1.12b). Po obciążeniu (rys. 1.12c) zmieniają się na ogół nie tylko odstęp atomów, lecz i postać siatki na ukośną. Ta zmiana postaci oznacza przesunięcie warstw atomów po sobie, tzw. *poślizg*. Okazuje się, że zmiana sił międzyatomowych towarzysząca poślizgowi jest tego samego rzędu co i zmiana sił przy zmianie odległości atomów. Miarą tego poślizgu jest kąt γ przedstawiający *zmniejszenie* kąta pierwotnie prostego. Kąt γ może być między różnymi warstwami atomów różny, aby więc ściśle oddać lokalny poślizg, należy ramiona CD i DE wziąć jak najkrótsze. Dla materiału jednorodnego odpowiada to przejściu do granicy

$$\gamma = \lim_{\substack{CD \rightarrow 0, \\ DE \rightarrow 0}} (\sphericalangle CDE - \sphericalangle C'D'E'). \quad (1.6)$$

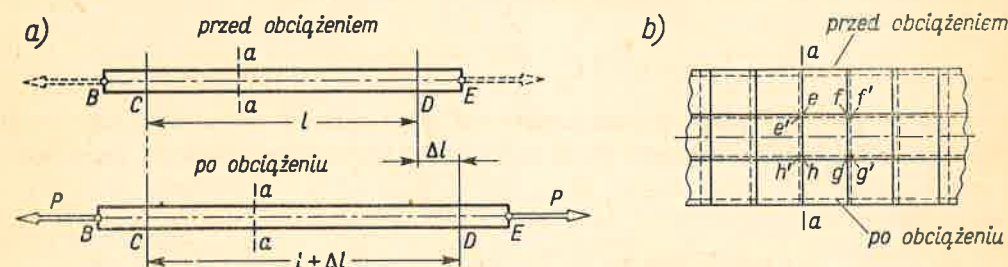
Tak określony kąt γ nazywamy *odkształceniem postaciowym*. Kąt ten wyrażamy w radianach. Podobnie jak i ε jest on liczbą oderwaną tego samego rzędu co i ε .

Pełny obraz odkształceń postaciowych w otoczeniu danego punktu D otrzymamy, gdy będą znane kąty γ przy wszystkich możliwych (w przestrzeni) ustawieniach ramion CD i DE . Przez analogię do stanu napięcia (art. 1.5) *stanem odkształcenia* w danym punkcie nazwiemy całą mnogość wartości ε i γ odpowiadających całej mnogości kierunków i położeń pierwotnie prostego kąta związanych z tym punktem. Analizę tego stanu podano w rozdz. 7.

1.7. Prawo Hooke'a w przypadku rozciągania

Wprowadzone pojęcia naprężeń i względnych odkształceń są od siebie zależne. Tę zależność prześledzimy na przykładzie najprostszego zagadnienia wytrzymałości materiałów. Jest nim rozciąganie pryzmatycznego pręta zachodzące wtedy, gdy pręt ten obciążony jest na końcach dwiema przeciwnymi siłami P (rys. 1.13a). W przypadku tym stwier-

dzono *doświadczalnie*, że oś pręta zostaje prosta, pręt zwiększa swą długość i pomiarowy odcinek CD o długości l ma po obciążeniu długość $l + \Delta l$. Ponadto zaobserwowano, że narysowana na bocznej powierzchni pręta prostokątna siatka o bokach odpowiednio równoległych i prostokątnych do osi pręta (rys. 1.13b) zostaje po obciążeniu prostokątna, nie zmienia swej orientacji względem osi pręta, zmienia natomiast swe wymiary i to nie tylko w kierunku wzdłużnym, lecz i poprzecznym. Okazuje się, że jednakowe przed obciążeniem oczka siatki zmieniają się tak samo. Ustalono również, że w pewnych granicach



Rys. 1.13. Odkształcenia pryzmatycznego pręta rozciąganego

a) obraz pręta przed odkształceniem i po odkształceniu; b) obraz deformacji bocznej powierzchni pręta.

obciążeń dla większości materiałów konstrukcyjnych wydłużenie Δl jest proporcjonalne do obciążenia P i długości l , odwrotnie proporcjonalne do pola A poprzecznego przekroju pręta, nie zależy natomiast od postaci przekroju (koło, prostokąt itp.). Ta doświadczalna zależność przy wprowadzonych oznaczeniach ma postać

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA} \quad (1.7)$$

i nosi nazwę *wzoru Hooke'a*. Współczynnik proporcjonalności E przy ustalonych warunkach doświadczenia, jak na przykład stałej temperaturze, zależy tylko od rodzaju materiału pręta i nosi nazwę *modułu sprężystości wzdłużnej* lub *modułu Younga*.

Przekształćmy wzór Hooke'a wprowadzając pojęcia naprężenia i względnego wydłużenia. Ponieważ odkształcenia jednakowych krutek siatki są jednakowe, zatem względne wydłużenia w kierunku osi pręta są jednakowe na całej długości i są równe

$$\varepsilon = \Delta l / l, \quad (1.8)$$

bez potrzeby stosowania wzoru (1.5). Wzór (1.8) określa ε dla każdego wzdłużnego elementu pręta⁽¹⁾. Wynika stąd, że wszystkie te elementy znajdują się w jednakowych warunkach. Wobec tego intensywność sił wewnętrznych, czyli naprężenie, jest we wszystkich punktach przekroju $a-a$ to samo i ma wartość σ (rys. 1.14a). Elementarne siły wewnętrzne są σdA , a ich wypadkowa N_a jest siłą normalną do przekroju, równą

$$N_a = \sum \sigma dA = \sigma \sum dA = \sigma A, \quad (a)$$

⁽¹⁾ Gdyby odkształcenia ε w rdzeniu pręta były inne niż na powierzchni bocznej, wówczas kształt przekroju musiałby mieć wpływ na Δl . Faktu takiego nie obserwuje się w doświadczeniach.

i przechodzi przez środek ciężkości przekroju. Z drugiej strony siła N_a , jako wysiłek przekroju, utrzymuje w równowadze myślowo odciętą część pręta i musi być równa P . Stąd otrzymujemy

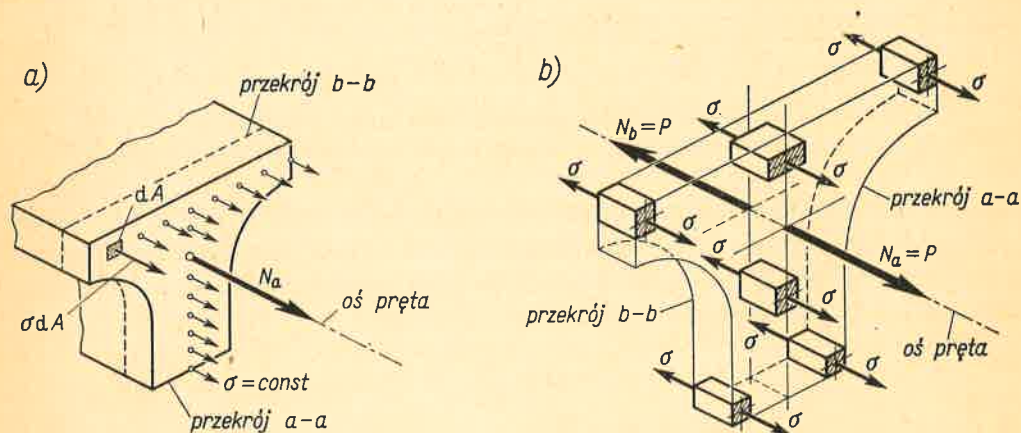
$$\sigma = \frac{N_a}{A} = \frac{P}{A} \quad (1.9)$$

jako wartość normalnych naprężeń przy rozciąganiu.

Wstawiając (1.8) i (1.9) do (1.7) otrzymujemy *prawo Hooke'a*

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{lub} \quad \sigma = E\varepsilon, \quad (1.10)$$

wyrażające ogólną zależność fizyczną oderwaną od wymiarów pręta. Sens tego prawa zrozumiemy rozpatrując plasterki pręta (rys. 1.14b) wycięty poprzecznymi przekrojami



Rys. 1.14. Określenie naprężeń przy rozciąganiu

$a-a$ i $b-b$ i podzielony wzdłużnie na szereg kostek. Każda kostka ma wydłużenie ε w kierunku prostopadłym do tych ścian, na których istnieją naprężenia normalne σ . W takim ujęciu wielkości σ i ε nie wiążą się z prętem, lecz z elementarną kostką i pewnym jej przekrojem⁽¹⁾ (ściana). Uwzględniając ponadto, że wzór Hooke'a słuszny jest tylko w pewnych granicach obciążeń, prawo Hooke'a wyrazimy mówiąc, że *w pewnym zakresie wartość naprężenia normalnego do przekroju jest proporcjonalna do wartości względnego wydłużenia w kierunku prostopadłym do tego przekroju.*

Z wzoru (1.10) widać, że moduł Younga E wyrażony jest w tych samych jednostkach co i naprężenie σ , a więc w MPa lub kG/cm^2 . Tenże wzór daje możliwość wyznaczenia modułu Younga, jeśli z doświadczenia (według schematu z rys. 1.13) znane są odpowiadające sobie wartości σ i ε . Niektóre wartości modułu E podaje tabl. 1.1.

Zależności (1.7)÷(1.10) słuszne są również przy ścisaniu przyrzątcznego pręta, gdy siły wzdłużne P (rys. 1.13) działają nie na zewnątrz, lecz do wewnątrz pręta. W takim

⁽¹⁾ To jest powód innego nazwania zależności (1.7) i (1.10).

przypadku następuje skrócenie o Δl odcinka CD oraz skrócenie względne ε , które traktujemy jako wartości ujemne. Podobnie jako ujemne traktujemy siłę ścisającą $N_a = P$ i naprężenie σ , których zwroty są przeciwne niż na rys. 1.14a. Moduł Younga przy ścisaniu dla większości materiałów ma tę samą wartość co i przy rozciąganiu.

Tablica 1.1

Mechaniczne własności materiałów⁽¹⁾
(wybrane przykładowo)

Materiał	E MPa	ν	R_e MPa	R_m MPa	a_s %
stal ⁽²⁾ St 3 S (~0,18% C, ~0,5% Mn)	$2,06 \cdot 10^5$	0,29	235	370÷460	25
stal sprężynowa ⁽³⁾ 60 SGH	$2,08 \cdot 10^5$	0,30	~1250	~1400	7
stop Al-Cu (dural D 16)	$7,0 \cdot 10^4$	0,34	320	460	17
stop Cu-Sn (brąz — pręty walc.)	$1,0 \div 1,1 \cdot 10^5$	0,32	350	480	11
szkło potasowe (zwykłe)	$6,0 \div 6,5 \cdot 10^4$	0,23	—	70÷90	~0
bakelit (żywica fenol-formald.)	$3,5 \div 4,0 \cdot 10^3$	0,37	—	80	—

⁽¹⁾ W układzie jednostek SI: 1 MPa = 1 Megapaskal = $10^6 \text{ N/m}^2 \approx 10,19 \text{ kG/cm}^2$.

⁽²⁾ Według PN-61/H-84020.

⁽³⁾ Według PN-65/H-84032.

Na zakończenie omówimy kwestię odkształceń w kierunku prostopadłym do osi pręta. Doświadczenia wykazują, że przy rozciąganiu poprzeczne elementy prostopadłe do osi pręta ulegają skróceniom, a pręt zwęża się w kierunku poprzecznym. Jeśli z tych skróceń obliczyć względne skrócenia ε_p , to okazuje się, że dla materiałów izotropowych są one jednakowe we wszystkich kierunkach prostopadłych do osi pręta. Stwierdzono, że *gdy słuszne jest prawo Hooke'a, wówczas ε_p jest proporcjonalne do ε* . Te fakty doświadczalne ujmujemy w zależności

$$\varepsilon_p = -\nu\varepsilon = -\nu \frac{\sigma}{E}, \quad (1.11a)$$

gdzie ν — współczynnik proporcjonalności, tzw. *liczba Poissona*, a znak minus wyraża, że ε_p i ε są przeciwnych znaków. Sens tej zależności jest podobny do podanego przy oma-

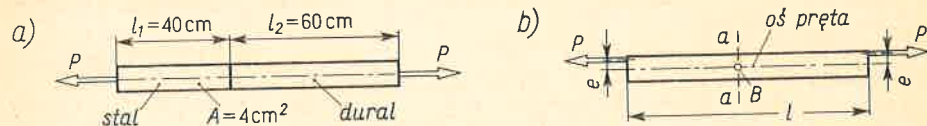
wianiu prawa Hooke'a i polega na stwierdzeniu, że każda elementarna kostka poddana na dwóch swych ścianach działaniu naprężeń σ (rys. 1.14b) doznaje skrócenia ε_p w dowolnym kierunku prostopadłym do tych naprężeń. Wartości ν , jak widać z tabl. 1.1, są dla materiałów uważanych za izotropowe zawarte w przedziale

$$0 < \nu < 0,5. \quad (1.11b)$$

Zadania

1. Rozciągany pryzmatyczny pręt ($A = 4 \text{ cm}^2$) wykonany ze stali niskowęglowej wykazuje wydłużenie $\varepsilon = 0,25\%$. Jakie jest naprężenie w pręcie i jaka jest siła rozciągająca pręt?

Od p. $\sigma = E\varepsilon = 2,06 \cdot 10^5 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} = 51,5 \text{ MPa} = 525 \text{ kG/cm}^2$, $P = \sigma A = 51,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \times 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 2060 \text{ N} = 2,06 \text{ kN}$.



Rys. 1.15.

2. Pryzmatyczny pręt (rys. 1.15a) rozciągany siłami $P = 40 \text{ kN}$ składa się z odcinka stalowego (s) i duralowego (d). Wyznaczyć w każdym z odcinków naprężenia normalne, wydłużenie względne i całkowite wydłużenie pręta.

Od p. $\sigma_s = \sigma_d = 10^2 \text{ MPa} = 1020 \text{ kG/cm}^2$, $\varepsilon_s = 0,48 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_d = 1,43 \cdot 10^{-3}$, $\Delta l = \varepsilon_s l_1 + \varepsilon_d l_2 = 1,05 \cdot 10^{-1} \text{ cm} = 0,105 \text{ mm}$?

3. Jaki jest moduł sprężystości i liczba Poissona materiału pręta o przekroju kwadratowym ($A = 4 \text{ cm}^2$), który przy osiowym ściskaniu siłą $P = 60 \text{ kN}$ skrócił się na długości $l = 10 \text{ cm}$ o $\Delta l = 0,210 \text{ mm}$, a którego bok kwadratu wydłużył się o $0,014 \text{ mm}$?

Od p. $\sigma = -150 \text{ MPa} = -1530 \text{ kG/cm}^2$, $\varepsilon = -2,10 \cdot 10^{-3}$, $E = \sigma/\varepsilon = 7,15 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $\nu = 0,70 \cdot 10^{-3}$, $\nu = -\varepsilon_p/\varepsilon = 0,33$.

4. Pryzmatyczny pręt obciążony siłami P przyłożonymi mimośrodkowo (rys. 1.15b). Udowodnić, że rozkład naprężeń normalnych σ w przekroju $a-a$ nie może być równomierny.

Od p. Przy $\sigma = \text{const}$ wysiłek przekroju jest siłą normalną N_a . Siła N_a i mimośrodkowa siła P nie dają równowagi (niezrównoważony moment Pe). Założenie $\sigma = \text{const}$ jest więc błędne.

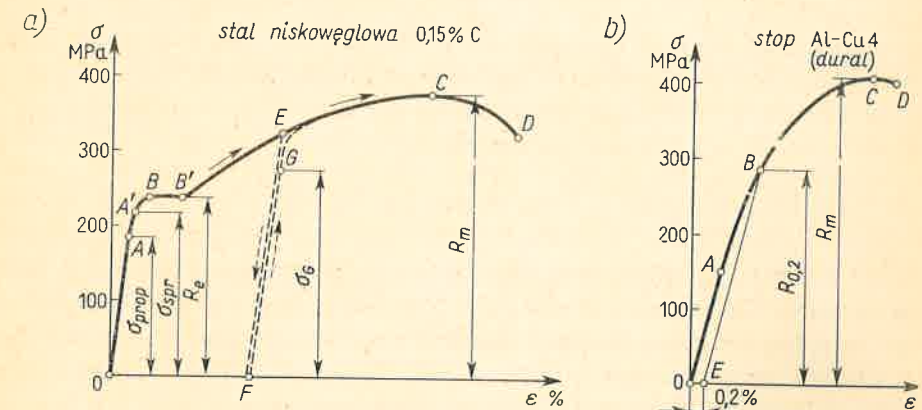
1.8. Wykres rozciągania

Jak wynika z doświadczeń nad rozciąganiem materiałów, prawo Hooke'a można stosować tylko do pewnej wartości naprężeń σ_{prop} , tzw. *granicy proporcjonalności*, zależnej od rodzaju materiału. Przy naprężeniach większych od σ_{prop} zależność $\sigma = f(\varepsilon)$ staje się nieliniowa, a mianowicie naprężenie σ przyrasta wolniej, niżby to wynikało z prawa Hooke'a.

Całą zależność $\sigma = f(\varepsilon)$ przedstawiamy zazwyczaj w postaci wykresu. Dla stali niskowęglowej (0,15÷0,25% C) wykres taki⁽¹⁾ ma postać według rys. 1.16a. Poza punktem A

⁽¹⁾ Na tym wykresie podziałka ε nie jest równomierna. Orientacyjne odcięte punktów A, B, B', C są $\varepsilon_A \approx 1\%$, $\varepsilon_B \approx 2 \div 3\%$, $\varepsilon_{B'} \approx 15 \div 25\%$, $\varepsilon_C \approx 180\%$.

odpowiadającym granicy proporcjonalności, drugim charakterystycznym punktem jest punkt B, w którym odkształcenie ε wzrasta przy $\sigma = \text{const} = R_e$. Wartość R_e nazywa się *granicy plastyczności*, a samo zjawisko wzrostu ε przy $\sigma = \text{const}$ jest tzw. *plynięciem materiału*. Wiąże się ono ze zmianami mikrostruktury materiału w postaci mikroskopijnych poślizgów nie znikających po odciążeniu i dających w wyniku wydłużenie trwałe (plastyczne). Gdy $\sigma = \sigma_{prop}$, poślizgi te są bardzo rzadkie, ich liczba jednak gwałtownie, a nawet lawinowo, rośnie, w miarę gdy $\sigma \rightarrow R_e$. Pojawienie się odkształceń trwałych jest więc procesem postępującym stopniowo. Z tego powodu *granica sprężystości* σ_{spr} , czyli ta wartość naprężenia, przy której nie ma jeszcze odkształceń trwałych, jest pojęciem umownym. Zależy ona od dokładności pomiaru⁽¹⁾ i rzadko kiedy jest podawana w tablicach. W odróżnieniu od tego granica plastyczności, jako wyraźnie zaznaczona, podawana jest powszechnie (tabl. 1.1).



Rys. 1.16. Typowe wykresy rozciągania

Tworzenie się poślizgów w pewnym ich stanie doznaje zahamowania. Jest to tzw. *umocnienie materiału* (odcinek B'C), w którym dla zwiększenia ε trzeba również zwiększyć σ . Tempo wzrostu σ , tj. wartość $d\sigma/d\varepsilon$, jest tu znacznie (kilkaset razy) mniejsze niż na odcinku OA. Szczytowe naprężenie R_m (punkt C) nazywamy *doraźną wytrzymałością* materiału (tabl. 1.1). Należy zaznaczyć, że wydłużenie ε aż do tej fazy próby (punkt C) jest równomierne dla całego pręta (próbki). Tę samą cechę ma też gęstość poślizgów nie wykazująca żadnej wyraźnej koncentracji. Począwszy od punktu C (odcinek CD) następuje koncentracja poślizgów w jednym miejscu próbki, czemu towarzyszy pojawienie się lokalnego przewężenia (szyjki), kończące się zerwaniem próbki (punkt D).

W przedziale trwałych odkształceń ($R_e < \sigma < R_m$) występuje ciekawe zjawisko *podniesienia granicy sprężystości*. Jeśli mianowicie proces obciążania przerwać w punkcie E ($\sigma > R_e$), to proces odciążania przebiega po linii prostej EF równoległej do OA. Całkowitemu odciążeniu ($\sigma = 0$) odpowiada trwałe odkształcenie OF. Powtórnemu obciążeniu tego pręta odpowiada ta sama linia FE, niemal aż do punktu E, po czym dalszy przebieg

⁽¹⁾ To samo dotyczy σ_{prop} . Umowność tych pojęć znalazła odzwierciedlenie w normach, na przykład w normie PN Polskiego Komitetu Normalizacyjnego pt. *Ścisła próba rozciągania*.

$\sigma = f(\varepsilon)$ jest po tej samej linii ECD , jaka byłaby bez tej całej operacji przerywania i znawiania obciążenia. Jeśli powtórnego obciążenia nie doprowadzać aż do punktu E , lecz przerwać je w punkcie G , to okazuje się, że po zdjęciu obciążenia materiał wraca znowu do stanu F . Innymi słowy materiał w przedziale naprężeń O, σ_G ($\sigma_G > \sigma_{spr}$) zachowuje się jak materiał sprężysty i na tym właśnie polega wspomniane zjawisko. Jest ono szeroko wykorzystywane w technice.

Dla większości metali i ich stopów wykres rozciągania nie ma wyraźnej granicy plastyczności (rys. 1.16b). W takim przypadku jako *umowną granicę plastyczności* $R_{0,2}$ przyjmuje się to naprężenie, przy którym trwałe odkształcenie $\varepsilon_{trwale} = 0,2\%$. Uzasadnieniem takiej umowy jest to, że przy $\varepsilon_{trwale} = 0,2\%$ obraz zmian mikrostruktury jest podobny do obrazu zmian w materiale mającym wyraźną granicę R_e . Punkt B reprezentujący $R_{0,2}$ odpowiada przecięciu linii EB równoległej do OA z linią wykresu, przy czym $OE = \varepsilon_{trwale} = 0,2\%$.

Jak powiedziano w art. 1.7, wydłużeniu w kierunku osi pręta towarzyszy skrócenie w kierunku poprzecznym. Zjawisko to obserwujemy również, gdy $R_e \leq \sigma \leq R_m$. Okazuje się, że we wszystkich materiałach izotropowych przyrostowi $\Delta\varepsilon$ wydłużenia towarzyszy jednakowy przyrost $\Delta\varepsilon_p$ skrócenia poprzecznego

$$\Delta\varepsilon_p \approx -0,5 \Delta\varepsilon. \quad (1.12)$$

Innymi słowy w zakresie odkształceń plastycznych liczba Poissona jest $\nu \approx 0,5$. To skrócenie ε_p powoduje zmianę pola A przekroju. Zmiana ta, gdy $\sigma \leq R_e$, jest jednak mała i dlatego w obliczeniach przyjmujemy A równe pierwotnemu polu przekroju.

Podobne jak przy rozciąganiu wykresy $\sigma(\varepsilon)$ otrzymujemy w przypadku ściskania. Dla większości metali i ich stopów wielkości charakterystyczne σ_{prop} , σ_{spr} i R_e mają te same wartości co i przy rozciąganiu. Odstępstwo od tego wykazują materiały o mniejszej jednorodności (żeliwo), o budowie łańcuchowej (sztuczne żywice), bądź materiały, które przy rozciąganiu nie wykazują odkształcenia plastycznego (cement, cegła).

Szczegółowe informacje w omawianym przedmiocie podają podręczniki materiałoznawstwa bądź podręczniki badania własności mechanicznych. Jest to uzasadnione, albowiem postać i wartości wykresu $\sigma(\varepsilon)$ zależą bardzo od składu materiału i od procesów technologicznych zmieniających jego mikrostrukturę (walcowanie, obróbka cieplna itp.).

1.9. Współczynnik bezpieczeństwa

Opisując zjawiska w różnych fazach rozciągania uczyniono z naprężenia σ miernik, którego wartość w stosunku do σ_{prop} , σ_{spr} , R_e lub R_m mówi o tym, czy jakieś zjawisko wystąpiło, czy nie. Z tego powodu jest racjonalne, aby tym samym miernikiem, tj. wartością naprężenia, objąć również zagadnienie bezpieczeństwa. Przez analogię do takich pojęć, jak σ_{prop} , σ_{spr} , wprowadzamy pojęcie *naprężenia dopuszczalnego*, jako maksymalnej wartości naprężenia, która gwarantuje bezpieczną jeszcze pracę konstrukcji.

Podstawowym warunkiem bezpieczeństwa jest to, żeby w rzeczywistych warunkach

pracy konstrukcja nie miała odkształceń trwałych, czyli żeby była sprężysta⁽¹⁾. Oznacza to, że w konstrukcji pracującej na rozciąganie można by przyjąć wartość naprężeń dopuszczalnych równą σ_{prop} . Tak byłoby w idealnym przypadku, gdyby ściśle były znane naprężenia występujące w czasie pracy oraz właściwości materiału. W rzeczywistości tak nie jest. Obciążenia zewnętrzne nigdy prawie nie są dokładnie znane (na przykład ciśnienie spalania w cylindrze silnika). Ponadto właściwości materiału wykazują pewien rozrzut. Z tych i innych nie wymienionych powodów przyjmujemy w praktyce naprężenia dopuszczalne mniejsze od σ_{prop} . Ponieważ jednak wyznaczenie granicy proporcjonalności nie jest łatwe, a sama wartość jej jest umowna, utarło się wyrażać naprężenia dopuszczalne k_r jako pewien ułamek wartości R_e bądź R_m , czyli tych wielkości, które łatwo można określić. W formie wzoru wyrażamy to, jak następuje:

$$k_r = \frac{R_e}{n_e} \quad \text{lub} \quad k_r = \frac{R_m}{n_m}, \quad (1.13)$$

gdzie liczby n_e , n_m są większe od jedności i nazywają się *współczynnikami bezpieczeństwa* odniesionymi odpowiednio do R_e bądź do R_m . Dla metali plastycznych, a w szczególności dla stali, bardziej uzasadnione jest stosowanie współczynnika n_e oceniającego bezpieczeństwo w stosunku do zjawisk wystąpienia wyraźnych trwałych odkształceń niedopuszczalnych w praktyce. Dla materiałów kruchych (żeliwo) używa się współczynnika n_m .

Liczbowa wartość n_e czy n_m , zależy od dokładności, z jaką znane są obciążenia zewnętrzne, stopnia jednorodności materiału, charakteru obciążeń (stałe czy zmienne w czasie), a także od czynników innej natury, jak jakość technologii, warunki użytkowania. Wszystkie te czynniki zależą od rodzaju maszyny, inne są bowiem warunki pracy turbiny parowej, a inne koparki, samochodu czy samolotu. Z tego punktu widzenia wartości współczynników bezpieczeństwa podawane w wykładach części maszyn, bądź innych specjalnych wykładach, należy traktować jako gwarancję bezpieczeństwa opartą na inżynierskiej tradycji i praktycznych doświadczeniach. W wytrzymałości materiałów traktujemy wartości współczynników n_e i n_m jako dane.

Podane wzorem (1.13) pojęcie współczynnika bezpieczeństwa stosuje się, ściśle biorąc, tylko do rozciągania lub ściskania pryzmatycznego pręta. W praktyce pojęcie to zostało ekstrapolowane na przypadki bardziej złożone, gdy naprężenia są w różnych miejscach ciała różne. Tok postępowania polega na wyszukaniu w ciele takiego miejsca, w którym działają naprężenia ekstremalne i porównaniu ich z wartością, która na podstawie badań laboratoryjnych jest uznana za dopuszczalną. Taka metoda, szeroko stosowana dzięki swej prostocie, nazywa się *metodą naprężeń dopuszczalnych*. Jest ona oparta na założeniu, że o bezpieczeństwie całej konstrukcji decyduje wartość naprężenia w jednym jej miejscu. Założenie to jest dyskusyjne. Istnieją bowiem liczne przypadki, gdy ściśle trzymanie się tego założenia dawałoby niepotrzebne przewymiarowanie konstrukcji. W szczególności dotyczy to lokalnego spiętrzenia naprężeń (rozd. 17).

Ten ostatni fakt dał impuls do oceny bezpieczeństwa tzw. *metodą obciążenia niszczącego*. W metodzie tej określa się na drodze teoretycznej lub doświadczalnej wartość P_{gr} obciąż-

⁽¹⁾ Jest to warunek wystarczający dla obciążeń stałych (np. ciężar konstrukcji). Gdy obciążenia są zmienne, warunek ten jest konieczny, lecz niewystarczający (rozd. 17).

żenia powodującą zniszczenie konstrukcji i porównuje się ją z wartością P_{rob} obciążenia w rzeczywistych warunkach pracy. Stosunek

$$n^* = \frac{P_{gr}}{P_{rob}} \quad (1.14)$$

daje miarę pewności ustroju. Słabym punktem tej metody jest trudność określenia P_{gr} w bardziej złożonych konstrukcjach.

Zadania

1. Pręt (rys. 1.13a) obciążony siłami $P = 40$ kN wykonany jest ze stali o $R_e = 240$ MPa. Wyznaczyć niezbędne pole A_{min} przekroju, jeśli współczynnik $n_e = 1,5$.

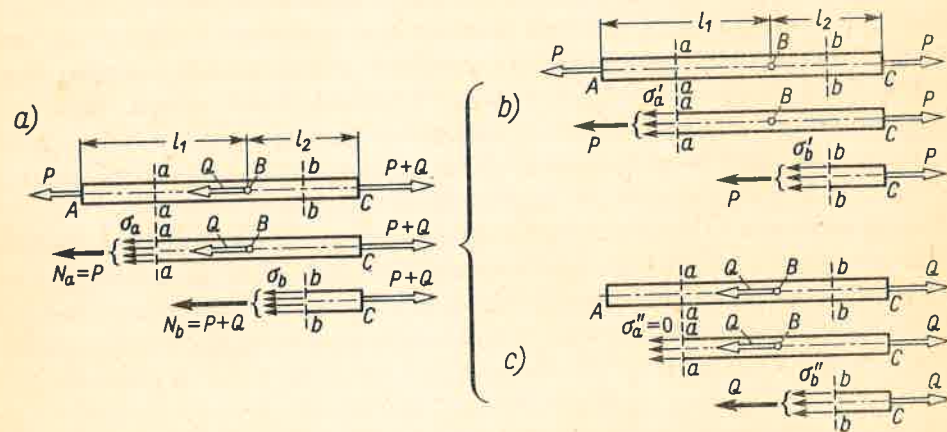
Odp. $k_r = R_e/n_e = 160$ MPa, $A_{min} = P/k_r = 2,5$ cm².

2. Jaki jest współczynnik bezpieczeństwa pręta (zad. 2, art. 1.7), jeśli $(R_e)_{stal} = 240$ MPa, $(R_e)_{dural} = 280$ MPa?

Odp. $(n_e)_{stal} = 2,4$, $(n_e)_{dural} = 2,8$, skąd $(n_e)_{pręt} = (n_e)_{stal}$.

1.10. Zasada superpozycji

Rozważmy pryzmatyczny pręt obciążony wzdłużnie siłami P i Q zrównoważonymi siłami $P+Q$ (rys. 1.17a). Widzimy, że pręt jako całość jest rozciągany. Siły normalne N_a i N_b



Rys. 1.17. Elementarne wyjaśnienie zasady superpozycji

przedstawiające wysiłek przekroju $a-a$ i przekroju $b-b$ są

$$N_a = P \quad \text{oraz} \quad N_b = P+Q, \quad (a)$$

a odpowiadające im naprężenia normalne

$$\sigma_a = P/A, \quad \sigma_b = (P+Q)/A. \quad (b)$$

Ponadto odkształcenia względne na odcinkach AB i BC są

$$\varepsilon_a = \sigma_a/E = P/EA, \quad \varepsilon_b = \sigma_b/E = (P+Q)/EA, \quad (c)$$

a przemieszczenia punktów A i B przy obiorze punktu C jako nieruchomego

$$\left. \begin{aligned} u_A &= \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = \varepsilon_a l_1 + \varepsilon_b l_2 = (P l_1/EA) + [(P+Q) l_2/EA], \\ u_B &= \Delta l_{BC} = (P+Q) l_2/EA. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Widać, że wszystkie te zależności są liniowe względem P i Q , czyli że

$$\Psi = \alpha_P P + \alpha_Q Q, \quad (e)$$

gdzie Ψ — pewna wielkość fizyczna (siła normalna, wydłużenie itd.) wywołana w danym miejscu ciała jednoczesnym działaniem sił P i Q stanowiących obciążenie, a α_P i α_Q — odpowiednie *stałe współczynniki*. Gdy na przykład utożsamić Ψ z siłą N_b , wówczas z porównania (a) i (e) mamy; $\alpha_P = 1$, $\alpha_Q = 1$, a jeśli $\Psi = u_A$, to

$$\alpha_P = (l_1 + l_2)/EA, \quad \alpha_Q = l_2/EA.$$

Widać, że te tzw. *współczynniki wpływowe* α_P i α_Q zależą od:

- 1) fizycznego charakteru Ψ (naprężenie, przemieszczenie itp.);
- 2) miejsca, gdzie wielkość Ψ jest badana (przykładowo punkty A , B);
- 3) przyczyny wywołującej powstanie Ψ (przykładowo siły P lub Q);
- 4) wymiarów ciała i własności materiału (parametry A , E).

Ich fizyczny sens widać z wzoru (e). Są to mianowicie wielkości Ψ przy *oddzielnym działaniu jednostkowych obciążeń* P lub Q .

Zademonstrowana liniowa zależność (e) między wielkością Ψ , którą ogólnie nazwiemy *skutkiem*, a obciążeniem nie jest wyjątkiem. Liczne doświadczenia nad zachowaniem się ciał stałych (konstrukcji) pokazują, że w ogromnej większości przypadków skutek Ψ jest liniową funkcją obciążenia złożonego z P_1, P_2, \dots, P_n , czyli

$$\Psi = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_n P_n. \quad (1.15)$$

Dla takich ciał (ustrojów), zwanych odąd *liniowymi*, słuszna jest *zasada superpozycji*, lub, inaczej, niezależności działania obciążeń. Zauważmy bowiem, że składniki $\alpha_1 P_1, \alpha_2 P_2, \dots$ przedstawiają odpowiednio skutki $\Psi_1 = \alpha_1 P_1, \Psi_2 = \alpha_2 P_2, \dots$ działania oddzielnie obciążeń prostych P_1, P_2, \dots składających się na całe obciążenie. Skutek wypadkowy Ψ przy obciążeniu złożonym jest algebraiczną sumą skutków Ψ_1, Ψ_2, \dots wywołanych działaniem obciążeń składowych i nie zależy od kolejności poszczególnych obciążeń składowych.

Podstawowym warunkiem stosowalności zasady superpozycji jest sprężystość materiału. Jeśli bowiem ciało (ustrój) obciążyć układem sił P_1, \dots, P_n , a następnie odciążyć tak, że $P_1 = P_2 = \dots = P_n = 0$, to w końcowej fazie $\Psi = 0$, czyli że ustrój wraca ściśle do stanu początkowego, co właśnie jest definicją sprężystości. Warunek ten jest spełniony w ogromnej większości zagadnień wytrzymałości materiałów i wtedy zastosowanie superpozycji ułatwia rozwiązanie. I tak zamiast badać łączne działanie sił P i Q możemy oddzielnie zbadać działanie sił P (rys. 1.17b), oddzielnie sił Q (rys. 1.17c) i wyniki tych dwóch prostszych zadań zsumować algebraicznie. Dla przykładu naprężenia w przekrojach $a-a$ i $b-b$ są:

$$\text{od sił } P: \quad \sigma'_a = P/A, \quad \sigma'_b = P/A, \quad \text{od sił } Q: \quad \sigma''_a = 0, \quad \sigma'_b = Q/A,$$

a po ich zsumowaniu otrzymujemy wyniki (b).

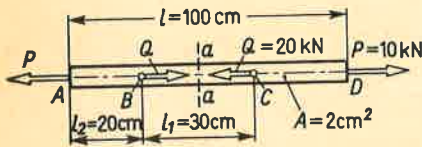
Zadania

1. Metodą superpozycji wyznaczyć wartość naprężeń w przekroju $a-a$, wydłużenie całego pręta AD i jego odcinka BC (rys. 1.18), jeśli $E = 1,1 \cdot 10^5$ MPa.

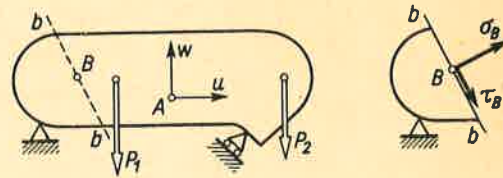
Odp. $\sigma_a = -50$ MPa, $\Delta l_{AD} \approx 0,18$ mm, $\Delta l_{BC} \approx -0,14$ mm.

2. Przy kolejnym działaniu sił $P_1 = 1$ kN i $P_2 = 0,5$ kN pionowe przemieszczenia punktu A danego ustroju (rys. 1.19) są odpowiednio $w'_A = -0,15$ cm i $w''_A = 0,10$ cm. Określić pionowe przemieszczenie punktu A : a) przy jednoczesnym działaniu sił P_1 i P_2 , b) przy jednoczesnym działaniu $P_1 = 3$ kN i $P_2 = 1$ kN.

Odp. a) $w_A = -0,05$ cm (tzn. do dołu); b) $w_A = -0,25$ cm.



Rys. 1.18.



Rys. 1.19.

3. W ustroju z zadania 2 poziome przemieszczenia punktu A przy kolejnym działaniu sił $P_1 = 1$ kN i $P_2 = 0,5$ kN są odpowiednio $u'_A = 0,05$ cm, $u''_A = 0,03$ cm. Wykorzystując wyniki zadania 2 określić całkowite przemieszczenie punktu A (w płaszczyźnie rysunku), gdy jednocześnie działają: a) $P_1 = 1$ kN i $P_2 = 0,5$ kN; b) $P_1 = 3$ kN i $P_2 = 1$ kN.

Rozwiązanie. W przypadku (a) całkowite przemieszczenia: poziome $u_A = 0,08$ cm, a pionowe (z zadania 2) $w_A = -0,05$ cm. Przemieszczenie wypadkowe $\sqrt{u_A^2 + w_A^2} = 0,094$ cm. W przypadku (b) $u_A = 0,21$ cm i całkowite przemieszczenie 0,33 cm.

4. W punkcie B przekroju $b-b$ (rys. 1.19) pomierzono naprężenia $\sigma'_B = 30$ MPa i $\tau'_B = 10$ MPa wywołane siłą $P_1 = 1$ kN oraz $\sigma''_B = -10$ MPa, $\tau''_B = 15$ MPa wywołane siłą $P_2 = 0,5$ kN. Wyznaczyć naprężenia σ_B i τ_B oraz całkowite naprężenie p przy jednoczesnym działaniu $P_1 = 2$ kN, $P_2 = 0,5$ kN.

Odp. $\sigma_B = 50$ MPa, $\tau_B = 35$ MPa, $p_B = \sqrt{\sigma_B^2 + \tau_B^2} \approx 61$ MPa.

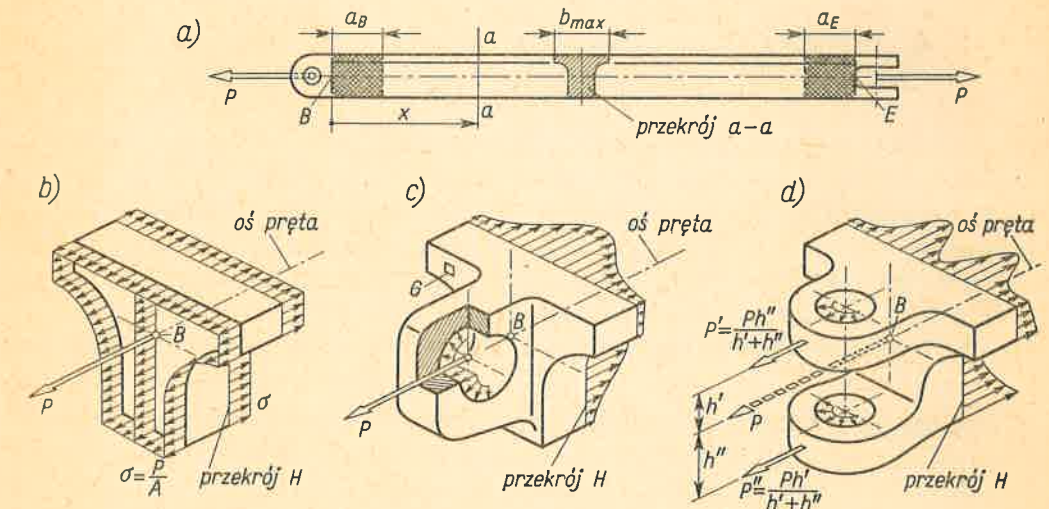
CZĘŚĆ PIERWSZA

Analiza pręta statycznie wyznaczalnego

2 ROZCIĄGANIE LUB ŚCISKANIE

2.1. Model rozciąganego pręta a konstrukcje rzeczywiste

Rzeczywiste pręty rozciągane (rys. 2.1a) wykazują odstępstwa od teoretycznego modelu. Według bowiem tego modelu w końcowym przekroju B siła P powinna być przyłożona pod postacią naprężeń $\sigma = P/A$ równomiernych na całym polu przekroju (rys. 2.1b).



Rys. 2.1. Teoretyczny i rzeczywisty sposób wprowadzenia sił wzdłużnych

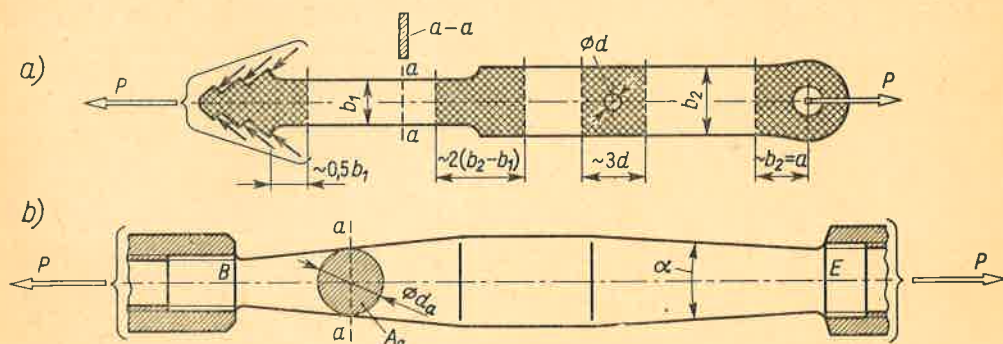
W rzeczywistości sposób wprowadzenia siły P jest odmienny od teoretycznego, na przykład przez sworzeń wchodzący w otwór ucha (rys. 2.1c). Ucho to nie obejmuje całego przekroju B i pewne jego części zostają swobodne. W takim punkcie jak punkt G nie ma oddziaływań

zewnątrznych i naprężenie $\sigma = 0$. Już z tego widać, że rozkład naprężeń σ nie jest w przekroju B równomierny, skutkiem czego w przekrojach sąsiednich, jak przekrój H , istnieje również nierównomierny rozkład σ . Charakter tego rozkładu zależy od sposobu wprowadzenia siły P i będzie inny, gdy na przykład ucho jest podwójne (rys. 2.1d).

W świetle tych faktów powstaje pytanie, jaki sens ma teoretyczny model omówiony w art. 1.7. Odpowiedź daje teoria sprężystości w postaci zasady de Saint-Venanta głoszącej, że dwa różne, ale statycznie równoważne⁽¹⁾, układy sił działając na tę samą małą część ciała dają zauważalne różnice rozkładu naprężeń tylko w bezpośrednim otoczeniu tej części. W odległościach dużych w porównaniu z wymiarami tej części rozkłady naprężeń odpowiadające statycznie równoważnym układom sił są praktycznie jednakowe. W rozpatrywanym przypadku częścią ciała, na którą działają różne układy sił o tej samej wypadkowej P , jest przekrój B . Zgodnie z zasadą de Saint-Venanta, te układy sił dadzą praktycznie jednakowy, czyli równomierny rozkład naprężeń w każdym przekroju $a-a$ (rys. 2.1a), o ile odległość x jest duża w porównaniu do wymiarów przekroju B . Zauważalne różnice rozkładu σ wystąpią tylko na długości a_B tego samego rzędu co i wymiary przekroju. Dla prętów o zwartym przekroju przyjmuje się

$$a_B = \text{maksymalny wymiar przekroju } B = b_{\max}, \quad (a)$$

gdyż w tej odległości różnice między wartościami σ w poszczególnych punktach przekroju nie przekraczają $\pm 3\%$ wartości P/A . Taką odchyłkę uznaje się za praktycznie dopuszczalną. To samo ograniczenie występuje na drugim końcu E . W wyniku przedział stosowności wzorów (1.7)÷(1.9) odpowiada niezakratkowanej na rys. 2.1a części pręta.



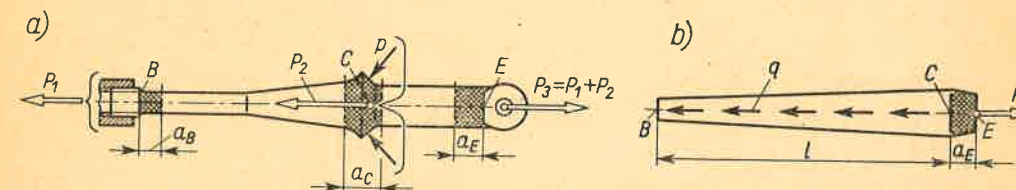
Rys. 2.2. Przedziały stosowności modelu pręta do rzeczywistych elementów obciążonych wzdłużnymi siłami

Podobną nierównomierność rozkładu σ obserwuje się w przypadku raptownych zmian przekroju, tzw. karbów, jak raptowne zwężenia lub otwory (rys. 2.2a). Nierównomierność ta ogranicza się do otoczenia karbu (zakratkowane obszary), w których wzorów (1.7)÷(1.9) nie można stosować. W odróżnieniu od tego przypadek łagodnej (kąt $\alpha < 20^\circ$) zmienności przekroju (rys. 2.2b) nie daje dużych zakłóceń (odchyłka $\pm 3\%$) i w badanym przekroju $a-a$ mamy

$$\sigma_a = N_a/A_a. \quad (2.1)$$

⁽¹⁾ To znaczy o tej samej wypadkowej, zajmującej to samo położenie.

Trzeciego rodzaju odstępstwa występują, gdy liczba obciążających sił jest większa od dwóch (rys. 2.3a). Wprowadzenie siły P_2 w postaci nacisków p powoduje lokalne zaburzenie w równomiernym rozkładzie naprężeń w otoczeniu przekroju C . Obszar wyraźnego zaburzenia rozciąga się znowu na długość a_C równą maksymalnemu wymiarowi przekroju C . Inna natomiast jest sytuacja, gdy obciążenie wzdłużne stanowią siły masowe o natężeniu q N/m (rys. 2.3b). Przy takim obciążeniu naprężenia σ_a są równomierne, z tym tylko, że wartość ich w różnych przekrojach jest na ogół różna, gdyż we wzorze (2.1) zmienna jest siła N_a i pole A_a .



Rys. 2.3. Ograniczenia stosowności modelu pręta spowodowane obciążeniami

Powyższe informacje zilustrowane na przykładzie rozciąganego pręta mają znaczenie ogólne. Są one ważne i w innych przypadkach obciążenia, jak skręcanie, zginanie. Ich istota polega na zwróceniu uwagi, w jakiej mierze obliczenia rzeczywistych konstrukcji oparte na wzorach art. 1.7 są wiarogodne, w jakiej zaś wymagają uzupełnienia dodatkową analizą omówioną w rozdz. 17.

2.2. Przykłady analizy prętów wzdłużnie obciążonych

W odróżnieniu od prostych przypadków, omówionych w art. 1.7÷1.10, obecnie rozważymy zagadnienia bardziej złożone. Pierwszy typ zagadnień, tzw. zadanie kontroli, polega na określeniu naprężeń i odkształceń oraz współczynnika bezpieczeństwa konstrukcji o znanych wymiarach i znanych czynnych siłach, tj. P_1 , P_2 i q (rys. 2.4a). Po określeniu reakcji $R_E = P_1 + P_2 + ql_1$, znamy już obciążenie pręta i wyznaczamy następnie wysiłek każdego przekroju. Odcinając myślowo przekrojem $a-a$ dolną część pręta, na którą działają: wypadkowa qx_1 obciążeń ciągłych q , siła P_1 i nieznaną siłą normalną N_a (rys. 2.4b) mamy z równowagi tej części

$$N_a = P_1 + qx_1. \quad (a)$$

Jak widać, siła N_a zależy liniowo od współrzędnej x_1 badanego przekroju $a-a$ i jest rozciągająca, bo $N_a > 0$. Wynik (a) jest słuszny tylko w przedziale $0 < x_1 < l_1$, czyli dla odcinka BC . Dla odcinka CD przy podobnym badaniu wysiłku przekroju $b-b$ wypadkowa obciążeń q jest stała i równa ql_1 , wobec czego z warunku równowagi rzutów na oś pręta mamy

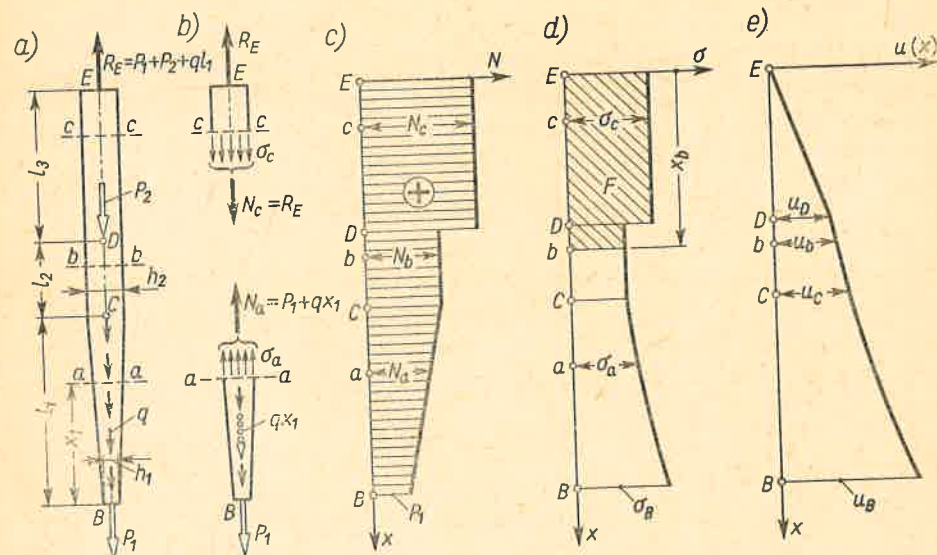
$$N_b = P_1 + ql_1, \quad (b)$$

czyli stałą siłą rozciągającą N_b . Podobnie badając równowagę dolnej myślowo odciętej

części możemy obliczyć wysiłek przekroju $c-c$. Prościej jednak jest obliczyć siłę N_c z warunku równowagi górnej części, widać bowiem, że

$$N_c = R_E = P_1 + P_2 + ql_1. \quad (c)$$

Wyniki te przedstawiamy na wykresie sił normalnych N (rys. 2.4c). Badanym przekrojom $a-a$, $b-b$, $c-c$ odpowiadają punkty a , b , c na osi odciętych równoległej do osi pręta, a rzędne dają wartości siły N_a , N_b , N_c . Jeśli nanieść rzędne dla wszystkich przekrojów, to ostatecznie wykres N składa się z trzech odcinków: jednego ukośnego i dwóch równoległych



Rys. 2.4. Przykład szczegółowej analizy pręta rozciąganego

do osi odciętych. Miejsce przeskołu odpowiada punktowi D , w którym przyłożona jest siła P_2 . Wykres ten daje przejrzysty obraz wysiłku wszystkich przekrojów pręta. Na jego podstawie wyznaczamy z wzoru (2.1) naprężenie σ dzieląc rzędne wykresu N przez odpowiednie pole przekroju (rys. 2.4d). W punkcie D odpowiadającym raptownej zmianie obciążenia występuje nieciągłość przebiegu σ . Z wykresu tego określamy *niebezpieczny przekrój*, w którym σ jest ekstremalne, czyli $\sigma = \sigma_{ekstr}$. Tę wartość σ_{ekstr} porównujemy z wartością naprężeń dopuszczalnych k_r dla materiału. Aby konstrukcja była prawidłowa, musi być

$$\sigma_{ekstr} \leq k_r. \quad (2.2)$$

Zmieniając tylko skalę rzędnych wykresu σ mamy przebieg wartości ε , gdyż zgodnie z prawem Hooke'a

$$\varepsilon = \sigma/E$$

i stąd możemy określić przemieszczenia $u(x)$ przekrojów pręta. Gdy przekrój E jest

utwierdzony ($u_E = 0$), wówczas przemieszczenie u_b przekroju $b-b$ jest równe wydłużeniu Δl_{Eb} części Eb pręta. To wydłużenie Δl_{Eb} jest równe sumie przyrostów εdx , o jakie zmieniają się długości elementarnych odcinków dx , czyli

$$\Delta l_{Eb} = \int_0^{x_b} \varepsilon dx = \frac{1}{E} \int_0^{x_b} \sigma dx. \quad (2.3)$$

Widzimy, że przemieszczenie $u_b = \Delta l_{Eb}$ jest równe zakreskowanemu na wykresie $\sigma(x)$ polu dzielonemu przez moduł E . Obliczenie tego pola (całki) w prostszych przypadkach wykonujemy analitycznie, a w bardziej złożonych numerycznie, np. metodą trapezów.

Drugi typ, tzw. *zagadnienie kształtowania*, polega na takim doborze parametrów, aby spełniony był warunek $\sigma_{ekstr} \leq k_r$. Tymi parametrami są z reguły wymiary przekrojów poprzecznych, natomiast pozostałe parametry, jak długości, wartości sił i punkty ich zaczepienia są z góry ustalone. Jeśli obiektem kształtowania jest pręt (rys. 2.4), to ustalone są P_1 , P_2 , q i R_E oraz długości l_1 , l_2 i l . Ponadto konstruktor z innych względów może ustalić, że pręt ten ma być wykonany z płaskownika, że na odcinku EC ma być $h_2 = \text{const}$, a na odcinku CB szerokość ma być zmienna liniowo od h_1 do h_2 . Przy takich ograniczeniach parametrami podlegającymi zmianom są tylko h_1 , h_2 oraz grubość płaskownika δ . Dobór ich wartości rozpoczynamy od wykresu sił normalnych, z którego od razu widzimy, że przy $h_2 = \text{const}$ wszystkie przekroje odcinka ED są w jednakowych warunkach. Aby spełnić postulat $\sigma \leq k_r$, pole przekroju, tj. $h_2 \delta$, musi być

$$h_2 \delta = N_c / \sigma = R_E / \sigma \geq R_E / k_r. \quad (d)$$

Na odcinku DB niebezpieczny jest przekrój B , którego pole jest najmniejsze. Stąd wynika, że

$$h_1 \delta = N / \sigma = P_1 / \sigma \geq P_1 / k_r. \quad (e)$$

Jak widać, wzory (d) i (e) dają pewną swobodę, gdyż, zależnie od przyjętej grubości δ , mamy różne h_1 i h_2 . Zazwyczaj wartości te zaokrąglamy przyjmując najbliższe uzasadnione ze względów wykonawczych, na przykład w całych milimetrach.

Po ukształtowaniu pręta pozostałe etapy analizy (rys. 2.4d, e) zostają jak poprzednio. Ze zmodyfikowanego wykresu σ wynika, że materiał pręta jest w pełni wykorzystany na odcinku ED i w przekroju B , natomiast w pozostałych przekrojach odcinka DB jest on wykorzystany częściowo ($\sigma < k_r$). To niepełne wykorzystanie jest konsekwencją narzuconego w danym przypadku warunku (liniowa zmiana szerokości).

Jak widzimy, w obydwóch typach zagadnień przestrzega się tej samej kolejności, jak: określenie obciążenia, wysiłków przekrojów, naprężeń i wydłużeń. W prostszych zadaniach, lub po nabraniu wprawy, nie wszystkie te etapy muszą być tak wyraźnie demonstrowane, jak pokazano powyżej, lecz mogą być robione „w pamięci”. Wyjątkiem jest wykres sił normalnych. Ten wykreślny sposób przedstawiania wysiłku jest ogólnie przyjęty we wszystkich zadaniach.

Zadania

1. Przeprowadzić analizę pryzmatycznego pionowego pręta (rys. 2.5a) obciążonego siłą P i ciężarem własnym. Gęstość materiału ρ .

Rozwiązanie. Badając równowagę myślowo odciętej części dolnej (rys. 2.5b) otrzymujemy

$$N_a = P + \rho g A (l - x_a)$$

i wykres sił N , jako prostą o rzędnych $N_B = P$ i $N_E = P + \rho g A l$ (rys. 2.5c). Ponieważ $A = \text{const}$, zatem wykres σ (rys. 2.5c) jest kopią wykresu N w zmienionej tylko skali. Niebezpieczny jest przekrój E ($x_a = 0$), w którym

$$\sigma_E = N_E/A = (P/A) + \rho g l \leq k_r.$$

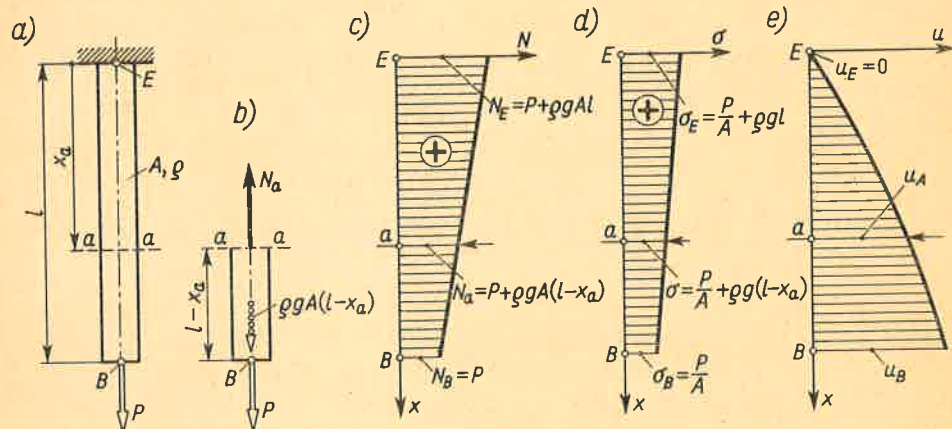
Przemieszczenie przekroju a - a obliczamy z wzoru (2.3)

$$u_A = \frac{1}{E} \int_0^{x_a} \sigma dx = \frac{1}{E} \frac{\sigma_E + \sigma}{2} x_a = \frac{P x_a}{EA} + \frac{\rho g}{E} \left(l x_a - \frac{x_a^2}{2} \right),$$

albowiem pole F odpowiadające odcinkowi x_a jest polem trapezu. Dla swobodnego końca ($x_a = l$) mamy przemieszczenie u_B

$$u_B = (Pl/EA) + (\rho g l^2/2E).$$

Wszystkie wyniki (N_a , σ , u) są sumą dwóch składników: jednego proporcjonalnego do P , drugiego do ciężaru właściwego ρg . Tak być powinno z uwagi na zasadę superpozycji. W budowie maszyn wpływ ciężaru własnego jest z reguły pomijalny i tylko dla lin wyciągów górniczych lub wiertniczych należy go uwzględnić.



Rys. 2.5. Pręt obciążony siłą skupioną i siłami masowymi

2. Lina wyciągu górniczego, według schematu z rys. 2.5a, obciążona na dolnym końcu ciężarem klatki $P = 50$ kN ma ciężar własny $q = 39$ N/m, pole $A = 3,9$ cm², długość $l = 800$ m. Określić współczynnik bezpieczeństwa liny i przemieszczenia u_B ($R_m = 1800$ MPa, $E = 1,8 \cdot 10^5$ MPa).

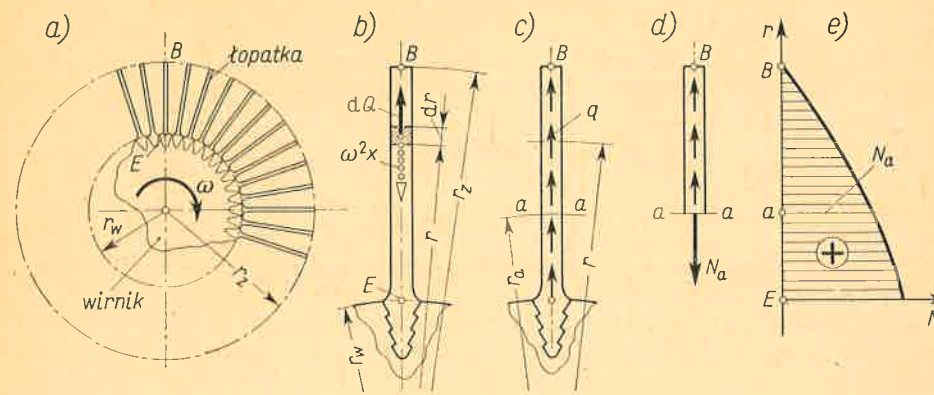
Odp. $\sigma_{ekstr} = \sigma_E = 208$ MPa, współczynnik $n_m = R_m/\sigma_{ekstr} = 8,7$, $u_B = 75$ cm. Duża wartość n_m uzasadniona z uwagi na niezawodność.

3. Określić naprężenia w wirującej z prędkością kątową ω promieniowej pryzmatycznej łopatkę (rys. 2.6a). Gęstość materiału ρ . Dane liczbowe: $r_z = 75$ cm $r_w = 50$ cm, oraz liczba obrotów $\bar{n} = 3000$ obr/min, $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ kg/m³.

Rozwiązanie. Zadanie należy do dynamiki, ale można je sprowadzić do zadania statyki, jeśli dołączyć siły bezwładności równe iloczynowi masy przez przyspieszenie i skierowane przeciwnie do tego przyspieszenia (zasada d'Alemberta z mechaniki ogólnej). W naszym zadaniu elementarna ma-

sa jest $A \rho dr$, przyspieszenie dośrodkowe $\omega^2 r$ i elementarna siła bezwładności $dQ = A \rho dr \omega^2 r$ skierowana jest na zewnątrz od środka (rys. 2.6b). Na jednostkę długości siła masowa q jest

$$q = dQ/dr = \rho \omega^2 A r.$$



Rys. 2.6. Analiza pręta wirującego

Przez wprowadzenie tych sił mamy zadanie statyki (rys. 2.6c), z tym tylko, że q jest funkcją promienia r . Wysilek przekroju a - a jest siłą normalną N_a wyznaczoną z równowagi odciętej myślowo części (rys. 2.6d)

$$N_a = \int_{r_a}^{r_z} q dr = \int_{r_a}^{r_z} \rho \omega^2 A r dr = \frac{\rho \omega^2 A}{2} (r_z^2 - r_a^2) = \frac{\rho \bar{v}^2}{2} A \left[1 - \left(\frac{r_a}{r_z} \right)^2 \right],$$

gdzie $\bar{v} = \omega r_z$ — prędkość obwodowa swobodnego końca łopatki. Wykres sił N jest parabolą (rys. 2.6e), w której $N = 0$ dla $r = r_a = r_w$. Ponieważ $A = \text{const}$, zatem przebieg $\sigma(r_a)$ ma podobny charakter, przy czym

$$\sigma_a = \frac{N_a}{A} = \frac{\rho \bar{v}^2}{2} \left[1 - \left(\frac{r_a}{r_z} \right)^2 \right]$$

nie zależy od wartości A . Dla wartości danych w zadaniu mamy $\bar{v} = (\pi \bar{n}/30) r_z = (\pi 3000/30) 0,75 = 235$ m/s, i dla $r_a = r_w$

$$\sigma_{ekstr} = \sigma_E = \frac{7,85 \cdot 10^3 \cdot 235^2}{2} \left[1 - \left(\frac{0,50}{0,75} \right)^2 \right] \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2} = 121 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 121 \text{ MPa}.$$

4. Wyznaczyć całkowite wydłużenie łopatki (rys. 2.6). $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

Odp. Wstawiając do wzoru (2.3) wartość σ_a z poprzedniego zadania i całkując w granicach r_w , r_z mamy

$$u_B = \frac{1}{E} \int_{r_w}^{r_z} \sigma_a dr_a = \frac{\rho \bar{v}^2}{6E} (r_z - r_w) \left[2 - \left(\frac{r_w}{r_z} \right) - \left(\frac{r_w}{r_z} \right)^2 \right] \approx 0,080 \text{ mm}.$$

5. Wirujący pręt (łopatka) ma zmienny przekrój (rys. 2.7), przy czym $A_r = A_w (r_w/r)^3$. Wyznaczyć naprężenia, jeśli $\bar{v} = 235$ m/s, $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ kg/m³.

Odp. W porównaniu do zadania 3 mamy tu A zmienne. Siła N_a :

$$N_a = \int_{r_a}^{r_z} q dr = \int_{r_a}^{r_z} \rho \omega^2 \frac{A_w r_w^3}{r^3} r dr = \rho \bar{v}^2 A_w \left(\frac{r_w}{r_z} \right)^3 \left(\frac{r_z}{r_a} - 1 \right),$$

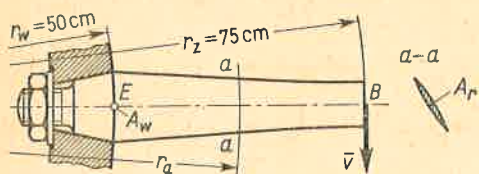
a naprężenia

$$\sigma_a = \frac{N_a}{A_a} = \rho \bar{v}^2 \left(\frac{r_a}{r_z} \right)^3 \left(\frac{r_z}{r_a} - 1 \right).$$

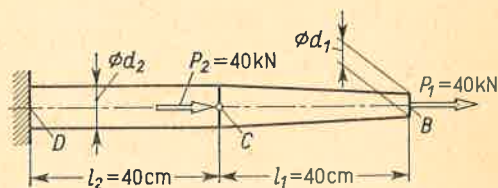
Dla danych jak w zadaniu 3 mamy w przekroju E , tj. dla $r_a = r_w$,

$$\sigma_{ekstr} = \sigma_k = 7,85 \cdot 10^3 \cdot 235^2 (2/3)^{3,0} \approx 64 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 64 \text{ MPa},$$

czyli prawie dwa razy mniej niż poprzednio. Jest to jasne, gdyż zmniejszając pole przekroju w kierunku od osi obrotu, redukujemy tym samym siłę N_a w porównaniu z prętem o stałym polu przekroju A_w .



Rys. 2.7.



Rys. 2.8.

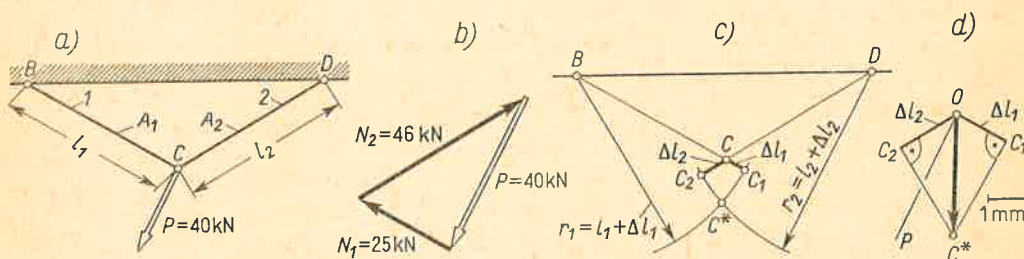
6. Walek (rys. 2.8) ma mieć stałą średnicę d_2 na odcinku DC i liniowo zmienną na odcinku CB . Dobrać te średnice (z dokładnością do 1 mm), aby wszędzie $\sigma \leq k_r$ ($k_r = 100 \text{ MPa}$) i wyznaczyć przemieszczenie punktu B , jeśli $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Odp. Na odcinku DC : $d_2 = \sqrt{4(P_1+P_2)/\pi k_r} = 3,19 \text{ cm} \approx 32 \text{ mm}$, w przekroju B : $d_1 = \sqrt{4P_1/\pi k_r} = 2,25 \text{ cm} \approx 23 \text{ mm}$. Przemieszczenie punktu C : $u_c = k_r l_2/E \approx 0,20 \text{ mm}$. Na odcinku CB pole A_x przekroju

$$A_x = \frac{\pi d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2 - d_1 l_1 - x_1}{d_1 l_1} \right)^2,$$

zatem wydłużenie względne $\epsilon = P_1/E A_x$ i po scałkowaniu (2.3)

$$u_B = u_C + \int_0^{l_1} \epsilon dx = u_C + (4P_1 l_1/\pi d_1 d_2 E) = 0,20 + 0,14 = 0,34 \text{ mm}.$$



Rys. 2.9. Wyznaczenie przemieszczeń węzła dwuprętowego kratownicy
Dane: $P = 40 \text{ kN}$, $l_1 = l_2 = 2 \text{ m}$, $A_1 = 2 \text{ cm}^2$, $A_2 = 3 \text{ cm}^2$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

7. Wyznaczyć naprężenia w prętach podanej kratownicy (rys. 2.9a) oraz określić przemieszczenie węzła C .

Rozwiązanie. Siły w prętach wyznaczamy metodą wykreślną, znaną z mechaniki ogólnej (rys. 2.9b). Są to $N_1 = 25 \text{ kN}$ i $N_2 = 40 \text{ kN}$. Obie są rozciągające. Naprężenia w prętach 1 i 2 są odpowiednio

$$\sigma_{(1)} = 25 \cdot 10^3 \text{ N} / 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 125 \text{ MPa}, \quad \sigma_{(2)} = 153 \text{ MPa},$$

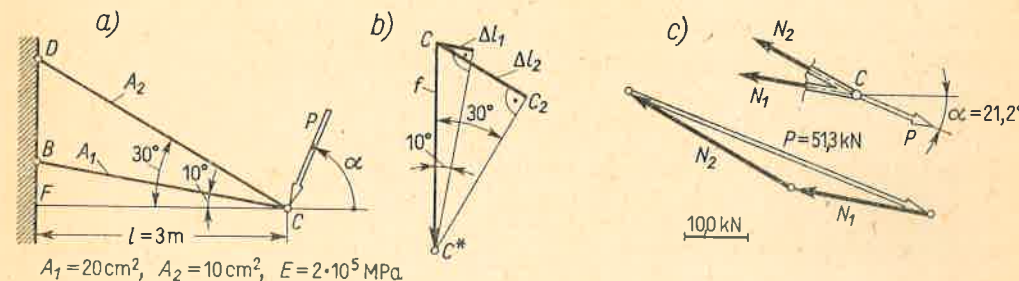
a wydłużenia prętów

$$\Delta l_1 = \sigma_{(1)} l_1/E = 1,25 \text{ mm}, \quad \Delta l_2 = \sigma_{(2)} l_2/E = 1,53 \text{ mm}.$$

Zmienione położenie węzła C , czyli C^* , otrzymujemy na obrazie kratownicy (rys. 2.9c) z przecięcia łuków zotoczonych z nieruchomych punktów B i D promieniami $r_1 = l_1 + \Delta l_1$ i $r_2 = l_2 + \Delta l_2$. Tę konstrukcję wykreślną narysowano w przesadzie. W rzeczywistości Δl_1 , Δl_2 oraz przemieszczenie węzła C , tj. odcinek CC^* , są bardzo małe w porównaniu do l_1 i l_2 . Uprawnia to do zastąpienia łuków C_1C^* oraz C_2C^* prostymi prostopadłymi odpowiednio do BC_1 i BC_2 . Dzięki temu można tę konstrukcję wykreślną (rys. 2.9d) odłączyć od rysunku kratownicy i wykonać ją w dużej skali, otrzymując szukane przemieszczenie $OC^* = CC^* = 2,8 \text{ mm}$ z zadowalającą dokładnością. Aby rezultat był prawidłowy, utożsamiamy w myśli punkt O z węzłem C kratownicy wyobrażając sobie jednocześnie, jaką pozycję względem punktu O zajmują pręty 1 i 2. Wydłużenia Δl_1 i Δl_2 odmierzamy w kierunku wyobrażonych prętów na zewnątrz, gdy pręty są rozciągane, lub do wewnątrz ich, gdy pręty są ściskane. Tak więc gdyby pręt 1 był ściskany, wówczas Δl_1 (skrócenie) odmierzylibyśmy od punktu O nie na prawo, jak na rys. 2.9d, lecz na lewo.

8. Jak zmienia się wyniki poprzedniego zadania, jeśli: a) wartość siły P zmaleje dwukrotnie; b) pola A_1 i A_2 przekrojów wzrosną dwukrotnie; c) tylko pole A_1 wzrośnie dwukrotnie?

Odp. a) wszystkie wielkości (N , σ , Δl oraz przemieszczenia węzła C) zmaleją dwukrotnie; b) dwukrotnie zmaleją σ , Δl oraz przemieszczenie węzła C , siły N zostaną bez zmiany; c) zmaleje dwukrotnie $\sigma_{(1)}$ oraz $\Delta l_1 = \overline{OC_1}$; to ostatnie spowoduje zmianę OC^* .



Rys. 2.10. Do zadania 9

9. Wyznaczyć wartość i kierunek działania siły P (rys. 2.10a), która w podanej kratownicy wywołuje pionowe przemieszczenie węzła C o wartości $f = 1 \text{ mm}$ w kierunku do dołu.

Rozwiązanie. Kreśląc obraz przemieszczeń (rys. 2.10b), na którym CC^* jest $f = 1 \text{ mm}$ wyznaczamy $\Delta l_1 = f \sin 10^\circ = 0,173 \text{ mm}$, $\Delta l_2 = f \sin 30^\circ = 0,500 \text{ mm}$, a stąd rozciągające siły:

$$N_1 = EA_1 \Delta l_1 / l_1 = 2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 0,173 \cdot 10^{-3} / 3,05 = 22,7 \text{ kN}, \quad N_2 = EA_2 \Delta l_2 / l_2 = 29,7 \text{ kN}.$$

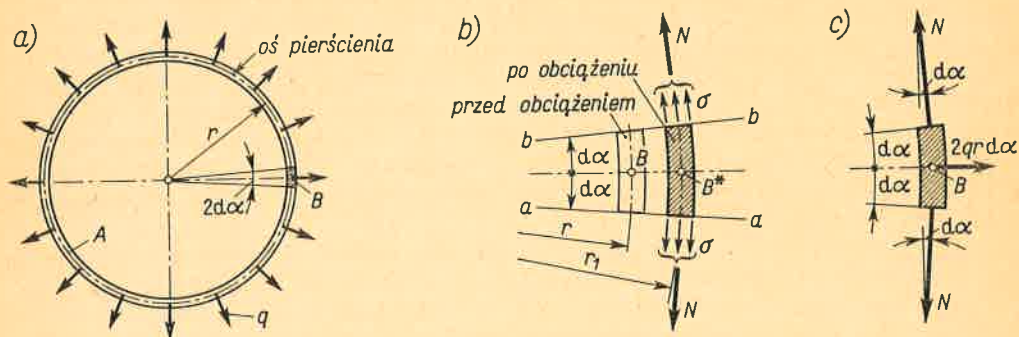
Badając teraz równowagę węzła C i kreśląc wielobok sił (rys. 2.10c) otrzymujemy $P = 51,3 \text{ kN}$, kąt $\alpha \approx 21,2^\circ$, a kierunek siły jest jak na rys. 2.10c.

2.3. Pierścień kołowy równomiernie obciążony

Omówione dotychczas przykłady dotyczyły prętów prostych. Rozciąganie występuje również w idealnie giętkich cięgnach, analizowanych w mechanice ogólnej (zagadnienie linii sznurowej).

Innym przykładem rozciągania pręta nie prostego, lecz zakrzywionego jest cienki pierścień kołowy o stałym przekroju pod równomiernym obciążeniem promieniowym $q \text{ N/m}$ (rys. 2.11a). Z racji punktowej symetrii pierścień zostaje po obciążeniu kołem o nieco

większym promieniu ($r_1 > r$). Każdy element pierścienia zachowując swój kształt (rys. 2.11b) wydłuży się w kierunku obwodowym. Jeżeli grubość pierścienia w kierunku promieniowym jest mała w porównaniu z promieniem r , to taka postać odkształcenia odpowiada rozciąganiu, przy którym istnieją naprężenia normalne do przekroju $a-a$. Ich wypadkowa $N = \sigma A$, czyli wysiłek przekroju $a-a$, jest styczna do koła w tym miejscu. To samo stwier-



Rys. 2.11. Analiza równomiernie obciążonego pierścienia ($A = \text{const}$)

dzimy o sile N działającej w przekroju $b-b$. Rozpatrując równowagę elementarnego odcinka (rys. 2.11c) i korzystając z reguły wymiarów początkowych, mamy równanie rzutów na kierunek promienia

$$-2N \sin d\alpha + 2qr d\alpha = 0,$$

z którego, przy $d\alpha \rightarrow 0$ i $\sin d\alpha \rightarrow d\alpha$, wynika, że

$$N = qr, \quad (2.4)$$

a wartość naprężeń normalnych

$$\sigma = N/A = qr/A. \quad (2.5)$$

Naprężeniom σ towarzyszy względne wydłużenie $\varepsilon = \sigma/E$ każdego elementu w kierunku obwodowym i zmiana promienia r o $\Delta r = r_1 - r$. Jest rzeczą jasną, że $\Delta r = r\varepsilon$, czyli

$$\Delta r = r\varepsilon = r\sigma/E = qr^2/EA. \quad (2.6)$$

Jednym z zastosowań wzorów (2.4)–(2.6) jest przypadek pierścienia wirującego w swej płaszczyźnie z prędkością kątową ω . Obciążenie q stanowią tu siły bezwładności (zadanie 3 art. 2.2). Jeśli gęstość właściwa materiału jest ρ , to masa pierścienia na jednostkę długości jest ρA , a przyspieszenie dośrodkowe $\omega^2 r$ i wtedy siła bezwładności

$$q = \rho A \omega^2 r. \quad (a)$$

Podstawiając wynik (a) do (2.5) i wprowadzając prędkość obwodową $\bar{v} = \omega r$ mamy

$$\sigma = \rho \bar{v}^2, \quad (2.7)$$

a ze wzoru (2.6) zwiększenie promienia

$$\Delta r = \rho \bar{v}^2 r/E. \quad (b)$$

Jak widać, naprężenia σ w wirującym pierścieniu zależą tylko od rodzaju materiału i kwadratu prędkości obwodowej. W nowoczesnych maszynach prędkości te są duże i naprężenia σ mogą mieć znaczne wartości.

Zadania

1. Pierścień stalowy (grubość $\delta = 1$ cm, szerokość $b = 5$ cm, promień $r = 25$ cm, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $R_c = 240$ MPa) obciążony jest na wewnętrznej powierzchni ciśnieniem $p = 4,0$ MPa. Wyznaczyć naprężenie i odkształcenie pierścienia oraz współczynnik bezpieczeństwa n_e .

Od p. Promień wewnętrzny $r_w = r - (\delta/2) = 24,5$ cm, wobec czego $q = pbr_w/r = 196$ kN/m, $A = b\delta = 5$ cm², $\sigma = qr/A = 98$ MPa, $\Delta r = \sigma r/E = 0,117$ mm, $n_e = R_c/\sigma = 2,45$.

2. Obliczyć wartość naprężeń w pierścieniu stalowym ($\rho = 7,8 \cdot 10^3$ kg/m³, $r = 20$ cm) wirującym z $\bar{n} = 7000$ obr/min.

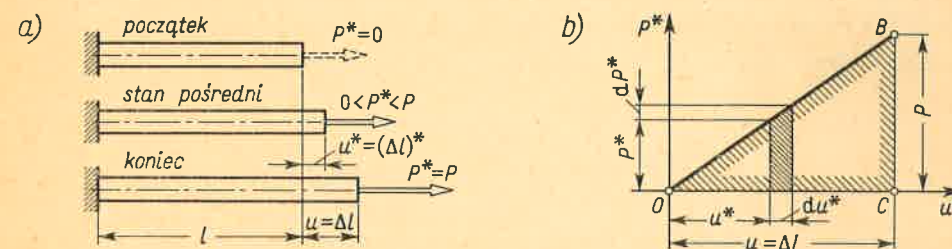
Od p. $\omega = \pi \bar{n}/30 = 734$ rad/s, $\bar{v} = \omega r = 147$ m/s, $\sigma = 168$ MPa.

3. W pierścieniu wirującym z $\bar{n} = 6000$ obr/min naprężenie $\sigma = 120$ MPa. Przy jakiej liczbie \bar{n}_1 obr/min nastąpi płynięcie materiału pierścienia, jeśli $R_c = 240$ MPa?

Od p. Osiągnięcie R_c nastąpi, gdy \bar{v} , a więc i \bar{n} , wzrośnie w stosunku $\sqrt{R_c/\sigma} = \sqrt{2} = 1,41$ razy, skąd $\bar{n}_1 = \bar{n} \sqrt{2} = 8500$ obr/min.

2.4. Energia odkształcenia przy rozciąganiu

Już w artykule 1.2 wprowadzono pojęcie energii odkształcenia. Obecnie prześledzimy to pojęcie na przykładzie rozciągania sprężystego pryzmatycznego pręta (rys. 2.12). Zakładamy, że proces obciążania, tj. wzrostu siły P^* od zera do końcowej wartości $P^* = P$, przebiega bardzo wolno. W takim, tzw. *quasi-statycznym*, procesie prędkości cząstek ciała



Rys. 2.12. Praca obciążenia przy rozciąganiu

są bardzo małe, ich kinetyczna energia jest pomijalna, a chwilowe przemieszczenie u^* swobodnego końca pręta jest równe wydłużeniu $(\Delta l)^*$ pręta przy statycznym działaniu siły P^* . Zgodnie więc z wzorem (1.7) mamy zależność

$$u^* = (\Delta l)^* = P^* l/EA, \quad (a)$$

której obrazem $P^* = f(u^*)$ jest linia prosta (rys. 2.12b).

Obliczmy teraz pracę, jaką wykonała siła P^* w całym procesie obciążenia. Wzrostowi siły z wartości P^* do $P^* + dP^*$ odpowiada przyrost du^* , a elementarna praca dL siły P^*

$$dL = P^* du^*, \quad (b)$$

czyli równa jest polu zakreskowanemu na rys. 2.12b. Całkowita praca L jest sumą takich

elementarnych prac i równa się polu trójkąta OBC lub inaczej

$$L = \frac{1}{2} Pu = \frac{1}{2} P \Delta l, \quad (c)$$

gdzie P i Δl oznaczają odpowiadające sobie końcowe wartości siły i wydłużenia. Praca ta mierzona jest w niutonometrach, czyli dżulach ($1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}$). Przy założonym quasi-statycznym procesie zamienia się ona całkowicie na energię potencjalną U cząstek ciała związaną ze zmianą ich wzajemnych odległości, tj.

$$U = L = \frac{1}{2} P \Delta l \text{ J.} \quad (2.8)$$

Wykorzystując wzór (a) możemy energię U wyrazić

$$U = P^2 l / 2EA \quad \text{lub} \quad U = (\Delta l)^2 EA / 2l, \quad (2.9)$$

tj. jako funkcję samej tylko siły obciążającej P bądź samego tylko wydłużenia Δl . Energia ta jest kwadratową funkcją P lub Δl , nie zależy zatem od ich znaku (rozciąganie czy ściskanie) i jest zawsze dodatnia, gdy $P \neq 0$. Z kolei nieliniowość zależności $U(P)$ powoduje, że energia odkształcenia nie podlega zasadzie superpozycji. Innymi słowy energia U przy jednoczesnym działaniu dwóch obciążeń P_1 i P_2 nie jest równa sumie energii U_1 i U_2 odpowiadających oddzielnemu działaniu tych obciążeń. Od tego stwierdzenia istnieją wyjątki, wymagające jednak za każdym razem szczegółowego uzasadnienia.

Przy rozciąganiu pryzmatycznego pręta jego elementy są w jednakowych warunkach, wobec czego w jednostce objętości ilość energii $U' = U/Al$ (w dżulach na m^3 , J/m^3). Wielkość U' , tzw. właściwa energia odkształcenia, jest miarą poziomu energetycznego jednostki objętości materiału. Wykorzystując wzór (2.9) mamy

$$U' = \frac{P^2}{2EA^2} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (2.10)$$

lub

$$U' = \frac{E}{2} \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 = \frac{E \epsilon^2}{2}. \quad (2.11)$$

Podobnie określamy wielkość

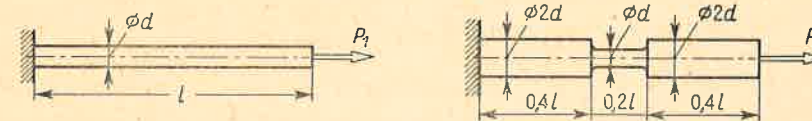
$$U'' = U/Al \rho = U'/\rho \quad (2.12)$$

jako miarę poziomu energetycznego jednostki masy materiału przy rozciąganiu. Zastosowanie pojęć U' i U'' jest różnorakie. Jednym z nich jest ocena materiału z uwagi na możliwość akumulowania energii, jeśli za σ podstawić nieprzekraczalną ze względów użytkowych wartość granicy sprężystości, czyli $\sigma = \sigma_{spr}$.

Przy odciążaniu kolejność zjawisk jest odwrotna. Początek procesu odpowiada punktowi B , koniec punktowi O wykresu $P^* = f(u^*)$ (rys. 2.12b). Dla materiału sprężystego jest to ta sama prosta BO . Tak więc ilość pracy oddana na zewnątrz przy odciążaniu jest równa pracy włożonej w procesie obciążania, czyli że w zakresie sprężystości materiału przemiany energetyczne są całkowicie odwracalne. Nie uwzględniamy przy tym dodatkowych, zresztą bardzo małych, efektów wymiany ciepła z otoczeniem.

Zadania

- Wyznaczyć ilość energii U w duralowym pręcie (rys. 2.12a), jeśli $P = 100 \text{ kN}$, $l = 30 \text{ cm}$, $A = 20 \text{ cm}^2$, $E = 7,0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.
Odp. $U = (100 \cdot 10^3 \text{ N})^2 \cdot (0,3 \text{ m}) / 2 (7,0 \cdot 10^{10} \text{ N}/\text{m}^2) (20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) = 10,7 \text{ Nm} = 10,7 \text{ J}$.
- Obliczyć ilość energii U w pierścieniu (rys. 2.11), jeśli $r = 20 \text{ cm}$, $A = 2 \text{ cm}^2$, $q = 20 \text{ kN}/\text{m}$, $E = 7,0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.
Odp. $U = \pi q^2 r^3 / EA \approx 0,72 \text{ Nm} = 0,72 \text{ J}$.
- Porównać zdolność akumulowania energii w stali sprężynowej ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_{spr} = 800 \text{ MPa}$, $\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$) i w gumie ($E = 1,5 \text{ MPa}$, $\sigma_{spr} = 2 \text{ MPa}$, $\rho = 0,95 \cdot 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$).
Odp. $U'_{stal} = 204 \text{ J}/\text{kg}$, $U'_{guma} = 1400 \text{ J}/\text{kg}$, a więc guma jest około 7 razy lepsza niż bardzo dobra stal.



Rys. 2.13. Wpływ kształtu pręta na zdolność akumulowania energii

- Dwa pręty wykonane z jednakowego materiału: gładki i stopniowany (rys. 2.13) mają pochłonąć tę samą energię U . Zakładając dla prostoty równomierność rozkładów σ w przekrojach pręta stopniowanego orzec, który z prętów jest bezpieczniejszy?

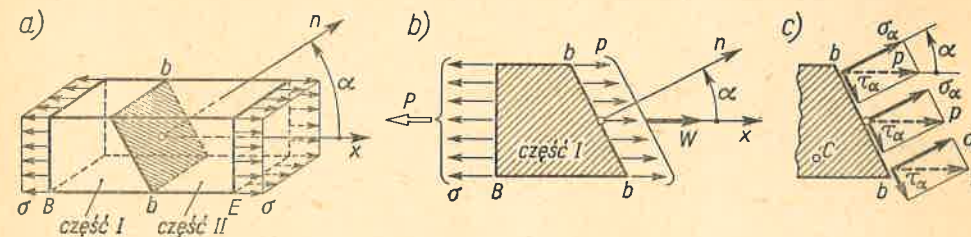
Odp. W pręcie gładkim: $U_1 = P_1^2 l / 2EA$, w stopniowanym:

$$U_2 = 2 (P_2^2 \cdot 0,4 l / 2E \cdot 4A) + (P_2^2 \cdot 0,2 l / 2EA) = 0,4 (P_2^2 l / 2EA).$$

Gdy $U_1 = U_2$, wówczas $P_2 \sqrt{0,4} = P_1$ i $P_2 = 1,58 P_1$. W przewężeniu pręta stopniowanego $\sigma_2 = P_2 / A = 1,58 (P_1 / A)$, czyli σ_2 są większe niż $\sigma_1 = P_1 / A$ w pręcie gładkim. Tak więc gdy U jest to samo, pręt stopniowany jest gorszy od gładkiego.

2.5. Stan napięcia i odkształcenia przy rozciąganiu

Nawiązując do wprowadzonych w art. 1.5 i 1.6 pojęć stanu napięcia i odkształcenia zbadamy je dokładniej w przypadku rozciągania. W tym celu wyznaczmy najpierw na-



Rys. 2.14. Naprężenia w ukośnym przekroju rozciągniętego pręta

prężenia w ukośnym przekroju $b-b$ (rys. 2.14a). Jego położenie w badanej części I określamy kątem α między osią x pręta a normalną n zewnętrzną dla tej części I . Wypadkowe naprężenia p (rys. 2.14b) są rozłożone równomiernie, gdyż wszystkie wzdłużne włókna pręta

znajdują się w identycznych warunkach. Ponadto naprężenia p muszą być równoległe do osi x , gdyż tylko wtedy badana część I może być w równowadze. Ich wypadkowa W jest

$$W = pA_\alpha = pA/\cos \alpha, \quad (a)$$

gdzie $A_\alpha = A/\cos \alpha$ — pole przekroju $b-b$. Z równowagi części I wynika, że $W - P = 0$. Po wykorzystaniu (a) i uwzględnieniu, że $\sigma = P/A$ jest naprężeniem w przekroju poprzecznym B , mamy

$$p = P \cos \alpha / A = \sigma \cos \alpha. \quad (b)$$

Rozkładając to wypadkowe naprężenie na normalne σ_α i styczne τ_α (rys. 2.14c) mamy

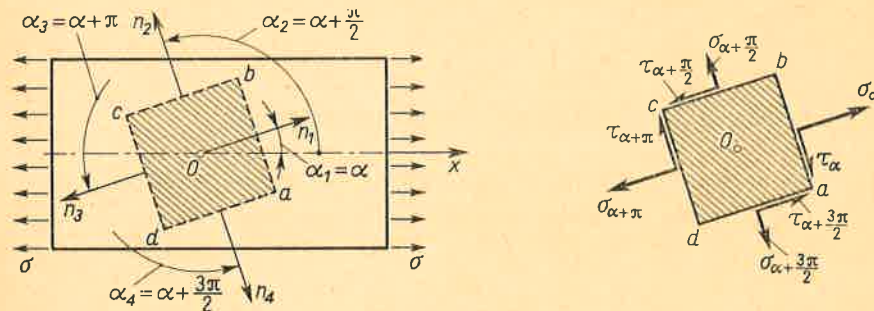
$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \quad (2.13)$$

$$\tau_\alpha = p \sin \alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha. \quad (2.14)$$

Te same wyniki otrzymamy w przypadku ściskania, gdy $\sigma < 0$. Ujemne wartości σ_α i τ_α oznaczają zwroty przeciwne⁽¹⁾ niż na rys. 2.14c. Aby ułatwić orientację w znakach, zauważmy, że σ_α jest dodatnie, gdy działa na zewnątrz rozpatrywanej części I . Naprężenie τ_α jest dodatnie, gdy daje ono współzegarowy⁽²⁾ obrót rozpatrywanej części.

Pokazane na rys. 2.14 przecięcie $b-b$ jest jednokrotne. Równie dobrze można w tym samym pręcie prowadzić przecięcia wielokrotne. Prowadząc na przykład w pręcie cztery różne przekroje $a-b$, $b-c$, $c-d$, $d-a$ odpowiadające kątom $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha + (\pi/2)$, ... wycinamy z pręta prostokątną kostkę (rys. 2.15). Z wzorów (2.13) i (2.14) po podstawieniu kolejno $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ wynika, że

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha+\pi} = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \sigma_{\alpha+(\pi/2)} = \sigma_{\alpha+(3\pi/2)} = \sigma \sin^2 \alpha, \quad (c)$$



Rys. 2.15. Przykład przecięcia wielokrotnego (wycięcie kostki)

a naprężenia styczne na prostopadłych do siebie ścianach

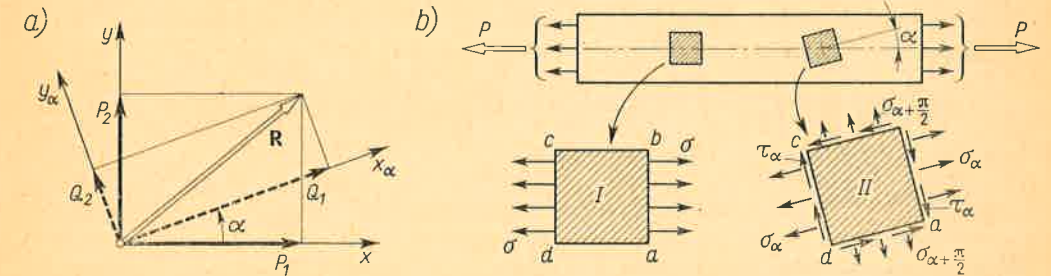
$$\tau_\alpha = -\tau_{\alpha+(\pi/2)} = \tau_{\alpha+\pi} = -\tau_{\alpha+(3\pi/2)} = \sigma \sin \alpha \cos \alpha \quad (d)$$

⁽¹⁾ Sens symbolu σ jest dwojaki. Na rysunku 2.14a, b przedstawia on i obraz, i wartość naprężenia. We wzorach (2.13) i (2.14) symbol σ oznacza tylko konkretną wartość, podczas gdy obraz naprężenia jest jak na rys. 2.14c.

⁽²⁾ W podręczniku tym zamiast używanego dotychczas określenia: „kierunek zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara” używa się umownie skrótu „współzegarowy” i podobnie „przeciwzegarowy” zamiast „kierunek przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara”.

mają dla każdego kąta α jednakowe bezwzględne wartości. Wynik ten jest słuszny dla każdego stanu naprężenia nie tylko rozciągania i nosi nazwę zasady symetrii naprężeń stycznych.

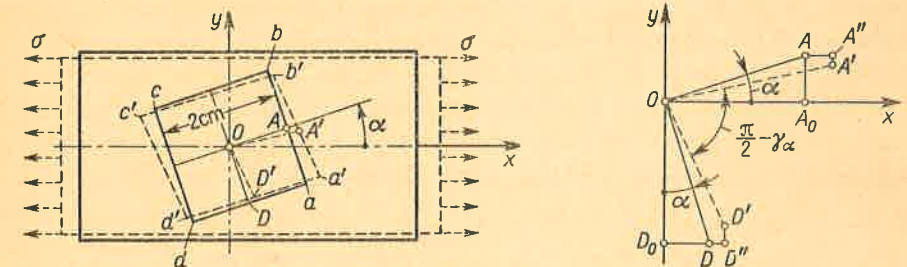
Fizyczny sens tych rozważań łatwo zrozumieć przez analogię do przedstawienia jakiegoś wektora \mathbf{R} w różnych układach współrzędnych (rys. 2.16a). W układzie x, y składowe wektora są P_1 i P_2 , w układzie x_α, y_α są to Q_1 i Q_2 różne od poprzednich, sam jednak wektor \mathbf{R} nie zmienia się. Ten właśnie sens mają podane tu przekształcenia. I tak dwóm różnym wycięciom kostek z tego samego pręta (rys. 2.16b) odpowiadają różne



Rys. 2.16. Analogia zagadnień: rozkład wektora i analiza stanu naprężenia

obrazy naprężeń, jeden prostszy (kostka I), drugi bardziej złożony (kostka II). Stan naprężenia materiału zostaje ten sam, jest tylko inaczej przedstawiony. Tę tożsamość stanu w obydwóch obrazach (analogia do wektora \mathbf{R}) uwidaczniamy nazywając każdy z nich stanem prostego rozciągania. Jest oczywiste, że tożsamość ta istnieje tylko wtedy, gdy σ, σ_α i τ_α spełniają zależności (2.13) i (2.14) (patrz także zadania 3 i 4).

Pokazana analogia nie oznacza, że stan napięcia jest wektorem. Gdyby tak było, wypadkowa z σ_α i τ_α , czyli naprężenie p , nie zależałoby od ustawienia przekroju, czyli kąta α . Wzór (b) przeczy temu przypuszczeniu. Wynika stąd, że stan napięcia nie jest wektorem i że sumowanie, rozkład lub superpozycję naprężeń można wykonywać tylko wtedy, gdy działają one w jednym ustalonym przekroju.



Rys. 2.17. Stan odkształcenia przy rozciąganiu

Zbadajmy obecnie obraz odkształceń kostki $abcd$ (rys. 2.17). Dla prostoty rozważań przyjmujemy, że jest ona kwadratem o boku 2 cm i że jej środek O jest nieruchomy. Określmy przemieszczenia punktów A i D , będących środkami boków. Jak wiemy z art. 1.7, elementy wzdłużne doznają wydłużenia ϵ , a poprzeczne skrócenia $-\nu\epsilon$. Ponieważ rzuty

ukośnego elementu OA na osie x i y są odpowiednio $OA_0 = 1 \cdot \cos \alpha$ i $A_0A = 1 \cdot \sin \alpha$, zatem punkt A dozna poziomego przemieszczenia $AA'' = 1 \cdot \varepsilon \cos \alpha$ i pionowego $A''A' = -1 \cdot \nu \varepsilon \sin \alpha$. Zmienione po odkształceniu rzuty odcinka OA na osie x i y są odpowiednio

$$x_A = (1 + \varepsilon) \cos \alpha, \quad y_A = (1 - \nu \varepsilon) \sin \alpha. \quad (e)$$

Podobnie znajdujemy zmienione po odkształceniu rzuty odcinka OD

$$x_D = (1 + \varepsilon) \sin \alpha, \quad y_D = -(1 - \nu \varepsilon) \cos \alpha, \quad (f)$$

przy czym $y_D < 0$, gdyż i pierwotny rzut $OD_0 = -1 \cdot \cos \alpha < 0$. Z zależności (e) i (f) wyznaczamy⁽¹⁾ zmienione długości $\overline{OA'}$ i $\overline{OD'}$. I tak

$$\overline{OA'} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \approx \sqrt{1 + 2\varepsilon(\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha)} \approx 1 + \varepsilon(\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha),$$

a względne wydłużenie ε_α w kierunku OA

$$\varepsilon_\alpha = (\overline{OA'} - \overline{OA}) / \overline{OA} = \varepsilon(\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha). \quad (g)$$

Podobne przekształcenia dla odcinka $\overline{OD'}$ dają

$$\varepsilon_{\alpha - \frac{\pi}{2}} = (\overline{OD'} - \overline{OD}) / \overline{OD} = \varepsilon(\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha) \quad (h)$$

jako wartość wydłużenia względnego w kierunku OD . Na koniec określamy kąt $A'OD'$ z iloczynu skalarnego wektorów OA' i OD'

$$\cos \sphericalangle A'OD' = x_A x_D + y_A y_D = [(1 + \varepsilon)^2 - (1 - \nu \varepsilon)^2] \sin \alpha \cos \alpha. \quad (i)$$

W rzeczywistości kąt $A'OD'$ różni się tylko o bardzo mały kąt γ_α od kąta prostego $\pi/2$, wobec czego $\cos \sphericalangle A'OD' = \cos [(\pi/2) - \gamma_\alpha] = \sin \gamma_\alpha \approx \gamma_\alpha$. Uwzględniając to otrzymujemy z wyrażenia (i)

$$\gamma_\alpha = 2(1 + \nu) \varepsilon \sin \alpha \cos \alpha, \quad (j)$$

przy czym pominięto, jak poprzednio, wielkość ε^2 w stosunku do ε . Wprowadzony tu kąt γ_α jest znanym już z art. 1.6 kątem odkształcenia postaciowego. Świadczy to, że badana kostka $abcd$ zamienia się w równoległoboczną $a'b'c'd'$.

Zależności (g), (h) oraz (j) sformułowano wyłącznie z zależności geometrycznych. Należy jednak pamiętać, że przyczyną odkształceń jest rozciąganie naprężeniami σ . Aby uwidocznić ten przyczynowy związek, należy w tych zależnościach podstawić $\varepsilon = \sigma/E$. W szczególności zależność (j) przybiera wtedy postać

$$\gamma_\alpha = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma \sin \alpha \cos \alpha. \quad (2.15)$$

Jak widać, kąt γ_α jest proporcjonalny do naprężenia τ_α (wzór d). Kwestię tę zbadamy dokładniej w art. 3.1.

⁽¹⁾ Uwzględniając przy tym, że ε jest małe (rzędu $0/100$), pomijamy ε^2 w stosunku do ε . Ponadto korzystamy z przybliżenia

$$\sqrt{1+a} \approx 1 + (a/2), \quad \text{gdy } a \ll 1.$$

Zadania

1. W pręcie (rys. 2.14a) $\sigma = 100$ MPa. Wyznaczyć i narysować składowe naprężenia σ_α i τ_α w przekrojach, gdy: $\alpha_1 = -\pi/6 = -30^\circ$, $\alpha_2 = \pi/3 = 60^\circ$. Sprawdzić słuszność zasady symetrii τ .

Odp. $\sigma_{-30^\circ} = 75$ MPa, $\sigma_{60^\circ} = 25$ MPa, $\tau_{-30^\circ} = -43,3$ MPa = $-\tau_{60^\circ}$.

2. W pręcie (rys. 2.14a) $\sigma = -120$ MPa (ściskanie). Wyznaczyć ustawienie przekroju, w którym: a) $\sigma_\alpha = -30$ MPa, b) $\tau_\alpha = 30$ MPa.

Odp. a) $\alpha = \pm 60^\circ$, $\pm 120^\circ$; b) $\alpha = -15^\circ$, -75° , 105° , 165° .

3. Na bokach ab i cd kostki II (rys. 2.16b) działają $\sigma' = 80$ MPa, na bokach bc i da zaś $\sigma'' = 20$ MPa, na wszystkich bokach $\tau = 40$ MPa skierowane jak na rysunku. Czy to jest stan prostego rozciągania?

Rozwiązanie. Przypuścimy, że tak jest. Wtedy σ' , σ'' oraz τ muszą spełniać równania (2.13) i (2.14). Nieświadomymi są: σ i α . Ponieważ boki ab i bc są prostopadłe do siebie, zatem z wzorów (c) mamy

$$\sigma_\alpha = \sigma' = 80 \text{ MPa} = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \sigma_{\alpha + (\pi/2)} = \sigma'' = 20 \text{ MPa} = \sigma \sin^2 \alpha,$$

skąd

$$\text{tg } \alpha = \pm \sqrt{\sigma''/\sigma'} = \pm 0,5, \quad \cos^2 \alpha = 1/(1 + \text{tg}^2 \alpha) = 0,8, \quad \sigma = 100 \text{ MPa}.$$

Sprawdźmy teraz zależność (2.14). Gdy $\text{tg } \alpha = 0,5$, $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$, $\sin \alpha = 1/\sqrt{5}$ i wtedy dane $\tau = 40$ MPa ma być równe $\tau_\alpha = 100 \cdot (1/\sqrt{5}) \cdot (2/\sqrt{5}) = 40$ MPa, co, jak widać, ma miejsce. Wartość α , gdy $\text{tg } \alpha = -0,5$, nie spełnia równania (2.14), bo dane $\tau > 0$, a $\tau_\alpha < 0$. Badany stan jest więc stanem prostego rozciągania, gdy $\sigma = 100$ MPa, $\alpha = \text{arc tg } 0,5 \approx 26,6^\circ$.

4. Jeśliby na kostkę z zadania poprzedniego działały naprężenia $\sigma'' = -20$ MPa (ściskanie) przy innych danych nie zmienionych, to czy taki stan byłby stanem prostego rozciągania?

Odp. Nie, gdyż $\text{tg } \alpha$ miałby wtedy wartość urojoną.

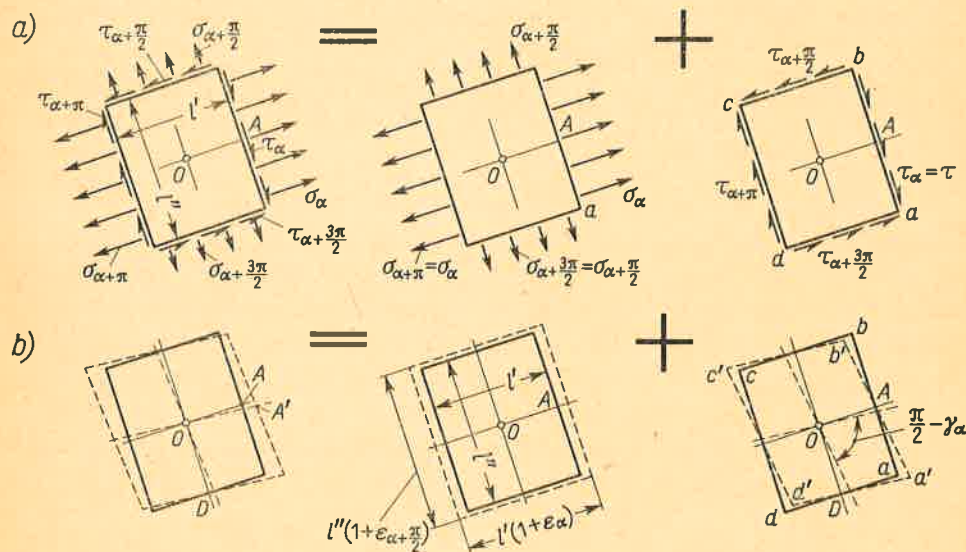
5. Wyznaczyć względne wydłużenie i kąt odkształcenia postaciowego kostki $abcd$ (rys. 2.17), gdy $\alpha = \pi/6 = 30^\circ$, $\nu = 0,3$, $\varepsilon = 0,70/100$.

Odp. W kierunku OA : $\varepsilon_\alpha = 0,7 \cdot 10^{-3} (0,75 - 0,3 \cdot 0,25) = 0,47 \cdot 10^{-3} = 0,470/100$; w kierunku OD : $\varepsilon_{\alpha - (\pi/2)} = 0,017 \cdot 10^{-3} = 0,0170/100$; kąt $\gamma_\alpha = 0,79 \cdot 10^{-3}$ rad.

3 SKRĘCANIE PRĘTÓW

3.1. Stan czystego ścinania

Badając stan rozciągania otrzymaliśmy na bokach myślowo wyciętej kostki (rys. 2.15 i 2.17) złożone obrazy naprężeń i odkształceń. Obrazy te uprościmy przez ich rozkład na stany prostsze. I tak układ naprężeń (rys. 3.1a) jest superpozycją dwóch składników. Pierwszy z nich to rozciąganie kostki w dwóch prostopadłych kierunkach naprężeniami $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha+\pi}$ i $\sigma_{\alpha+(\pi/2)} = \sigma_{\alpha+(3\pi/2)}$. Drugi stan, tzw. *czystego ścinania*, to działanie samych naprężeń stycznych równych co do wartości, równomiernie rozłożonych na bokach i parami skierowanych do wspólnej krawędzi, tj. a i c , albo od niej, tj. b i d . Po takim omówieniu, do opisanego tego stanu wystarczy podanie wartości naprężeń τ działających tylko na jednym boku, np. ab .



Rys. 3.1. Wyodrębnienie stanu czystego ścinania i odkształcenia postaciowego

Obecnie zbadamy właściwości stanu czystego ścinania, gdy istnieje on oddzielnie od pozostałych. Przede wszystkim stwierdzamy, że kostka jest w równowadze, gdyż od razu widać, że sumy rzutów na kierunki cd i da są tożsamościowo równe zeru, i podobnie suma

momentów względem krawędzi d

$$(\tau_\alpha l'' h) l' - (\tau_{\alpha+(\pi/2)} l' h) l'' = \tau h (l' l' - l' l'') \equiv 0,$$

gdzie h — wysokość kostki prostopadłe do płaszczyzny rysunku.

Analogicznie rozkładamy obraz odkształceń (rys. 3.1b) na dwa składniki. Pierwszy z nich cechuje się zmianą wymiarów z zachowaniem kątów prostych w narożach kostki. W stanie drugim, tzw. *czystego odkształcenia postaciowego*, zachodzi tylko zmiana prostego kąta AOD bez zmiany wymiarów. Zauważmy teraz, że między składnikami naprężeń i odkształceń istnieje korelacja. Wynika ona z zasady superpozycji, a mianowicie że skutek (odkształcenie) jest proporcjonalny do przyczyny (naprężenia) zawsze, a więc niezależnie od sposobu wycięcia kostki, czyli kąta α . Taką proporcjonalność obserwujemy między kątem γ_α i τ_α (wzór 2.15). Podobnie łatwo dowieść istnienia liniowej zależności między ϵ_α i $\epsilon_{\alpha+(\pi/2)}$ (wzory g i h art. 2.5) a naprężeniami σ_α i $\sigma_{\alpha+(\pi/2)}$ (wzory c art. 2.5). Natomiast przy powiązaniu składników obrazu naprężeń i odkształceń „na krzyż” tej proporcjonalności nie ma. W rezultacie otrzymujemy, że za zmianę wymiarów liniowych odpowiedzialny jest układ σ_α i $\sigma_{\alpha+(\pi/2)}$, a za *czyste odkształcenie postaciowe odpowiedzialny jest tylko drugi układ, czyli stan czystego ścinania*.

Ten ogólny związek wielkości τ_α i γ_α uwidaczniamy, opuszczając w (2.15) wskaźnik α . W rezultacie mamy

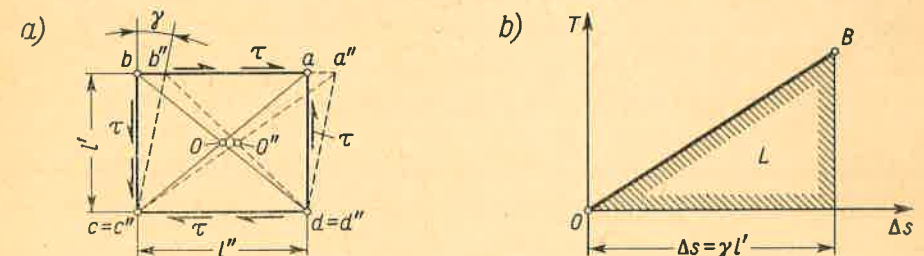
$$\gamma = \frac{2\tau(1+\nu)}{E} = \frac{\tau}{G}, \quad (3.1)$$

gdzie G oznacza tzw. *moduł sprężystości postaciowej*,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.2)$$

Jak widać, moduł G jest związany z modułem Younga E i liczbą Poissona ν . Jeśli więc znane są dwie z tych wielkości, to trzecia jest już znana z zależności (3.2).

Wzór (3.1) ma postać i fizyczny sens podobne do prawa Hooke'a przy rozciąganiu. Z tego powodu nazywamy go *prawem Hooke'a przy ścinaniu*, w którym dwie wielkości, tj. τ i γ , nie wiążą się już z prętem, lecz elementarną kostką. Sposób unieruchomienia



Rys. 3.2. Parametry stanu czystego ścinania

kostki, jako sztywnej całości, jest rzeczą obojętną. Zamiast rysować ją, jak na rys. 3.1b, możemy przedstawić w ten sposób, że bok cd zostaje nieruchomy, środek O przesuwa się do O'' , a przekątne db i ca zajmują położenie db'' i ca'' (rys. 3.2a). Widać, że przesunięcie O'' do O i obrót kostki, jako sztywnej całości, daje obraz poprzedni (rys. 3.1b).

Wykorzystując zależność (3.1) określimy energię odkształcenia w stanie czystego ścinania kostki (rys. 3.2a) o wymiarach l' , l'' oraz wysokości h . Jeśli τ stopniowo wzrasta, to proporcjonalnie rosną siła $T = \tau l'' h$ na ścianie ab oraz przesunięcie $\Delta s = aa' \approx \gamma l' = \tau l' / G$ tej ściany, a wykres $T(\Delta s)$ jest linią prostą (rys. 3.2b), łatwo zauważyć, że tylko ta siła wykonuje pracę, albowiem bok cd jest nieruchomy, a na bokach bc i da przesunięcia są z dokładnością do małych wyższego rzędu prostopadłe do odpowiednich sił. Ta praca L , podobnie jak w przypadku rozciągania (rys. 2.12), jest równa polu OBC , czyli

$$L = \frac{1}{2} T \Delta s = \tau^2 l' l'' h / 2G.$$

Ponieważ materiał jest sprężysty, zatem praca ta zamienia się całkowicie na potencjalną energię odkształcenia U , skąd

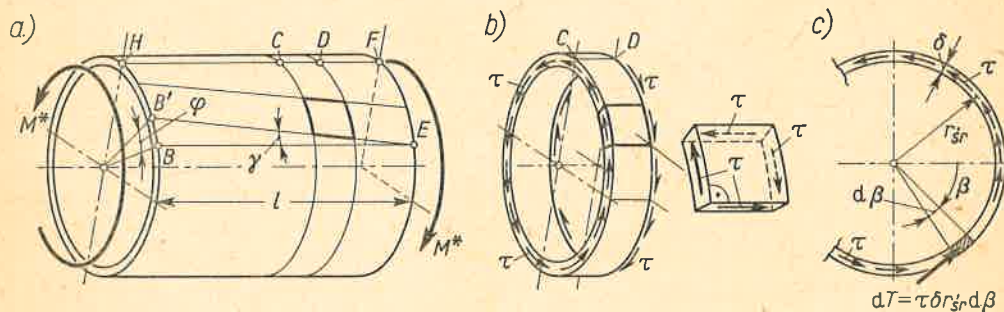
$$U = L = \tau^2 l' l'' h / 2G. \quad (3.3)$$

Przez analogię do rozciągania, wprowadzamy pojęcie właściwej energii odkształcenia U' w stanie czystego ścinania, czyli

$$U' = U / l' l'' h = \tau^2 / 2G \quad \text{lub} \quad U' = G \gamma^2 / 2. \quad (3.4)$$

Z pojęcia tego będziemy korzystać w dalszych rozważaniach.

W powyższych rozważaniach stan czystego ścinania wyodrębniono jako składnik innego stanu (rys. 3.1). Powstaje pytanie, czy można zrealizować stan czystego ścinania bez innych składników? Odpowiedź na to jest twierdząca. Jeden ze sposobów (rys. 3.3a) polega na obciążeniu cienkościennej kołowej rury przeciwnymi momentami M^* . W obranym przekroju C działają naprężenia styczne τ , stałe⁽¹⁾ wzdłuż grubości δ i z racji osiowej



Rys. 3.3. Typowa realizacja stanu czystego ścinania

symetrii jednakowe na całym obwodzie. Ich wartość określamy z równowagi myślowo odciętej części CF rury. Elementarna siła $dT = \tau \delta r_{sr} d\beta$ (rys. 3.3c) daje względem środka moment: $dT r_{sr} = \tau \delta r_{sr}^2 d\beta$. Całkowity moment wszystkich takich sił

$$\int_0^{2\pi} \tau \delta r_{sr}^2 d\beta = \tau 2\pi \delta r_{sr}^2$$

⁽¹⁾ Dokładność tego założenia jest tym lepsza, im mniejszy jest stosunek δ/r_{sr} (zadanie 1 art. 3.3). Zbytne jednak zmniejszenie stosunku δ/r_{sr} jest niemożliwe, z uwagi na zjawisko utraty stateczności (rozd. 15).

równoważy moment M^* działający w przekroju F , skąd

$$\tau = \frac{M^*}{2\pi r_{sr}^2 \delta}. \quad (3.5)$$

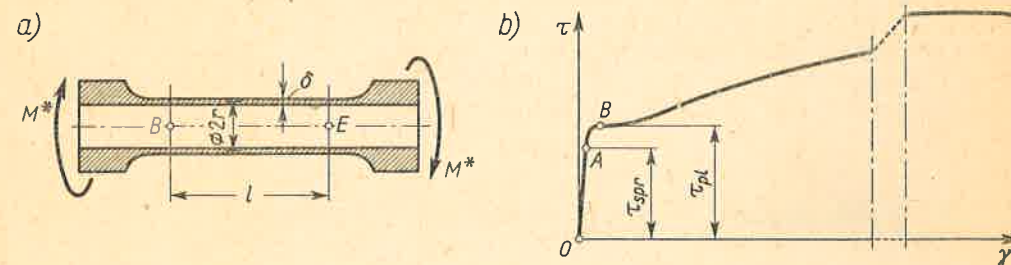
Ten sam wynik otrzymamy badając naprężenia w przekroju D dla części HD rury. Obraz naprężeń działających na pierścień CD i na wycięty z niego element (rys. 3.3b) wykazuje, że mamy tu czyste ścinanie. Element ten oraz wszystkie inne ulegają skoszeniu o kąt γ , a tworząca BE staje się linią śrubową $B'E$. Dla całej rury oznacza to obrót przekroju B względem przekroju E o kąt φ określony zależnością

$$\varphi r_{sr} = BB' = \gamma l,$$

skąd

$$\varphi = \gamma l / r_{sr}. \quad (3.6)$$

Zależności (3.5) i (3.6) umożliwiają doświadczalne określenie przebiegu $\tau(\gamma)$. Działając na osiowosymetryczną próbkę (rys. 3.4a) wzrastającymi momentami M^* mierzymy odpowiadające im wartości kąta φ na pomiarowej długości l . Wstawiając te wyniki pomiarów do (3.5) i (3.6) wyznaczamy odpowiadające sobie wartości τ i γ . Otrzymany w ten sposób wykres (rys. 3.4b) wykazuje duże podobieństwo do wykresu rozciągania tego samego



Rys. 3.4. Wykres naprężeń τ w funkcji γ

materiału. I tak liniową zależność $\tau(\gamma)$ wyrażoną prawem Hooke'a (3.1) obserwuje się tylko do pewnej wartości $\tau = \tau_{prop}$, tzw. *granicy proporcjonalności przy czystym ścinaniu*. Podobnie jak przy rozciąganiu, można wprowadzić pojęcia granic: sprężystości τ_{spr} , plastyczności τ_{pl} itd. Okazuje się zarówno z teorii plastyczności jak i badań doświadczalnych, że wszystkie te wielkości są ściśle związane z wielkościami charakterystycznymi dla rozciągania. Tak na przykład dla metali stosunek τ_{prop} , τ_{spr} , τ_{pl} odpowiednio do σ_{prop} , σ_{spr} , R_e jest stały i równy $\sim 0,58$, tzn.

$$\tau_{prop} / \sigma_{prop} = \tau_{spr} / \sigma_{spr} = \tau_{pl} / R_e \approx 0,58. \quad (3.7)$$

Informację (3.7) wykorzystamy do określenia dopuszczalnych naprężeń. Jeśli wymagany współczynnik bezpieczeństwa w odniesieniu do τ_{pl} ma być równy n_e , to *dopuszczalne naprężenie styczne* $\tau = k_t$ w stanie czystego ścinania jest

$$k_t = \tau_{pl} / n_e \approx 0,58 R_e / n_e = 0,58 k_r, \quad (3.8)$$

gdzie $k_r = R_e / n_e$ jest to dopuszczalne naprężenie przy rozciąganiu. Bardziej ogólne ujęcie tej kwestii podano w rozdz. 8.

Zadania

1. W kostce (rys. 3.2a), w której $l' = l'' = 10$ cm, zmierzono przemieszczenie $\Delta s = \overline{bb''} = 0,192$ mm wywołane naprężeniami $\tau = 51$ MPa. Jaki jest moduł G materiału i jaka liczba Poissona, jeśli $E = 7,0 \cdot 10^4$ MPa?

Odp. $\gamma \approx \overline{bb''}/bc = \Delta s/l' = 1,92 \cdot 10^{-3}$ rad, $G = \tau/\gamma = 2,66 \cdot 10^4$ MPa, $\nu = (E/2G) - 1 = 0,32$.

2. W jednej z książek podano dla uranu: $E = 1,9 \cdot 10^6$ kG/cm², $G = 0,5 \cdot 10^6$ kG/cm², $\nu = 0,28$. Czy tym danym można wierzyć?

Odp. Nie. Według (1.11b): $0 < \nu < 0,5$. Dla tych granicznych wartości ν mamy z wzoru (3.2), że $0,33 < (G/E) < 0,50$, tymczasem tutaj $G/E \approx 0,26$. Jeśli zawierzyć, że E i ν są podane prawidłowo, to $G = 0,74 \cdot 10^6$ kG/cm² = $0,72 \cdot 10^5$ MPa.

3. Tę samą kostkę obciążono raz na rozciąganie, drugi raz na ścinanie. Liczbowe wartości σ i τ są równe. Czy właściwa energia będzie też ta sama?

Odp. Nie. Stosunek $U'_\tau/U'_\sigma = E/G = 2(1+\nu) > 2$.

4. Rura stalowa ($G = 8,1 \cdot 10^4$ MPa) o długości $l = 2$ m obciążona jak na rys. 3.3a momentami $M^* = 40 \cdot 10^3$ Nm ma mieć w stosunku do τ_p , współczynnik bezpieczeństwa $n_c = 3,0$ oraz kąt φ obrotu końcowych przekrojów co najwyżej równy $0,4^\circ$. Wyznaczyć wymiary przekroju rury, jeśli $R_e = 220$ MPa.

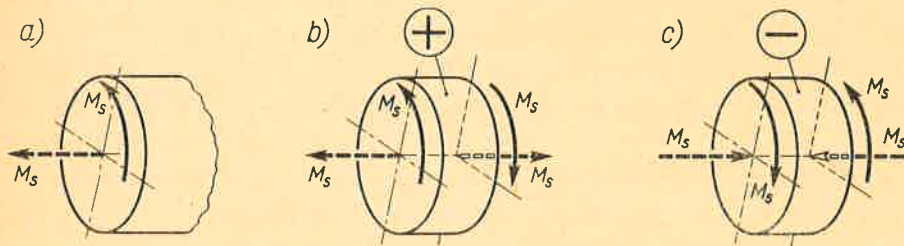
Odp. Z warunku $\tau < k_t = 0,58 R_e/n_c = 42,5$ MPa i $\gamma = \tau/G = k_t/G = 0,525 \cdot 10^{-3}$ rad; po podstawieniu do (3.6) mamy $r_{sr} = \gamma/l\varphi = 15,04$ cm $\approx 15,0$ cm, gdzie $\varphi = \pi 0,4^\circ/180^\circ = 6,98 \cdot 10^{-3}$ rad. Z wzoru (3.5) $\delta = M^*/2\pi r_{sr}^2 k_t = 0,67$ cm ≈ 7 mm.

5. Obliczyć ilość energii odkształcenia w rurze z zadania 4.

Odp. Z wzoru (3.4): $U' = 1,12 \cdot 10^4$ J/m³, objętość rury $V = 2\pi r_{sr} l = 1,32 \cdot 10^{-2}$ m³, skąd $U = U' \cdot V = 141$ J.

3.2. Skręcanie prętów. Wykresy momentów skręcających

Nawiązując do art. 1.4 przypominamy, że drugi prosty przypadek pracy pręta stanowi skręcanie, przy którym w przekroju działa jedynie moment skręcający M_s o wektorze pokrywającym się z osią pręta. Moment M_s uważamy za dodatni, gdy jego wektor skiero-



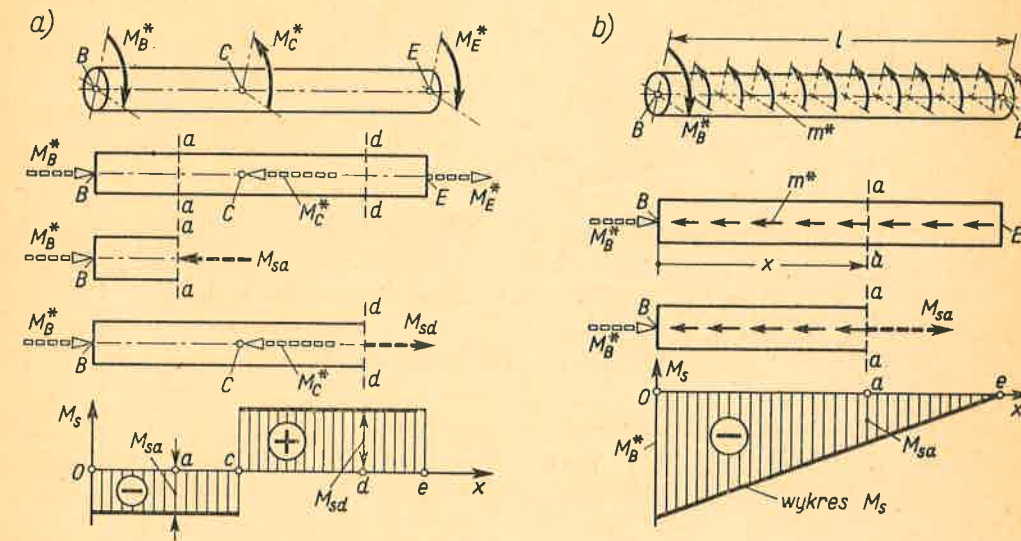
Rys. 3.5. Definicja znaków momentów skręcających

wany jest na zewnątrz przekroju badanej części pręta (rys. 3.5a). Przy tej umowie wektory dodatnich M_s dla odcinka pręta wykazują analogię z siłami rozciągającymi (rys. 3.5b), a dla ujemnych M_s (rys. 3.5c) analogię z siłami ściskającymi.

Weźmy teraz pręt (rys. 3.6a) obciążony w przekrojach B, C i E momentami M_B^*, M_C^* i M_E^* ,

M_C^* i M_E^* , których wektory pokrywają się z osią pręta ⁽¹⁾. Równowaga pręta wyraża się przy tym warunkiem

$$M_B^* - M_C^* + M_E^* = 0. \tag{a}$$



Rys. 3.6. Przykłady budowy wykresów M_s

Wektorowy obraz tego obciążenia przypomina obciążenie pręta siłami skupionymi. Takie przedstawienie ułatwia wyznaczenie wysiłku przekrojów. I tak dla przekrojów $a-a$ i $d-d$ z odpowiednich rysunków widać, że ich wysiłek stanowią momenty skręcające

$$M_{sa} = M_B^*, \quad M_{sd} = M_C^* - M_B^* = M_E^*, \tag{b}$$

przy czym, zgodnie z umową, M_{sa} jest ujemny, a M_{sd} dodatni. Wyniki te przedstawiamy na wykresie momentów skręcających w sposób podobny jak budowaliśmy wykres sił normalnych. Wygląd wykresu M_s przypomina wykresy sił normalnych.

Analogicznie badamy przypadek pręta obciążonego w sposób ciągły momentami m^* i utrzymanego w równowadze momentem M_B^* (rys. 3.6b). Wektorowe przedstawienie obciążenia daje obraz jak dla pręta obciążonego siłami masowymi. Z rysunku tego odczytujemy od razu warunek równowagi całości pręta $M_B^* = m^*l$, a z następnego rysunku wysiłek przekroju $a-a$, jako moment skręcający M_{sa}

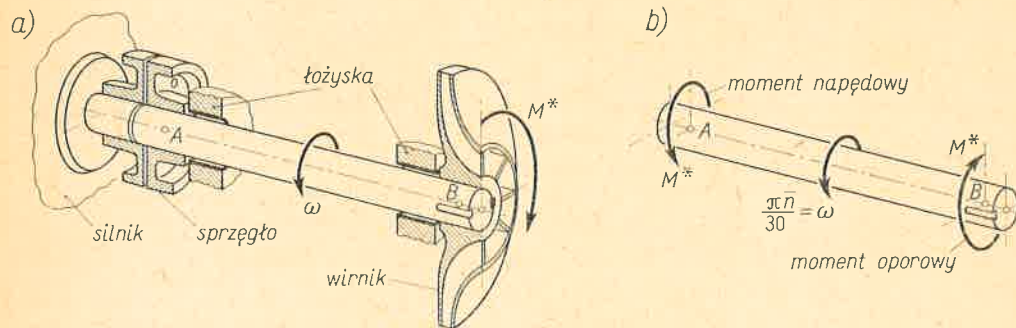
$$M_{sa} = -M_B^* + m^*x = -m^*(l-x). \tag{c}$$

Odpowiadający zależności (c) wykres momentów skręcających ma podobny wygląd jak wykres N (rys. 2.5) pręta rozciąganego.

Uogólniając podane przykłady powiemy, że skręcanie pręta występuje wtedy, gdy obciążenia stanowią momenty o wektorach równoległych do osi pręta. Szczególnie ważny

⁽¹⁾ Symbole momentów zewnętrznych, stanowiących obciążenie pręta, opatrzone są gwiazdką dla odróżnienia od momentu skręcającego M_s , jako wysiłku przekroju.

w budowie maszyn jest przypadek wału przekazującego napęd z silnika na zespół napędzany, np. wirnik pompy (rys. 3.7). Dostarczona przez silnik moc \bar{N} kW zostaje zużyta na pokonanie oporów ruchu wirnika, wyrażających się istnieniem momentu M^* Nm.



Rys. 3.7. Obciążenie wału napędowego

Jeśli wał robi \bar{n} obr/min, to moc odebrana przez wirnik jest $M^*\omega = \frac{M^*\pi \bar{n}}{30}$ (N m/s, czyli watów) i jest równa mocy silnika wyrażonej też w watach, tj. $1000 \bar{N}$. Z porównania tych dwóch wielkości mamy szukaną wartość M^*

$$M^* = \frac{1000 \cdot 30}{\pi} \frac{\bar{N}}{\bar{n}} = 9550 \frac{\bar{N}}{\bar{n}} \text{ Nm}, \quad (3.9)$$

gdzie, jak już powiedziano, \bar{N} jest podane w kilowatach, a \bar{n} w obrotach na minutę. Po tym przeliczeniu otrzymujemy układ obciążeń typowy dla przypadku skręcania (rys. 3.7b).

Zbudowanie wykresu M_s oparte, jak widzieliśmy, na metodzie przecięć jest niezbędnym pierwszym etapem analizy. Etapem następnym jest określenie naprężeń i odkształceń w skręcanym pręcie. W tym miejscu występuje istotna różnica między rozpatrzonym już rozciąganiem lub ściskaniem prętów a zagadnieniem skręcania. O ile bowiem w poprzednim przypadku obraz odkształceń nie zależał od kształtu przekroju, to w przypadku skręcania obraz ten jest częściowo różny dla różnych przekrojów. Wspólną cechą przy skręcaniu prętów jest to, że przekroje ich ulegają obrotowi wokół osi pręta. Odmienne natomiast jest obraz odkształceń na bocznej powierzchni pręta. Rozróżnienie tych cech możemy zaobserwować na rys. 3.3. W obecnym ujęciu jest to skręcanie cienkościennej rury. Kąt φ , zwany odtąd kątem skręcania, jest tą wspólną cechą odkształcenia. Obraz odkształceń powierzchni, tzn. przejście tworzącej BE w linię $B'E$, jest tą cechą, która jest różna dla prętów o różnych kształtach przekroju. Ten fakt powoduje, że określenie naprężeń i odkształceń dla różnych kształtów przekroju trzeba prowadzić odrębnie.

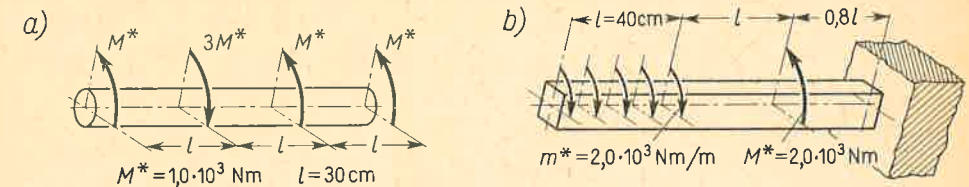
Zadania

1. Jaki moment skręcający działa w przekroju C wałka (rys. 3.6a)?

Odp. Udzielenie odpowiedzi na gruncie wytrzymałości nie jest możliwe, wiadome jest tylko, że w przekroju tuż na lewo od punktu C moment $M_s = -M_B^*$, tuż na prawo od tego punktu $M_s = M_E^*$.

2. Dla podanych prętów (rys. 3.8) wykonać wykresy momentów M_s i określić ich ekstremalne wartości (dodatnie i ujemne).

Odp. Dla wałka (rys. 3.8a) odpowiednio $+M$ i $-2M$, dla wałka (rys. 3.8b) $+1200$ N m i -800 N m.



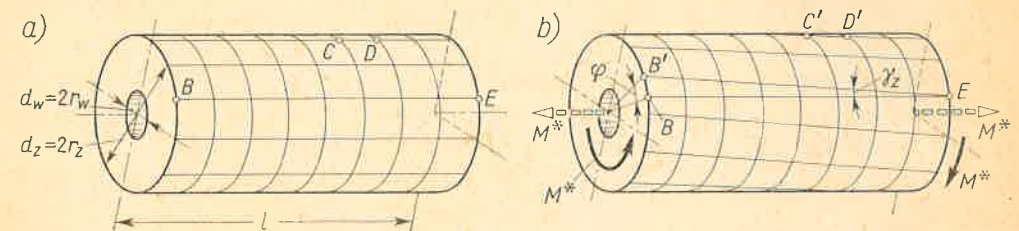
Rys. 3.8.

3. Tak zwany kardanowy wał łączący w samochodzie skrzynkę biegów z tylnym mostem przenosi moc silnika $\bar{N} = 80$ KM przy $\bar{n} = 2800 \div 600$ obr/min zależnie od włączenia różnych „biegów”. Wał wykonany jest jako rura ($2r_{sr} = 5,2$ cm, grubość $\delta = 3$ mm). Obliczyć ekstremalną wartość naprężenia τ .

Odp. Maksymalny moment wystąpi przy $\bar{n} = 600$ obr/min. Moc silnika $\bar{N} = 75 \cdot 80$ kG m/s = 58900 N m/s = $58,9$ kW. Z wzoru (3.9) $M^* = 936$ N m, a z (3.5) $\tau = 73$ MPa ≈ 750 kG/cm².

3.3. Skręcanie pryzmatycznego pręta o przekroju kołowym

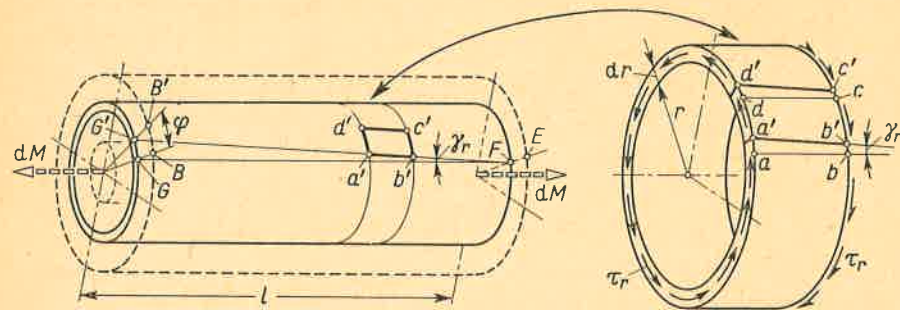
Przedmiotem analizy jest pręt drażony, mający otwór współśrodkowy o średnicy $d_w = 2r_w$ (rys. 3.9a). Analizę skręcania rozpoczynamy od opisu odkształceń. Narysowana na bocznej powierzchni nie obciążonego pręta prostokątna siatka zmienia się po obciążeniu momentami M^* w ukośnokątną (rys. 3.9b). Łuki kół zostają nie zmienione, a wykazują tylko względny obrót. Drugie linie siatki, tj. tworzące, zamieniają się na linie śrubowe o bardzo dużym skoku. W zakresie małych odkształceń stwierdzono również, że długości boków siatki nie ulegają zmianie. Tak więc na powierzchni bocznej dostępnej obserwacjom mamy odkształcenie postaciowe scharakteryzowane kątem γ_z .



Rys. 3.9. Obraz odkształceń przy skręcaniu pręta kołowego

Wobec powyższego dane doświadczalne nie mówią nic o odkształceniach w niedostępnym wnętrzu pręta. Trudność tę omijamy drogą hipotezy, określającej obraz odkształceń we wnętrzu pręta, a następnie w drodze rozumowania formułujemy takie wnioski, które można sprawdzić doświadczalnie. Pozytywny wynik weryfikacji jest pośrednim dowodem słuszności hipotezy.

Taką hipotezą roboczą jest *hipoteza płaskich przekrojów*. Głosi ona, że przy skręcaniu kołowego pręta poprzeczne przekroje nie doznają żadnych odkształceń, a tylko obracają się wokół osi pręta. Opierając się na tym widzimy (rys. 3.10), że elementarna współśrodkowa



Rys. 3.10. Odkształcenia elementarnej rury wyciętej myślowo ze skręcanego pręta

rura o promieniu r i grubości ścianki dr ulega skręceniu o ten sam kąt φ co i cały pręt. Obraz odkształceń jest identyczny jak w cienkościennych rurach (rys. 3.3). Wykorzystując to wyznaczamy z wzoru (3.6) kąt γ_r odkształcenia postaciowego elementarnej rury

$$\gamma_r = \varphi r / l, \quad (a)$$

przy czym zamiast r_{sr} wstawiono aktualny obecnie promień r . Stosując następnie prawo Hooke'a (3.1) mamy

$$\tau_r = G\gamma_r = G\varphi r / l, \quad (b)$$

jako wartość naprężenia stycznego działającego w poprzecznych przekrojach elementarnej rury. Potrzebny do jej skręcenia moment dM określamy z (3.5) z tym, że obecnie $\delta = dr$,

$$dM = 2\pi r^2 dr \tau_r = (G\varphi / l) 2\pi r^3 dr. \quad (c)$$

Do skręcenia wszystkich takich rur, składających się na badany pręt, potrzebny jest moment równy sumie dM , gdy r zmienia się w przedziale (r_w, r_z) . Z drugiej strony moment ten jest równy obciążającemu momentowi M^* (rys. 3.9). Wynika stąd, że

$$M^* = \frac{G\varphi}{l} \int_{r_w}^{r_z} 2\pi r^3 dr. \quad (d)$$

Oznaczając przez J_0 wartość całki

$$J_0 = \int_{r_w}^{r_z} 2\pi r^3 dr = \frac{\pi(r_z^4 - r_w^4)}{2} = \frac{\pi(d_z^4 - d_w^4)}{32} \quad (3.10)$$

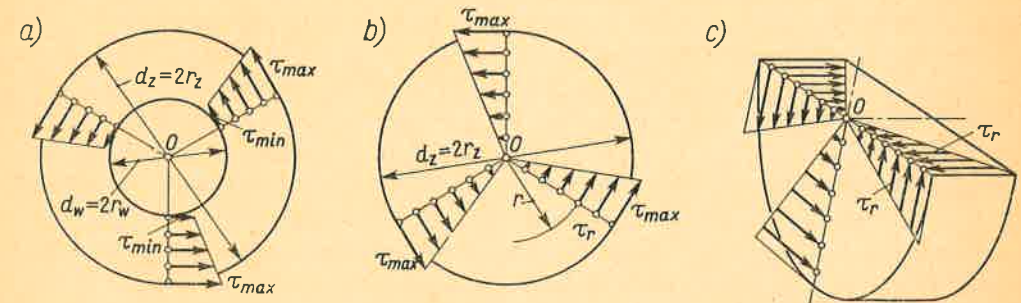
wyznaczamy nie znany dotąd kąt skręcenia

$$\varphi = \frac{M^* l}{GJ_0} \quad \text{rad} \quad (3.11)$$

oraz jego intensywność $\Theta = \varphi / l$, tzw. *względne skręcenie*,

$$\Theta = \frac{M^*}{GJ_0} \quad \text{rad/m.} \quad (3.12)$$

Wielkość ta stanowi wygodną, bo oderwaną od długości pręta, miarę odkształceń przy skręcaniu różnych prętów różnie obciążonych. Jak widać, względne skręcenie Θ jest proporcjonalne do momentu M^* , a odwrotnie proporcjonalne do iloczynu GJ_0 , tzw. *szttyw-*



Rys. 3.11. Rozkład naprężeń τ przy skręcaniu pręta kołowego

ności pręta na skręcanie. Wielkość J_0 jest czysto geometryczna. Dla pręta kołowego ma ona *dotatkowo* pewien sens fizyczny, gdyż jest to tzw. *biegunowy moment bezwładności przekroju* (art. 4.5).

Mając wartość φ wyznaczamy z wzoru (b) naprężenie

$$\tau_r = \frac{M^* r}{J_0}. \quad (3.13)$$

Maksymalna wartość τ_{max} odpowiada $r = r_z$ i może być przedstawiona w postaci

$$\tau_{max} = \frac{M^* r_z}{J_0} = \frac{M^*}{W_0}, \quad (3.14)$$

gdzie $W_0 = J_0 / r_z$ — tzw. *wskaźnik wytrzymałości na skręcanie*:

$$W_0 = \frac{\pi d_z^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d_w}{d_z} \right)^4 \right] \approx 0,2 d_z^3 \left[1 - \left(\frac{d_w}{d_z} \right)^4 \right]. \quad (3.15)$$

Gdy pręt jest pełny, wtedy oczywiście we wzorach (3.10) i (3.15) należy wstawić $r_w = 0$.

Z wzoru (3.13) wynika proporcjonalność τ_r do długości promienia r . Ponadto wiemy, że w każdym punkcie przekroju τ_r jest prostopadłe do odpowiedniego promienia. Te cechy dają obraz naprężeń, jak na rys. 3.11a, b. W przekrojach podłużnych (rys. 3.11c) działają również naprężenia styczne o wartościach równych odpowiednim naprężeniom w przekroju poprzecznym (zasada symetrii naprężeń stycznych). Z obrazów tych widać, że materiał pręta w otoczeniu osi jest słabo wykorzystany (małe τ_r), w porównaniu z włóknami zewnętrznymi (τ_{max}). Bardziej równomierne wykorzystanie materiału dają pręty drażone, które przez usunięcie bezużytecznego środka są lżejsze niż pręty pełne.

Zależności (3.11) i (3.14) wielokrotnie weryfikowano doświadczalnie z wynikiem pozytywnym. Świadczy to o słuszności przyjętej hipotezy. Te same wyniki daje teoria sprężystości, co stanowi jeszcze jeden dowód ich poprawności. Wzory te można stosować tylko w zakresie ważności prawa Hooke'a (wzór b), a więc wtedy, gdy materiał pręta jest sprężysty.

Określmy jeszcze energię U_1 odkształcenia pręta o jednostkowej długości. Traktując

pręt (rys. 3.10) jako zbiór cienkościennych rur, mamy dla jednej z nich energię

$$U'(2\pi r dr \cdot 1) = (\tau_r^2/2G)(2\pi r dr \cdot 1) = (M^{*2}/2GJ_0^2)(2\pi r^3 dr) \cdot 1, \quad (e)$$

gdzie $U' = \tau_r^2/2G$ — właściwa energia odkształcenia. Całkowita energia U_1 pręta jest sumą wyrażen (e), gdy r zmienia się od $r = r_w$ do $r = r_z$. Przy uwzględnieniu (3.10)

$$U_1 = \frac{M^{*2}}{2GJ_0^2} \int_{r_w}^{r_z} 2\pi r^3 dr = \frac{M^{*2}}{2GJ_0} \quad \text{J/m}. \quad (3.16)$$

Z drugiej strony energia U_1 jest równa pracy L_1 , jaką wykona wzrastający stopniowo moment M^* w przekroju B (rys. 3.9b) na rosnącym równocześnie kącie $\varphi = \theta \cdot 1$ obrotu tego przekroju. Sytuacja jest podobna jak przy rozciąganiu (rys. 2.12), przy czym rolę P spełnia M^* , a rolę Δl kąt φ . W rezultacie

$$L_1 = \frac{1}{2} M^* \theta = U_1 \quad \text{J/m} \quad (3.17)$$

i po podstawieniu θ z (3.12) otrzymujemy ten sam wynik (3.16).

Te rozważania ilustrują dwie równoległe metody określenia energii odkształcenia, raz jako sumy energii zgromadzonej we wszystkich elementach ciała, drugi raz jako wynik pracy obciążenia na odpowiednich przesunięciach. Ze spostrzeżenia tego będziemy często korzystać.

Zadania

1. Formułując zależność (3.5) założono, że $\tau = \text{const}$ wzdłuż grubości rury. Z badać dokładność tego założenia.

Od p. Traktując rurę (rys. 3.3) jako wał drażony (rys. 3.11a), w którym $r_z = r_{sr} + (\delta/2)$, $r_w = r_{sr} - (\delta/2)$, otrzymujemy

$$\tau_{sr} = (M^*/2\pi r_{sr}^2 \delta) / [1 + (\delta/2 r_{sr})^2]$$

oraz $\tau_{\max} = \tau_{sr} [1 + (\delta/2 r_{sr})]$, $\tau_{\min} = \tau_{sr} [1 - (\delta/2 r_{sr})]$. Gdy $\delta/2 r_{sr} = 0,1$, wówczas ściśle wartości τ_{sr} , τ_{\max} , τ_{\min} różnią się odpowiednio o $-2,5\%$, $+5\%$, -5% od wartości określonej wzorem (3.5).

2. Obliczyć wartości τ_{\max} i φ dla wałka (rys. 3.9), jeśli $M^* = 1,5 \cdot 10^3 \text{ N m}$, $d_z = 6 \text{ cm}$, $d_w = 0$, $l = 2 \text{ m}$, $G = 8,0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.

Od p. $\tau_{\max} = 35,0 \text{ MPa}$, $\varphi = 2,95 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1,69^\circ$.

3. Pręt przenoszący moment $M_s = 3,0 \cdot 10^3 \text{ N m}$ przy warunku $\tau_{\max} \leq 40 \text{ MPa}$ można wykonać jako pełny bądź drażony, przy czym $d_w/d_z = 0,7$. Porównać te warianty z uwagi na ciężar i sztywność.

Od p. W wariantcie I jest $d_z = 7,25 \text{ cm}$; w wariantcie II będzie $d_z = 7,96 \text{ cm}$, $d_w = 0,7 d_z = 5,58 \text{ cm}$. Stosunek ciężarów 1,63; stosunek kątów skręcenia $\varphi_I/\varphi_{II} = J_{0II}/J_{0I} = 1,10$. Tak więc pręt pełny jest i cięższy, i mniej sztywny niż drażony (przy równych M_s i τ_{\max}).

4. Skręcana momentem $M^* = 5,0 \cdot 10^3 \text{ N m}$ próbka ($d_z = 2 \text{ cm}$) wykazała na pomiarowej długości $l = 20 \text{ cm}$ kąt skręcenia $\varphi = 1^\circ 20' = 1,33^\circ$. Jaki jest moduł G sprężystości postaciowej $^{(1)}$

Od p. Z wzoru (3.11) $G = M^*/J_0 \varphi = 2,75 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 = 2,75 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.

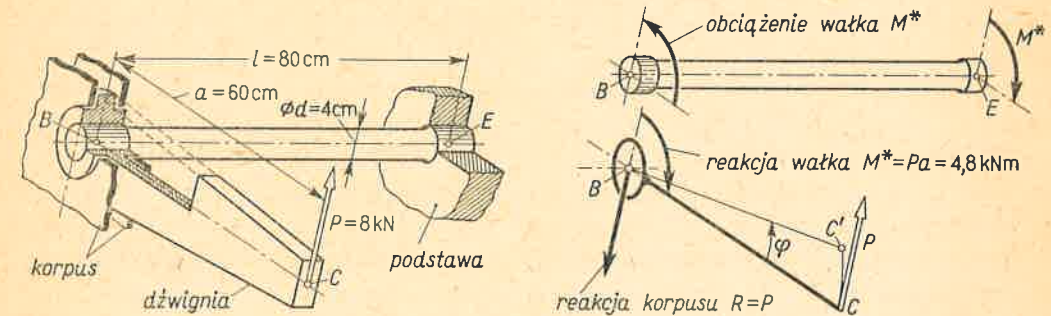
5. W czasie pracy zespołu (rys. 3.7) zmierzono kąt skręcenia $\varphi = 0,180^\circ$ między przekrojami wału odległymi o $l = 50 \text{ cm}$. Określić moc⁽²⁾ pobieraną przez wirnik, jeśli $\bar{n} = 1450 \text{ obr/min}$, $d_z = 5 \text{ cm}$, $G = 8,0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.

⁽¹⁾ Jest to powszechnie stosowana metoda pomiaru G .

⁽²⁾ Jest to jedna ze stosowanych w praktyce metod pomiaru mocy.

Od p. $M^* = \varphi GJ_0/l = 308 \text{ N m}$, $\bar{N} = 47 \text{ kW}$.

6. Osadzona obrotowo w korpusie praktycznie nieodkształcalna dźwignia BC (rys. 3.12) łączy się z wałkiem BE blokującym jej swobodny obrót. Wyznaczyć naprężenie τ_{\max} i energię odkształcenia w wałku oraz przesunięcie punktu C wywołane siłą P . $G = 8,0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.

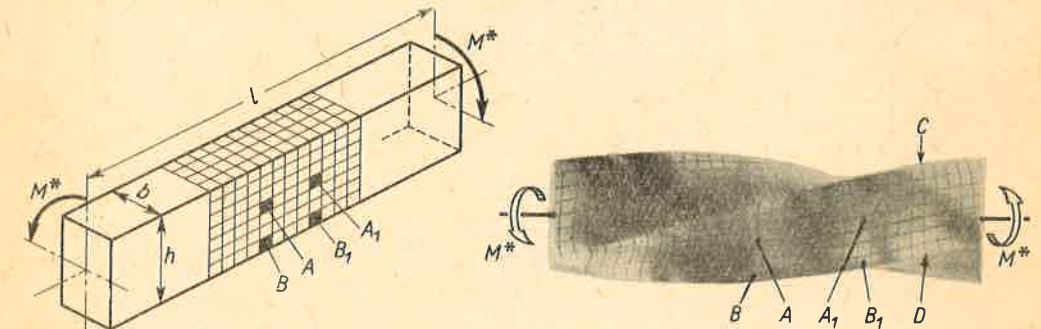


Rys. 3.12.

Od p. Widać z rysunku, że wałek jest skręcany. Moment $M^* = 4,8 \text{ kN m}$, $\tau_{\max} = M^*/W_0 = 382 \text{ MPa}$, energia $U = U_1 l = 457 \text{ J}$, kąt $\varphi = 0,191 \text{ rad}$. Przesunięcie $CC' \approx a\varphi = 11,4 \text{ cm}$ jest dość duże. Tę cechę wykorzystuje się w różnych urządzeniach, jak zawieszania karoserii itp.

3.4. Skręcanie prętów o przekrojach niekołowych

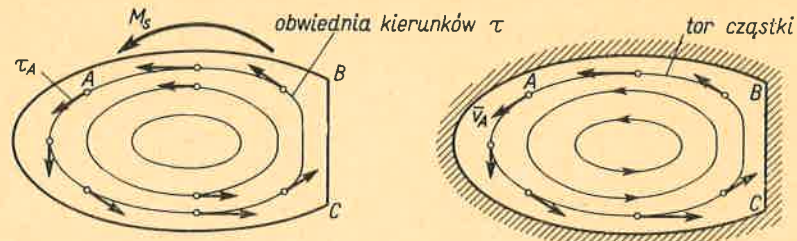
Przy skręcaniu takich prętów, np. o przekroju prostokątnym (rys. 3.13), obserwujemy bardziej złożony obraz odkształceń niż w przypadku pręta kołowego. Nacięta na bocznej powierzchni pręta pierwotnie prostokątna siatka po jego skręceniu odkształca się nie-



Rys. 3.13. Typowy obraz odkształceń bocznej powierzchni skręcanego pręta o niekołowym przekroju

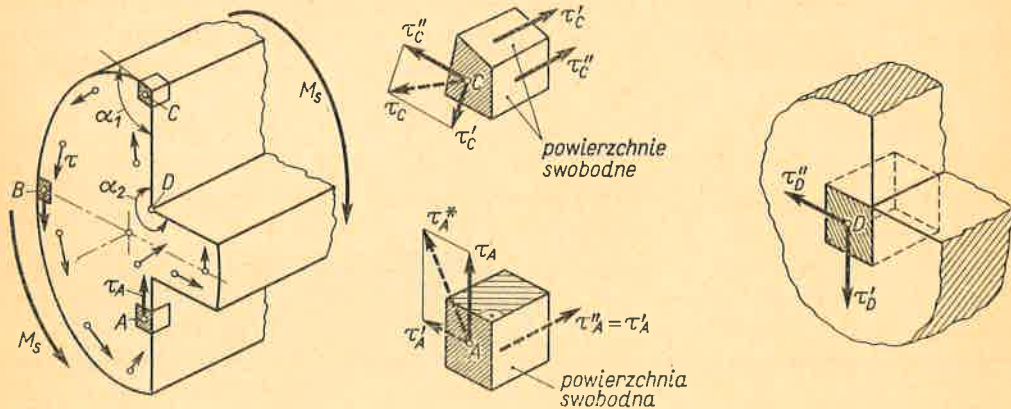
ednakowo, np. oczka A i B . Widać również, że linie pierwotnie proste i prostopadłe do osi pręta, jak linia CD , po skręceniu stają się zakrzywione. Oznacza to, że pierwotny płaski przekrój na pewno nie zostaje płaski. W tych warunkach wykorzystana uprzednio hipoteza płaskich przekrojów przestaje być słuszną. Jej odrzucenie powo-

duje, że dla takich prętów metodami wytrzymałości materiałów nie można na ogół określić ani naprężeń, ani odkształceń.



Rys. 3.14. Obraz naprężeń przy skręcaniu i analogia hydrodynamiczna

Pełne rozwiązanie tego zagadnienia daje teoria sprężystości, a najważniejsze jego wyniki ilustruje rys. 3.14. Pierwszym jest to, że przy skręcaniu każdego pryzmatycznego pręta w jego przekroju poprzecznym istnieją tylko naprężenia styczne τ , których kierunki i wartości są różne w różnych punktach przekroju. Kierunki naprężeń wykazują analogię do prędkości cząstek cieczy nielepkiej i nieściśliwej krążącej ruchem ustalonym w płaskim naczyniu o kształcie identycznym z przekrojem pręta skręcane. Ta tzw. analogia hydrodynamiczna ułatwia uzmysłowienie sobie tego faktu, że obwódki kierunków τ tworzą linie zamknięte, analogiczne do torów cząstek krążącej cieczy. Wartości naprężeń τ w punktach jednej obwódki nie są na ogół jednakowe. Zależą one od wymiarów przekroju i momentu skręcającego, nie zależą natomiast od modułu G . Względne skręcenie θ badanego pręta zależy od kształtu i wymiarów przekroju i jest proporcjonalne do momentu skręcającego, a odwrotnie proporcjonalne do modułu G .



Rys. 3.15. Jakościowa analiza obrazu naprężeń przy skręcaniu

Wykorzystując zasadę symetrii naprężeń stycznych możemy ustalić niektóre jakościowe cechy rozkładu naprężeń (rys. 3.15). W elemencie A , którego jedna ścianka leży na bocznej powierzchni pręta, naprężenie τ_A musi mieć kierunek konturu przekroju. Gdyby tak nie było, wówczas wypadkowe naprężenie τ_A^* miałoby składową τ_A' prostopadłą do krawędzi. Na zasadzie symetrii naprężeń stycznych musiałyby istnieć naprężenia $\tau_A'' = \tau_A'$ na bocznej

powierzchni pręta. Ta jednak powierzchnia jest swobodna, czyli że $\tau_A'' = 0$, skąd wynika, że i $\tau_A' = 0$. Uogólniając to dla innych elementów, np. B , widzimy, że naprężenia styczne we wszystkich elementach przekroju przylegających do jego konturu mają kierunek do tego konturu równoległy.

To samo rozumowanie daje, że w narożach takich jak C , gdzie wewnętrzny kąt $\alpha_1 < \pi$, naprężenia styczne są równe zero. Gdyby bowiem istniało tam naprężenie τ_C , wówczas musiałyby istnieć również jego składowe τ_C' i τ_C'' prostopadłe do odpowiednich krawędzi, a to, jak już wiemy, jest niemożliwe. Inaczej przedstawia się sytuacja w narożach takich jak D , gdzie $\alpha_2 > \pi$. Jak widać, żadna ze ścianek elementu D nie należy do swobodnej powierzchni pręta i zasada symetrii naprężeń stycznych nie daje żadnej informacji o składowych τ_D' i τ_D'' . Odpowiedź otrzymujemy z teorii sprężystości. Okazuje się, że w bezpośrednim otoczeniu naroży o kącie $\alpha_2 > \pi$ naprężenia, przy założeniu idealnej i nieograniczonej sprężystości materiału, są teoretycznie nieskończenie wielkie. Oznacza to, że w tych miejscach (na bardzo małej części przekroju) występują trwałe odkształcenia, nawet gdy obciążenia są bardzo małe.

Wyniki rozwiązań otrzymanych w teorii sprężystości podano w tabl. 3.1, przy czym ograniczono się w zasadzie do informacji niezbędnych w praktycznych zastosowaniach, a mianowicie wartości τ_{\max} i θ oraz określenia punktów przekroju, w których działa τ_{\max} . Wartości τ_{\max} i θ łącznie z otrzymanymi poprzednio w art. 3.3 przedstawiono w postaci

$$\tau_{\max} = M_s / W_s, \quad (3.18)$$

$$\theta = M_s / GJ_s, \quad (3.19)$$

gdzie W_s, J_s — wielkości czysto geometryczne zależne tylko od kształtu i wymiarów przekroju. Wielkość W_s zależy od sześciangu wymiaru charakteryzującego dany przekrój, a J_s od jego czwartej potęgi. Innymi słowy wielkości W_s wyrażają się w cm^3 , a J_s w cm^4 . Dla przekroju kołowego W_s i J_s przechodzą w określone poprzednio wielkości W_0 i J_0 i w tym przypadku mają pewien dodatkowy sens fizyczny. Podobnie jak w pręcie kołowym iloczyn GJ_s nazywamy sztywnością na skręcanie

$$C = GJ_s. \quad (3.20)$$

Ilość energii odkształcenia na jednostkę długości pręta, czyli U_1 , określona jest nadal wzorem (3.16), w którym rolę GJ_0 spełnia teraz sztywność C , czyli

$$U_1 = \frac{M^{*2}}{2GJ_s} = \frac{M^{*2}}{2C} \quad \text{J/m}. \quad (3.21)$$

Zadania

1. Dwa pręty o jednakowej długości $l = 100$ cm, jeden o przekroju kwadratowym ($h = b = 5$ cm), drugi o przekroju prostokątnym ($h = 10$ cm, $b = 2,5$ cm) obciążono jednakowymi momentami $M^* = 10^3$ N m (rys. 3.13). W jakim stosunku do siebie są maksymalne naprężenia, kąty skręcenia i energia odkształcenia?

Odp. $\tau_{\max I} / \tau_{\max II} \approx 0,59$, $\varphi_I / \varphi_{II} \approx 0,41$, $U_I / U_{II} \approx 0,41$; pręt o przekroju kwadratowym ma mniejsze naprężenia i jest sztywniejszy od pręta prostokątnego o tym samym ciężarze.

Wielkości W_s i J_s dla różnych przekrojów

Nr	Przekrój	W_s	J_s	Uwagi					
1		$W_s = \frac{\pi}{16} \frac{d_z^4 - d_w^4}{d_z}$	$J_s = \frac{\pi}{32} (d_z^4 - d_w^4)$	τ_{max} w punktach konturu zewnętrznego					
2		$W_s = \frac{\pi\psi}{2} \frac{b_z^4 - b_w^4}{b_z}$ $a_z/b_z = a_w/b_w = \psi \geq 1$	$J_s = \frac{\pi}{2} \frac{\psi^3 (b_z^4 - b_w^4)}{\psi^2 + 1}$	$\tau_{max} = \tau_A$ w punkcie B $\tau_B = \tau_{max}/\psi$					
3		$W_s = c_1 hb^2 = c_1 \psi b^3$	$J_s = c_2 hb^3 = c_2 \psi b^4$	$\tau_{max} = \tau_A$, czyli w środkach dłuższych boków, w środkach krótszych boków $\tau_B = c_3 \tau_{max}$, w narożach $\tau = 0$					
		$h/b = \psi$	1,0		1,5	2	3	6	∞
		c_1	0,208		0,231	0,246	0,267	0,299	0,333
		c_2	0,141		0,196	0,229	0,263	0,298	0,333
	c_3	1,000	0,858	0,796	0,753	0,743	0,743		
4		trójkąt równoboczny		τ_{max} w środkach boków, w narożach $\tau = 0$					
		$W_s = \frac{a^3}{20}$	$J_s = \frac{a^4}{46,2}$						
5		sześciokąt foremny		τ_{max} w środkach boków, w narożach $\tau = 0$					
		$W_s = 0,189a^3$	$J_s = 0,115a^4$						
6		cienkościenny profil otwarty		τ_{max} w środku długich boków odcinka o grubości δ_{max}					
		$W_s = \frac{1}{3 \delta_{max}} \sum s_i \delta_i^3$	$J_s = \frac{1}{3} \sum s_i \delta_i^3$						
7		cienkościenna dowolna rura		τ_{max} w miejscu, gdzie grubość δ jest δ_{min} , F - pole ograniczone linią środkową między zewnętrznym i wewnętrznym konturem					
		$W_s = 2F\delta_{min}$	$J_s = 4F^2 \sum \frac{s_i}{\delta_i}$						

2. Wyznaczyć liczbowe wartości τ_{max} , τ_B , φ i U dla pręta o prostokątnym przekroju z zad. 1, jeśli $G = 2,65 \cdot 10^4$ MPa.

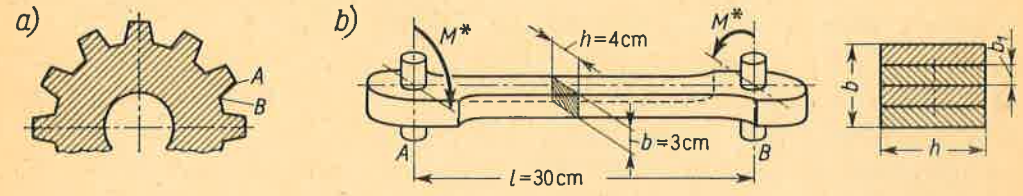
Odp. $\tau_{max} \approx 65$ MPa, $\tau_B \approx 52$ MPa, $\varphi = \Theta l = 0,106$ rad $\approx 6,1^\circ$, $U = 53$ J.

3. W pręcie o dowolnym niekołowym przekroju powiększono 1,5 razy wymiary tego przekroju. Jak zmieni się τ_{max} , φ i U ?

Odp. τ_{max} zmaleje w stosunku $1/1,5^3 = 0,288$, φ i U zmaleją w stosunku $1/1,5^4 = 0,196$.

4. Pręty: szklany ($G = 2,4 \cdot 10^4$ MPa) i stalowy ($G = 8,0 \cdot 10^4$ MPa) o jednakowym (np. eliptycznym) przekroju skręcane są jednakowymi momentami. W którym z nich naprężenia są większe?

Odp. Są jednakowe, albowiem wartości τ nie zależą od modułu G ; różne natomiast są odkształcenia (kąty skręcenia).



Rys. 3.16.

5. W skrzynkach biegów stosuje się wałki wielowypustowe (rys. 3.16a) pracujące na skręcanie. Wskazać punkty przekroju, w których naprężenia są zerowe, a w których bardzo duże.

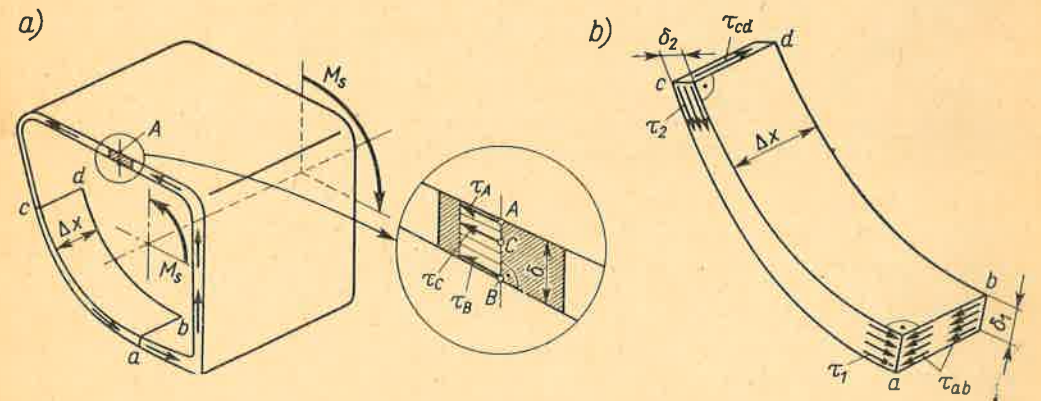
Odp. Pierwszymi są naroża A, drugimi – naroża B (wewnętrzne).

6. Łącznik (rys. 3.16b) wykonano raz jako jednolity pręt o przekroju prostokątnym, drugi raz jako pakiet 20 taśm o grubości $b_1 = 1,5$ mm każda. Jaki jest stosunek τ_{max} w tych konstrukcjach, jeśli w warunkach pracy występuje wymuszone skręcenie A względem B o kąt $\varphi = 5^\circ$? $G = 8,0 \cdot 10^4$ MPa.

Odp. $\tau_{maxI} \approx 570$ MPa; w wariancie drugim każda taśma skręca się oddzielnie o ten sam kąt φ , $\tau_{maxII} = 35$ MPa; $\tau_{maxI}/\tau_{maxII} = 16,3$. Widać, że redukcja naprężeń jest bardzo duża.

3.5. Skręcanie rur o dowolnym obrysie

Ogólne reguły z poprzedniego artykułu zastosujemy do przypadku skręcania cienkościennej rury o dowolnym obrysie (rys. 3.17). W przekroju poprzecznym występują tylko naprężenia styczne. Naprężenia τ_A i τ_B w odpowiadających sobie punktach A i B krawędzi



Rys. 3.17. Naprężenia przy skręcaniu cienkościennej rury

zewnątrznej i wewnętrznej są styczne do tych krawędzi. Widać, że kierunki τ_A i τ_B z uwagi na małą grubość δ ścianki są praktycznie jednakowe. Z racji ciągłości zjawisk, naturalne jest założenie, że w innym punkcie C linii AB , naprężenie τ_C jest równoległe do τ_A i τ_B . Z tych samych powodów wartości τ_A , τ_B , τ_C nie mogą się zbytnio różnić i dla celów praktycznych można przyjąć, że *wzdłuż grubości naprężenie τ jest stałe* w danym punkcie obwodu. Nie oznacza to, że wartości τ w *różnych* punktach obwodu są te same. Aby to zbadać, rozpatrzmy równowagę odcinka $abcd$ płaszcza (rys. 3.17b). Na zasadzie symetrii naprężenia τ_{ab} na boku ab są równe naprężeniom τ_1 w punktach przekroju poprzecznego na krawędzi a . Podobnie τ_{cd} są równe τ_2 , działającym w punktach przekroju poprzecznego na krawędzi c . Równanie równowagi rzutów na kierunek osi rury jest

$$\tau_{ab} \delta_1 \Delta x - \tau_{cd} \delta_2 \Delta x = 0,$$

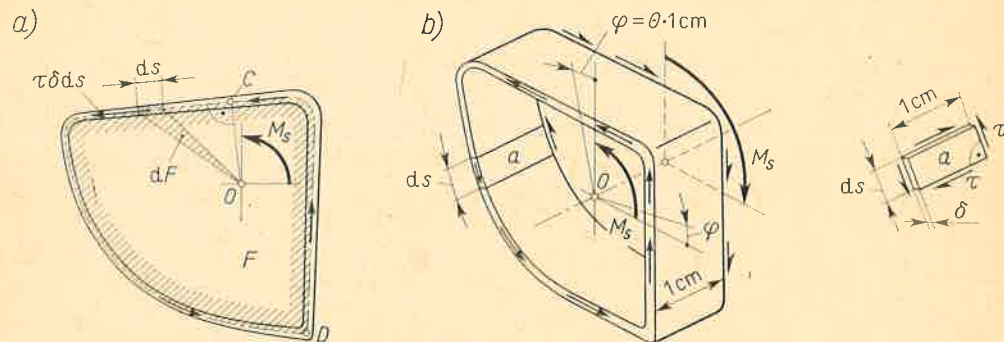
a po podstawieniu $\tau_{ab} = \tau_1$ i $\tau_{cd} = \tau_2$

$$\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2. \quad (a)$$

Ponieważ odcinek płaszcza obrano dowolnie, zatem zależność (a) słuszna jest dla wszystkich punktów obwodu. Tak więc przy skręcaniu cienkościennej rury naprężenia styczne tworzą w przekroju poprzecznym obieg zamknięty i spełniają zależność

$$\tau \delta = \text{const}. \quad (b)$$

Wynika stąd, że naprężenie τ_{\max} występuje w tym miejscu obwodu, gdzie grubość ścianki jest najmniejsza, czyli $\delta = \delta_{\min}$.



Rys. 3.18. Wyznaczenie naprężeń i kąta skręcenia rury

Aby związać znaną wartość M_s z nie znaną jeszcze wartością iloczynu $\tau\delta$, określmy wypadkowy moment tych naprężeń. Na pole δds działa siła $\tau\delta ds$ styczna do środkowej linii konturu (rys. 3.18a). Jej moment względem obranego punktu O

$$(\tau\delta ds)\overline{OC} = \tau\delta \cdot 2dF,$$

gdzie dF — pole trójkąta o podstawie ds i wysokości OC . Sumując wszystkie elementarne

momenty, przy uwzględnieniu, że $\tau\delta = \text{const}$, mamy

$$\int \tau\delta \cdot 2dF = 2\tau\delta \int dF = 2\tau\delta F, \quad (c)$$

gdzie F — całe pole ograniczone środkową linią konturu⁽¹⁾.

Ten wypadkowy moment jest równy wysiłkowi przekroju, tj. M_s , skąd poszukiwana wartość $\tau\delta$ jest

$$\tau\delta = \frac{M_s}{2F} \quad (3.22)$$

oraz wartość τ_{\max} odpowiadająca grubości δ_{\min}

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{2F\delta_{\min}} = \frac{M_s}{W_s}, \quad (d)$$

gdzie $W_s = 2F\delta_{\min}$ sprowadza ten wynik do postaci (3.18).

Względne skręcenie θ wyznaczmy obliczając dwojakim sposobem energię odkształcenia U_1 jednostkowego odcinka (rys. 3.18b). Zgodnie z wzorem (3.4) porcja energii zgromadzona w elemencie o objętości $1 \cdot \delta ds$ jest

$$U'(\delta ds \cdot 1) = (\tau^2/2G)(\delta ds \cdot 1) = M_s^2 ds/8GF^2 \delta,$$

a całkowita energia równa jest sumie takich porcji

$$U_1 = \oint \frac{M_s^2 ds}{8GF^2 \delta} = \frac{M_s^2}{8GF^2} \oint \frac{ds}{\delta} \quad \text{J/m}, \quad (e)$$

gdzie symbol \oint oznacza sumowanie po obwodzie rury. Z drugiej strony według (3.17) energia $U_1 = M_s \theta/2$. Porównując to z wynikiem (e) mamy ostatecznie

$$\theta = \frac{M_s}{4GF^2} \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (3.23)$$

Na ogół ścianka rury składa się z odcinków o stałych grubościach δ_i . Oznaczając przez s_i długość odcinka mamy

$$\oint (ds/\delta) = \sum (s_i/\delta_i), \quad (f)$$

a gdy grubość ta jest stała na całym obwodzie s_c , wówczas

$$\oint (ds/\delta) = s_c/\delta. \quad (g)$$

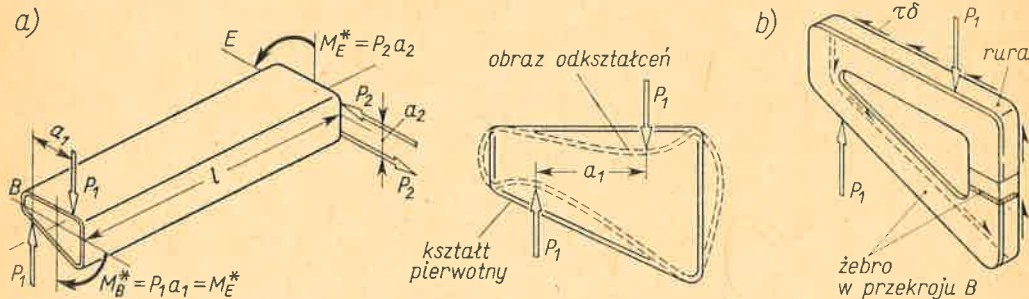
Wynik (3.23) sprowadzamy do postaci (3.19) oznaczając symbolem J_s wielkość czysto geometryczną

$$J_s = 4F^2 / \left(\oint ds/\delta \right). \quad (h)$$

Cienkościennie rury pracujące na skręcanie stanowią przykład konstrukcji racjonalnie wykorzystującej materiał. W porównaniu z prętami o przekroju zwartym (rys. 3.11b)

⁽¹⁾ Odmienne oznaczenie tego pola, tj. F , podkreśla różnicę tego pojęcia od pola A materialnego przekroju rury.

usunięto tu materiał, który przy skręcaniu jest martwy i stanowi tylko niepotrzebny balast. Równocześnie odsunięcie materiału od osi pręta powoduje zwiększenie sztywności pręta na skręcanie. Tak więc prawidłowo zwymiarowana cienkościenna rura jest konstrukcją i lekką, i sztywną. Aby to jednak osiągnąć, momenty zewnętrzne muszą być

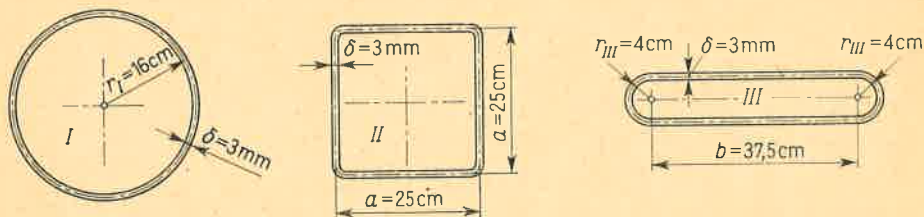


Rys. 3.19. Wprowadzenie obciążeń w cienkościennej rurze
a) przykład obciążenia i odkształceń wadliwej konstrukcji bezżebrowej; b) statyka żebra B.

wprowadzone pod postacią naprężeń τ rozłożonych na obwodzie tak, jak przewiduje przeprowadzona analiza (wzór b). W rzeczywistości momenty zewnętrzne przyłożone są z reguły jako pary sił skupionych P_1 i P_2 (rys. 3.19a). Gdyby tak konstrukcję zostawić, wówczas postulat powyższy nie byłby spełniony, a obraz odkształceń rury byłby krańcowo różny od oczekiwanego. Mianowicie przekrój poprzeczny uległby zniekształceniu i już nawet małe siły P_1 dałyby duże trwałe odkształcenia, a więc zniszczenie ustroju. Aby temu zapobiec, należy w przekroju obciążonym wstawić dostatecznie mocną przegrodę, tzw. żebro. Jego rola polega na zamianie momentu M^* pary sił P_1 na taki sam moment naprężeń stycznych τ , ale już rozłożonych na całym obwodzie. Tę funkcję żebra po jego myślowym oddzieleniu od płaszcza widzimy na rys. 3.19b. Podobne żebro musi być wstawione w drugim przekroju E i ogólnie w każdym, w którym wprowadzamy skupione obciążenia zewnętrzne. Nieprzestrzeganie tej reguły jest tzw. błędem sztuki inżynierskiej, świadczącym negatywnie o kwalifikacjach zawodowych.

Zadania

1. Trzy cienkościenne rury stalowe (rys. 3.20) o jednakowej grubości ($\delta = 3$ mm), obwodzie ($s_c \approx 100$ cm) i długości skręcane są tym samym momentem. W jakim stosunku są do siebie ciężary rur, maksymalne naprężenia styczne i kąty skręcenia?



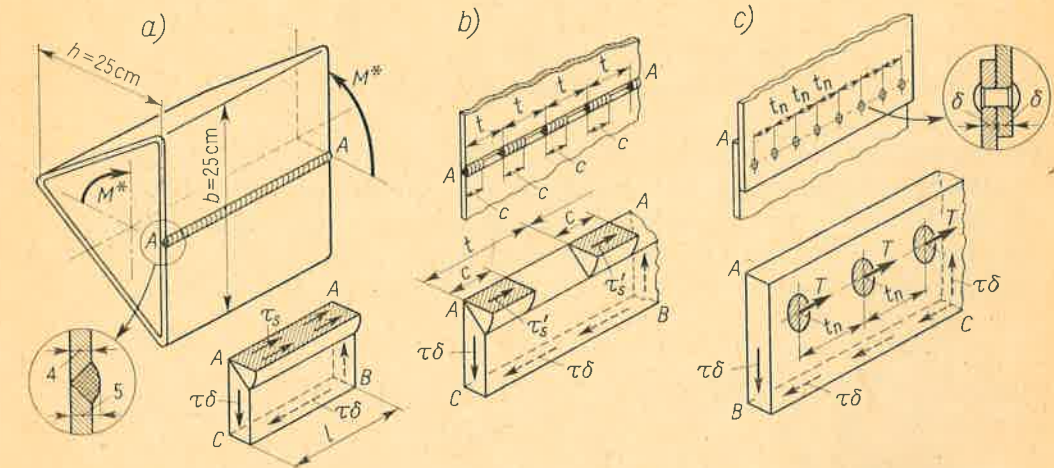
Rys. 3.20.

Odp. Ciężary jednakowe; $\tau_{maxII}/\tau_{maxI} = 1,28$ i $\tau_{maxIII}/\tau_{maxI} = 2,28$; $\varphi_{II}/\varphi_I = 1,63$ i $\varphi_{III}/\varphi_I = 5,20$. Najlepsza jest rura kołowa.

2. Wyznaczyć τ_{max} , φ i współczynnik bezpieczeństwa dla rury II z poprzedniego zadania, jeśli $M_s = 10 \cdot 10^3$ N m, $l = 2$ m, $G = 8,0 \cdot 10^4$ MPa, a $R_e = 240$ MPa.

Odp. $\tau_{max} = 26,7$ MPa; z (3.7) $\tau_{p1} = 0,58 R_e = 139$ MPa, skąd $n_e = 5,2$; $\Theta = 0,266 \cdot 10^{-2}$ rad/m, $\varphi = \Theta l = 0,532 \cdot 10^{-2}$ rad $\approx 0,30^\circ$.

3. Trójkątną rurę wykonano przez zagięcie arkusza blachy ($\delta = 4$ mm) i zespawanie brzegów wzdłuż tworzącej $A-A$ (rys. 3.21a), przy czym grubość spoiny $\delta_s = 5$ mm. Określić naprężenia w spoinie i w blasze, jeśli $M^* = 6 \cdot 10^3$ N m.



Rys. 3.21. Analiza naprężeń w miejscach łączenia płaszcza

Rozwiązanie. Obliczając $F = 0,5 hb = 312$ cm² mamy z (3.22) w blasze $\tau = M_s/2F\delta = 24$ MPa. Wartość τ_s w spoinie otrzymamy badając równowagę paska $AABC$. W przekroju spoiny $A-A$ działa wypadkowa siła $\tau_s \delta_s l$, na boku BC zaś $-\tau \delta l$, skąd $\tau_s \delta_s = \tau \delta$ i $\tau_s = \tau \delta / \delta_s = 19,2$ MPa.

4. Jak zmienią się wyniki zadania 3, jeśli spoinę $A-A$ wykonać odcinkami $c = 4$ cm rozstawionymi co $t = 8$ cm (rys. 3.21b)?

Rozwiązanie. Z analizy równowagi paska $AABC$ otrzymujemy teraz $\tau'_s \delta_s c (l/t) = \tau \delta l$, skąd $\tau'_s = (\tau \delta / \delta_s) (t/c) = 38,4$ MPa.

5. Rurę z zadania 3 zamiast spawać znitowano na zakładkę (rys. 3.21c). Zakładając jednakową pracę nitów, określić siłę działającą na jeden nit (podziałka $t = 3$ cm).

Rozwiązanie. Wydzielamy pasek płaszcza tworzącą BC z jednoczesnym przecięciem wszystkich nitów prostopadle do ich osi. W przekrojach nitów działają jednakowe z założenia i równoległe do tworzącej BC siły T niezbędne do zachowania równowagi. Warunek równowagi daje

$$T (l/t_n) = \tau \delta l,$$

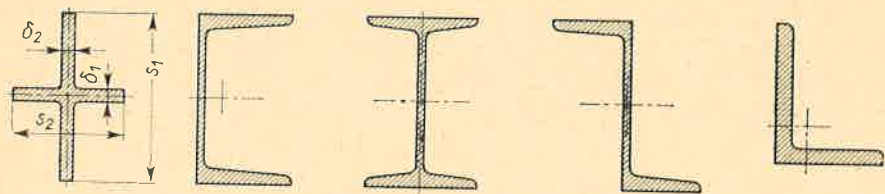
skąd $T = \tau \delta t_n = 24 \cdot 10^6$ N/m² $\cdot 0,4 \cdot 10^{-2}$ m $\cdot 3 \cdot 10^{-2}$ m $= 2,88 \cdot 10^3$ N.

6. W rurze III (rys. 3.20) zwiększono 1,5-krotnie wymiary b i r , a grubość δ zmieniono na $\delta_1 = 2$ mm. Jak zmienią się naprężenia, kąt skręcenia, energia odkształcenia i ciężar rury?

Odp. Ciężar bez zmiany, naprężenia zmniejszą 1,5-krotnie, kąt skręcenia i energia zmniejszą w stosunku $1:(1,5)^2$, tj. 2,25 razy.

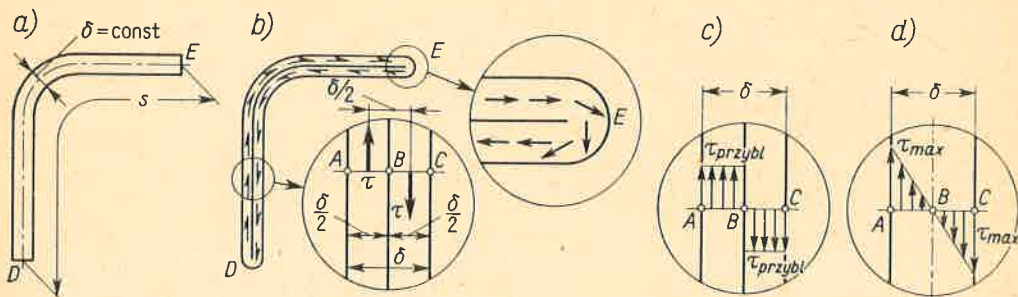
3.6. Skręcanie cienkościennych profili otwartych

Celowość bardziej szczegółowej analizy skręcania takich profili (rys. 3.22) wynika z szerokiego ich stosowania w różnych dziedzinach, jak konstrukcje stalowe, budowa samochodów, pługów, taboru kolejowego, okrętów itp. Analizę rozpoczniemy od



Rys. 3.22. Przykłady cienkościennych profili otwartych

pręta o stałej grubości δ (rys. 3.23). Pręt ten można wyobrazić sobie, jako wynaturzoną cienkościenną rurę, której ścianki o grubości $\delta' = \delta/2$ przylegają do siebie, i której obwód $s'_c \approx 2s$ (rys. 3.23b). Przy jej skręcaniu naprężenia styczne w przekroju tworzą obieg zamknięty, jak na rys. 3.18. Oznacza to, że na połowie grubości δ , tj. AB , mają one zwrot przeciwny niż na drugiej połowie, tj. BC , a na końcach profilu D i E raptownie „zakręcają”.



Rys. 3.23. Analiza skręcania profilu otwartego o $\delta = \text{const}$

a) obraz przekroju; b) równoważny model rury cienkościennej; c) i d) przybliżony i rzeczywisty rozkład τ wzdłuż grubości

Gdyby założyć, jak w art. 3.5, że $\tau = \text{const}$ wzdłuż grubości δ' (rys. 3.23c), wówczas z wzorów (3.22) i (3.23) otrzymalibyśmy

$$\tau_{\text{przybl.}} = \frac{2M_s}{s\delta^2}, \quad \Theta_{\text{przybl.}} = \frac{4M_s}{Gs\delta^3},$$

albowiem, jak to widać z rys. 3.23b,

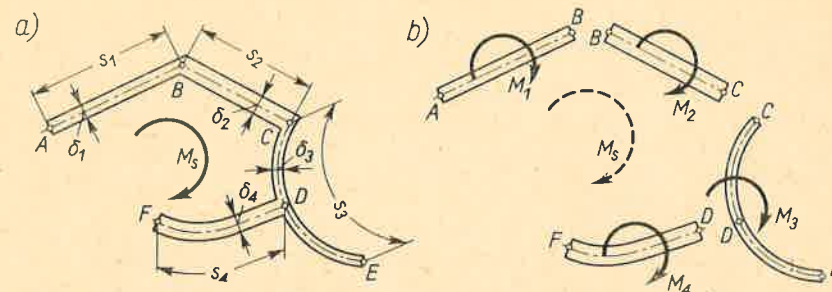
$$F \approx s\delta' \approx 0,5s\delta. \quad \oint (\delta s/\delta) = s'_c/\delta'_i = 4s/\delta.$$

W rzeczywistości naprężenia τ zmieniają się wzdłuż grubości w sposób ciągły (rys. 3.23d), a nie skokowo, jak na rys. 3.23c. Jeśli to uwzględnić, to zamiast $\tau_{\text{przybl.}}$ i $\Theta_{\text{przybl.}}$ otrzymujemy

$$\tau_{\text{max}} = 3M_s/s\delta^2, \quad (3.24)$$

$$\Theta = 3M_s/Gs\delta^3, \quad (3.25)$$

gdzie τ_{max} — wartość naprężeń w punktach konturu przekroju. Widać, że τ_{max} i Θ nie zależą od kształtu środkowej linii profilu (płaskownik, kątownik, ceówka), o ile tylko s i δ są te same.



Rys. 3.24. Analiza skręcania złożonego profilu otwartego

Przejdźmy do przypadku, gdy otwarty profil składa się z szeregu odcinków s_i o różnych grubościach δ_i (rys. 3.24a). Gdy skręcamy taki profil, wówczas dla wszystkich odcinków kąt skręcenia φ , a więc i Θ jest ten sam. Potrzebne do tego momenty M_1, \dots, M_4 (rys. 3.24b) są zgodnie z wzorem (3.25) równe

$$M_1 = Gs_1 \delta_1^3 \Theta/3, \quad \dots, \quad M_4 = Gs_4 \delta_4^3 \Theta/3, \quad (a)$$

a ich suma $M_1 + \dots + M_4 = M_s$, skąd otrzymujemy

$$\Theta = 3M_s / \sum Gs_i \delta_i^3. \quad (b)$$

Podstawiając Θ do wzorów (a) otrzymujemy wartości M_1, \dots, M_4 , a z wzoru (3.24) ekstremalne naprężenia w poszczególnych odcinkach

$$\tau_{\text{max1}} = 3M_s \delta_1 / \sum s_i \delta_i^3, \quad \dots, \quad \tau_{\text{max4}} = 3M_s \delta_4 / \sum s_i \delta_i^3. \quad (c)$$

Jeśli wyniki (b) i (c) przedstawić w postaci (3.18) i (3.19), to jako wielkości W_s oraz J_s trzeba wziąć

$$W_s = \sum s_i \delta_i^3 / 3\delta_{\text{max}}, \quad J_s = \sum s_i \delta_i^3 / 3, \quad (3.26)$$

gdzie δ_{max} — grubość największa ze wszystkich δ_i .

Dokładność wzorów (3.24)–(3.26) jest tym lepsza, im bardziej cienkościenny jest profil. Orientacyjnie biorąc jest ona rzędu 5%, o ile dla wszystkich boków profilu $s_i/\delta_i \geq 10$.

Zadania

1. W dowolnym cienkościennym profilu zmniejszono trzykrotnie długości boków, zwiększając jednocześnie dwukrotnie grubości ścianek. Czy ten zmodyfikowany profil jest mniej, czy bardziej sztywny na skręcanie i czy jest on lżejszy, czy cięższy?

Odp. $(J_s)_{\text{modyf.}} = 2,67 (J_s)_{\text{pierw.}}$, $Q_{\text{modyf.}} = 0,67 Q_{\text{pierw.}}$, a więc zmodyfikowany profil jest lżejszy i sztywniejszy.

2. W rurze (rys. 3.21a) nie zespawano brzegów $A-A$. Biorąc dane, jak w zadaniu 3 art. 3.5, określić, jak zmieniają się wartości τ i Θ .

Rozwiązanie. Gdy nie ma spoiny, rura staje się profilem otwartym, w którym $s \approx 81 \text{ cm}$, $\delta = 0,4 \text{ cm}$. Wartość τ_{\max} i Θ są teraz

$$\tau_{\max} = 3M_s/s\delta^2 \approx 1390 \text{ MPa}, \quad \Theta = 3M_s/Gs\delta^3 = \tau_{\max}/G\delta,$$

podczas gdy poprzednie wartości były $\tau_0 = 24 \text{ MPa}$ i

$$\Theta_0 = M_s s/4GF^2\delta = \tau_0 s/2GF,$$

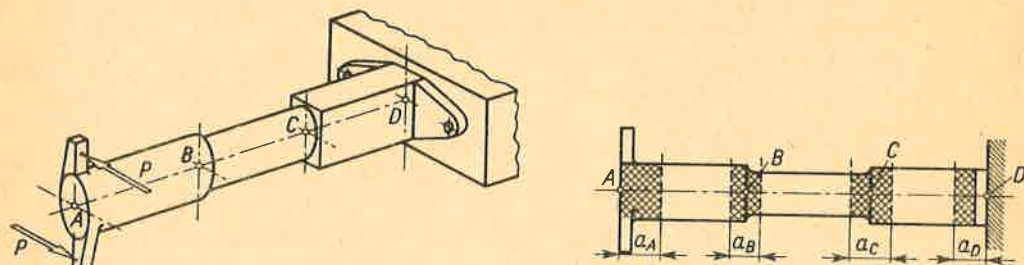
skąd mamy $\tau_{\max}/\tau_0 \approx 58$ i $\Theta/\Theta_0 = (\tau_{\max}/\tau_0)(2F/s\delta) \approx 1110$. Widać, że taka modyfikacja zmienia radykalnie właściwości ustroju. Ponieważ dla większości materiałów wartość $\tau_{pl} \ll \tau_{\max} = 1390 \text{ MPa}$, taka rozcięta rura ulegnie zniszczeniu.

3. Rurę, jak w zadaniu 3 art. 3.5, o długości $l = 2 \text{ m}$ skrócono o kąt $\varphi = 0,01 \text{ rad}$. Obliczyć naprężenia, gdy rura jest ze spoiną $A-A$ i gdy tej spoiny nie ma. $G = 8,0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie. Zadanie jest odwrotne do poprzedniego. Wykorzystując wyniki zadania poprzedniego mamy dla rury ze spoiną $\tau_0 = 2GF\Theta_0/s = 2GF\varphi/l_s = 23,5 \text{ MPa}$, a dla rury bez spoiny $\tau_{\max} = \Theta G\delta = G\delta\varphi/l \approx 1,6 \text{ MPa}$. Przy takim sformułowaniu zadania naprężenia w rurze rozciętej są o rząd wielkości mniejsze niż w pełnej.

3.7. Przykłady zastosowania teorii

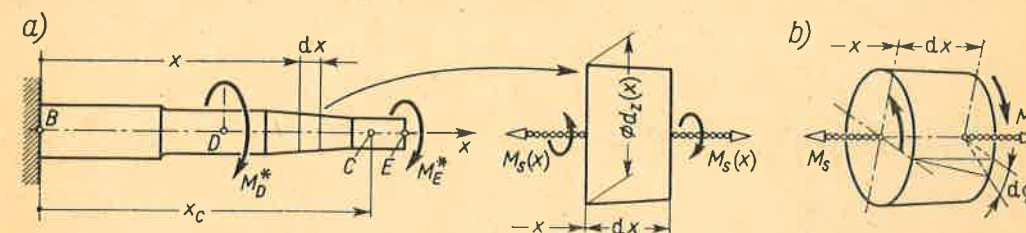
Określenie naprężeń i odkształceń podane w art. 3.3÷3.6 odpowiada najprostszemu obciążeniu pręta momentami przyłożonymi w przekrojach końcowych. Przypadek taki można przyrównać do najprostszego przypadku rozciągania (rys. 1.13), z tym zastrzeżeniem, że ostateczne wyniki określające τ_{\max} i Θ , czyli wzory (3.18) i (3.19), mają odmienny charakter i ciężar gatunkowy niż uniwersalne wzory (1.9) i (1.10) przy rozciąganiu. O ile bowiem wzór (1.9) dawał kompletną informację o naprężeniach σ w każdym punkcie przekroju, to analogiczny wzór (3.18) stanowi jedynie informację wrywkową, dotyczącą jedynie τ_{\max} . Druga różnica — to zależność τ_{\max} nie tylko od wymiarów, lecz i kształtu przekroju. Drastycznym tego przykładem jest zadanie 2 art. 3.6, gdzie na pozór drobna różnica wywołuje ogromne skutki. Z tego powodu obliczenie naprężeń przy skręcaniu



Rys. 3.25. Stosowalność teorii skręcania do obiektów rzeczywistych

musi być zawsze poprzedzone określeniem, do jakiej kategorii należy przekrój pręta (cienkościenny rurowy, kołowy itp.), jakie są charakterystyczne cechy rozkładu τ oraz jak wyrażają się wielkości W_s i J_s w funkcji wymiarów przekroju.

Podobnie jak przy rozciąganiu, tak i w przypadku skręcania przejście od teoretycznego modelu skręcanego pręta do rzeczywistego obiektu w postaci wału maszyny, łącznika itp. podlega pewnym ograniczeniom. Weźmy dla przykładu wałek AD o zmiennym (skokami) przekroju (rys. 3.25). Wprowadzenie momentu w przekroju A pod postacią pary sił P odbiega od teoretycznego modelu, albowiem w przekroju tym nie działają żadne naprężenia styczne. Istniejąca tu sytuacja przypomina analogiczny przypadek wprowadzenia sił wzdłużnych (rys. 2.1) i taka sama jest też odpowiedź. Opierając się mianowicie na zasadzie de Saint-Venanta dopuszczamy stosowanie teoretycznego modelu i wynikających zeń zależności dla przekrojów pręta leżących poza zakratkowanym odcinkiem o długości a_A rzędu średnicy wałka. To samo stwierdzenie dotyczy nagłych zmian przekroju w miejscach B i C (karbów) i w rezultacie przedział stosowalności teoretycznych wzorów ograniczony jest do niezakratkowanych na rys. 3.25 części wałka. Podobnie bez istotnych zmian można przenieść uwagi art. 2.1 w przypadku łagodnej zmienności przekroju, wprowadzenia większej liczby obciążeń itd.



Rys. 3.26. Analiza skręcania pręta, gdy M_s i J_s są zmienne

Uwzględniając te ograniczenia, przypadek wałka o zmiennej sztywności bądź zmiennym momencie skręcającym (rys. 3.26a) traktujemy jako szeregowe połączenie elementarnych prętów. Każdy z nich traktujemy jak przyrównany o długości dx i poprzecznych wymiarach odpowiadających ich lokalnym wartościom, a naprężenia τ_{\max} wyznaczamy z wzoru (3.18)

$$\tau_{\max} = M_s(x)/W_s(x), \quad (3.27)$$

w którym zarówno M_s , jak i W_s są funkcjami x . Podobnej modyfikacji ulega wzór (3.19)

$$\Theta = M_s(x)/GJ_s(x), \quad (3.28)$$

gdzie $J_s(x)$ — wartość J_s odpowiadająca lokalnym wymiarom przekroju. Na koniec kąt skręcenia φ przekroju C wyrażamy jako sumę elementarnych kątów $d\varphi$ (rys. 3.26b):

$$\varphi = \int_0^{x_c} d\varphi = \int_0^{x_c} \Theta dx = \int_0^{x_c} \frac{M_s(x) dx}{GJ_s(x)}, \quad (3.29)$$

stanowiącą odpowiednik podobnej zależności (2.3) w przypadku rozciągania.

Znajomość τ_{\max} w poszczególnych przekrojach jest niezbędna do oceny bezpieczeństwa całego zespołu metodą naprężeń dopuszczalnych. Ponieważ przy skręcaniu wszystkie elementy pręta są w tym samym stanie napięcia (czyste ścinanie), zatem w najgorszych warunkach znajdują się te elementy, w których naprężenie τ jest maksymalne. Przy wzroście

bowiem obciążenia w punktach tych pojawią się pierwsze trwałe odkształcenia i po odciążeniu pręt wykaże trwałe skręcenie, chociaż inne elementy zostały jeszcze sprężyste. W większości zagadnień budowy maszyn takie trwałe odkształcenia są niedopuszczalne⁽¹⁾. Spełnienie tego postulatu przy uwzględnieniu, że w tych niewralgicznych punktach występuje czyste ścinanie, wyraża się warunkiem

$$(\tau_{\max})_{\max} \leq k_t, \quad (3.30)$$

gdzie $(\tau_{\max})_{\max}$ — maksymalna wartość τ_{\max} w niebezpiecznym przekroju, k_t — naprężenie dopuszczalne w stanie czystego ścinania określone wzorem (3.8).

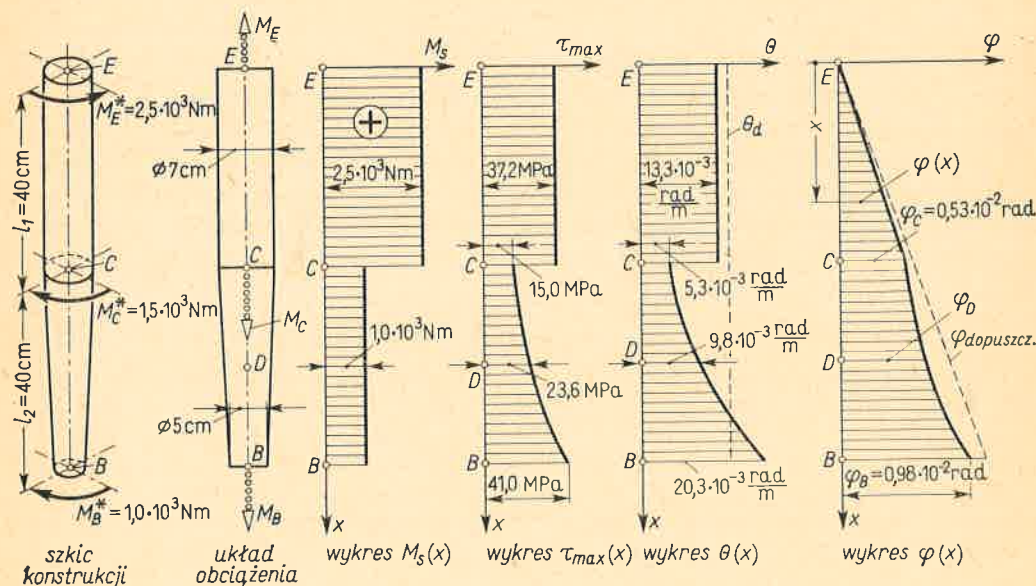
W wielu zagadnieniach równoległe do warunku bezpieczeństwa (3.30) wymaga się, aby kąty skręcenia nie były za duże. Warunek ten ma postać

$$|\theta|_{\text{sr}} \leq \theta_d, \quad (3.31)$$

gdzie $|\theta|_{\text{sr}}$ — średnia absolutna wartość skręcenia względnego między charakterystycznymi przekrojami, θ_d — wartość nieprzekraczalna ze względów użytkowych.

Zadania

1. Sprawdzić bezpieczeństwo i określić odkształcenia wałka (rys. 3.27), jeżeli $R_c = 300$ MPa, wymagany współczynnik bezpieczeństwa $n_c = 3,5$, zaś $G = 8,0 \cdot 10^4$ MPa.



Rys. 3.27. Przykład analizy pręta skręcanego

Rozwiązanie. Po przedstawieniu obciążenia jako wektorów i zbudowaniu wykresu M_s , obliczamy z (3.27) wartości $\tau_{\max}(x)$. Na przykład w przekrojach B i D , w których

$$(W_s)_B = (W_0)_B = \pi 5^3/16 = 24,5 \text{ cm}^3, \quad (W_s)_D = (W_0)_D = \pi 6^3/16 = 42,4 \text{ cm}^3,$$

⁽¹⁾ Od tego postulatu istnieją wyjątki, omówione w rozdz. 14.

mamy odpowiednio

$$(\tau_{\max})_B = 10^3/24,5 \cdot 10^{-6} \approx 41 \text{ MPa}, \quad (\tau_{\max})_D = 10^3/42,4 \cdot 10^{-6} = 23,6 \text{ MPa}.$$

Z otrzymanego wykresu $\tau_{\max}(x)$ widzimy, że niebezpieczny jest przekrój B , w którym $(\tau_{\max})_B = 41$ MPa. Ponieważ $k_t = 0,58 R_c/n_c \approx 50$ MPa, zatem postulat (3.30) jest spełniony i konstrukcja jest prawidłowa pod względem wytrzymałości.

Z kolei obliczamy z wzoru (3.28) względne skręcenie $\theta(x)$. W przekrojach C i D na przykład mamy

$$(J_s)_C = (J_0)_C = \pi 7^4/32 = 236 \text{ cm}^4, \quad (J_s)_D = (J_0)_D = \pi 6^4/32 = 127 \text{ cm}^4,$$

a ponieważ $G = 8,0 \cdot 10^4$ MPa = $8,0 \cdot 10^{10}$ N/m², więc

$$\theta'_C = 10^3/8,0 \cdot 10^{10} \cdot 236 \cdot 10^{-8} = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m},$$

$$\theta''_C = 2,5 \cdot 10^3/8 \cdot 10^{10} \cdot 236 \cdot 10^{-8} = 13,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m},$$

$$\theta_D = 10^3/8,0 \cdot 10^{10} \cdot 127 \cdot 10^{-8} = 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m}.$$

Dwie różne wartości θ'_C i θ''_C w przekroju C odpowiadają zachodzącej w tym przekroju raptownej zmianie M_s .

Z wykresu $\theta(x)$ obliczamy kąt $\varphi(x)$ skręcenia przekrojów względem przekroju E przyjętego za nieruchomy. Zgodnie z wzorem (3.29) dla przekroju x kąt ten

$$\varphi(x) = \int_0^x d\varphi = \int_0^x \theta dx$$

jest równy polu wykresu $\theta(x)$ w granicach $0, x$. Na odcinku EC jest $\theta(x) = \text{const} = 13,3 \cdot 10^{-3}$ rad/cm daje to w wyniku liniową zależność $\varphi(x)$. Na odcinku CB jest $\theta(x) \neq \text{const}$ i $\varphi(x)$ obliczamy przez analityczne lub numeryczne całkowanie. Stosując tę drugą metodę obliczmy kąty φ_D i φ_B . Zastępując wykres $\theta(x)$ dwoma odcinkami prostych mamy

$$\varphi_D = \varphi_C + 0,5 (\theta'_C + \theta_D) l_{CD} = 0,53 \cdot 10^{-2} + 0,5 (5,3 + 9,8) \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 \approx 0,68 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

i podobnie

$$\varphi_B = 0,68 \cdot 10^{-2} + 0,5 (9,8 + 20,3) \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 = 0,98 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 0,56^\circ.$$

W wyniku mamy wykres $\varphi(x)$ umożliwiający ocenę sztywności konstrukcji według warunku (3.31). Jeśli przyjąć $\theta_d = 0,8^\circ/\text{m} \approx 14 \cdot 10^{-3}$ rad/m, to w uznanych za charakterystyczne przekrojach C i B dopuszczalne kąty φ są odpowiednio $0,56 \cdot 10^{-2}$ rad i $1,12 \cdot 10^{-2}$ rad. Jak widać, są one większe od rzeczywistych, a więc konstrukcja jest prawidłowa⁽¹⁾.

2. Co zmieni się w przykładzie z rys. 3.27, jeśli przekrój C będziemy uważać za nieruchomy?

Odp. Zmiana wystąpi tylko na wykresie $\varphi(x)$ przez przesunięcie osi odciętych tak, aby teraz było $\varphi_C = 0$. Nowe wartości $\varphi_E = -\varphi_C$, $\varphi_B = \varphi_B - \varphi_C$.

3. W wałku (rys. 3.27) zwiększono wszystkie średnice 1,2 raza. Jak zmieniają się wykresy τ_{\max} , θ , φ ?

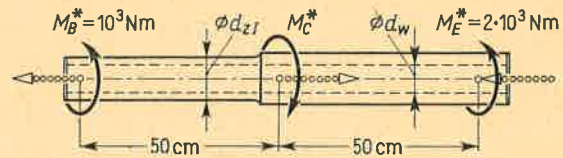
Odp. Wykresy nie zmieniają charakteru, ale zmieniają proporcjonalnie wszystkie rzędne, a mianowicie rzędne τ_{\max} maleją w stosunku $(1,2)^3 = 1,73$ razy, rzędne θ i φ w stosunku $(1,2)^4 = 2,07$ razy.

4. Stalowy wałek (rys. 3.7) ma spełniać postulat (3.30) przy $k_t = 20$ MPa oraz postulat (3.31) przy $\theta_d = 0,25^\circ/\text{m} = 4,4 \cdot 10^{-3}$ rad/m. Wyznaczyć średnicę $(d_z)_{\text{graniczne}}$, dla której spełnienie obydwóch postulatów jest jednoczesne. $G = 8,0 \cdot 10^4$ MPa.

Odp. $(d_z)_{\text{graniczne}} = 2k_t/G \theta_d = 11,4$ cm.

⁽¹⁾ W rzeczywistości wartość θ_d jest znacznie mniejsza. W budowie maszyn zazwyczaj $\theta_d = 0,25^\circ/\text{m} = 4,4 \cdot 10^{-3}$ rad/m.

5. Wyznaczyć średnice d_{zI} i d_{zII} wałka drążonego, w którym $d_w = 6 \text{ cm} = \text{const}$ (rys. 3.28) i $k_t = 20 \text{ MPa}$. Czy postulat $|\theta| \leq \theta_d = 0,33^\circ/\text{m}$ jest spełniony? $G = 8,0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.



Rys. 3.28.

Odp. Z warunku (3.30) wymagane wskaźniki są $(W_o)_I = 50 \text{ cm}^3$, $(W_o)_{II} = 100 \text{ cm}^3$. Rozwiązując metodą prób równanie (3.15) względem d_z mamy $(d_z)_I = 7,53 \text{ cm}$ i $(d_z)_{II} = 8,69 \text{ cm}$. Postulat $|\theta| \leq \theta_d$ spełniony jest dla prawej części, a nie spełniony dla lewej.

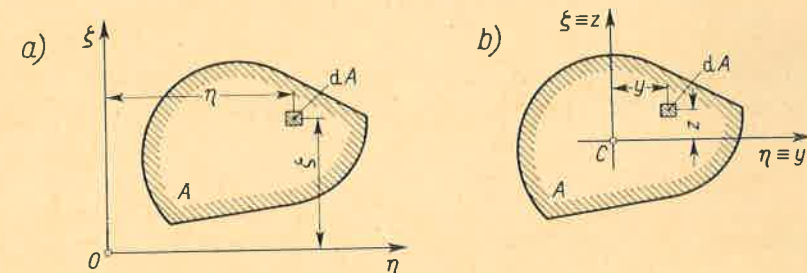
4 MOMENTY BEZWŁADNOŚCI PŁASKICH PRZEKROJÓW PRĘTA⁽¹⁾

4.1. Moment bezwładności przekroju względem osi

Już w rozdziale 3 wprowadzono pewne nowe wielkości geometryczne W_s i J_s związane z wymiarami przekroju i charakteryzujące jego właściwości w zagadnieniach skrećania. Podobną sytuację mamy w zagadnieniach zginania, gdzie występują całki typu

$$J_\eta = \int_A \zeta^2 dA, \quad (4.1a)$$

w których każde elementarne pole dA mnożone jest przez kwadrat odległości tego pola od obranej osi η , a całkowanie obejmuje całe pole A przekroju pręta (rys. 4.1a). Tak zdefiniowaną wielkość J_η nazywamy *momentem bezwładności przekroju względem osi η* . Moment ten ma wymiar cm^4 (lub m^4), jest zawsze dodatni jako suma samych dodatnich



Rys. 4.1. Definicja momentu bezwładności względem osi

składowików $\zeta^2 dA$, a jego wartość zależy od kształtu i wymiarów przekroju oraz od położenia osi η względem przekroju. Gdy oś η jest centralna (rys. 4.1b), czyli gdy przechodzi ona przez środek ciężkości C przekroju, wówczas w wyrażeniu (4.1a) zamiast η i ζ piszemy y i z , czyli

$$J_y = \int_A z^2 dA, \quad (4.1b)$$

i J_y nazywamy *centralnym momentem bezwładności względem osi y* .

⁽¹⁾ Rozdział ten ma charakter pomocniczy, opisuje bowiem pewne geometryczne wielkości cechujące przekrój pręta. Wielkości te są głównie stosowane w zagadnieniach zginania prętów i z tego powodu utarło się omawianie ich w nauce wytrzymałości materiałów.

Podobnie definiujemy moment bezwładności względem osi ζ

$$J_{\zeta} = \int_A \eta^2 dA \quad (4.2a)$$

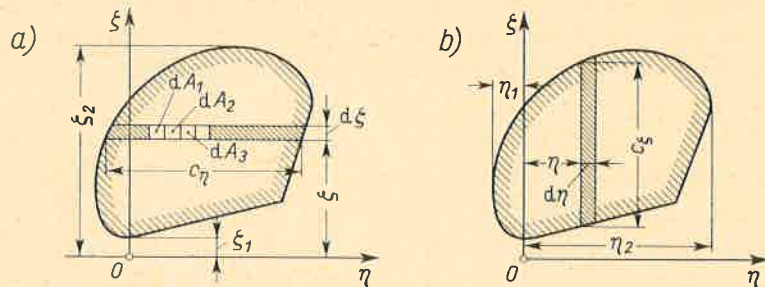
i jego szczególną wartość, gdy oś ζ jest centralna, czyli

$$J_z = \int_A y^2 dA \quad (4.2b)$$

jako centralny moment bezwładności względem osi z .

Analityczne określenie J_{η} sprowadza się do obliczenia całki pojedynczej. Zauważmy, że wszystkie pola dA elementarnego paska równoległego do osi η mają tę samą rzędną (rys. 4.2a). Wobec tego suma iloczynów $\zeta^2 dA$ dla elementów tego paska jest

$$\zeta^2 dA_1 + \zeta^2 dA_2 + \dots = \zeta^2 \sum dA = \zeta^2 c_{\eta} d\zeta, \quad (a)$$



Rys. 4.2. Obliczenie momentów J_{η} , J_{ζ} przez całkowanie

gdzie c_{η} — długość paska w kierunku osi η będąca, jak widać, funkcją ζ . Dla całego przekroju J_{η} jest sumą wyrażeń (a), gdy ζ zmienia się w przedziale ζ_1, ζ_2 , tj.

$$J_{\eta} = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} c_{\eta} \zeta^2 d\zeta. \quad (4.3a)$$

Podobnie dzieląc pole A na paski równoległe do osi ζ obliczamy moment bezwładności J_{ζ} (rys. 4.2b) jako

$$J_{\zeta} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} c_{\zeta} \eta^2 d\eta, \quad (4.3b)$$

przy czym c_{ζ} — długość paska w kierunku osi ζ jest na ogół funkcją η . Występujące we wzorach (4.3) granice całkowania są wielkościami algebraicznymi i w przypadku takim, jak na rys. 4.2, mamy $\zeta_1 > 0$, $\zeta_2 > 0$, $\eta_2 > 0$, ale $\eta_1 < 0$.

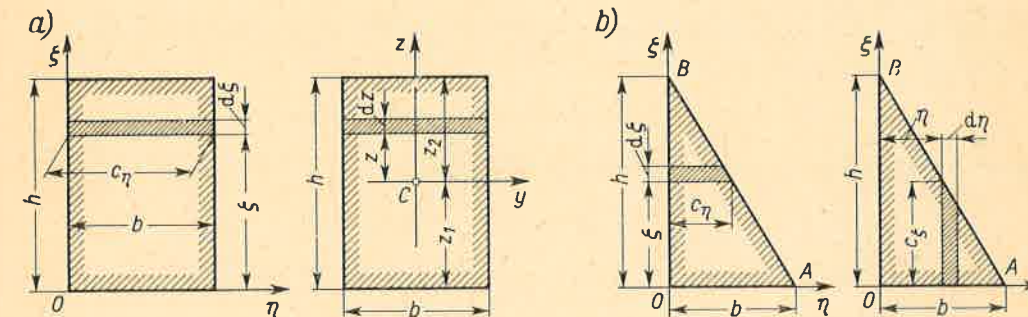
Dla przykładu obliczymy moment bezwładności prostokąta raz względem osi η , drugi raz względem osi centralnej y (rys. 4.3a). Podstawiając we wzorze (4.3a) $c_{\eta} = c_y = b = \text{const}$ oraz $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = h$ otrzymujemy

$$J_{\eta} = \int_0^h b \zeta^2 d\zeta = b \left| \frac{\zeta^3}{3} \right|_0^h = \frac{bh^3}{3}, \quad (b)$$

a dla drugiego przypadku, gdy $z_1 = -h/2$, $z_2 = h/2$,

$$J_y = \int_{-h/2}^{h/2} bz^2 dz = b \left| \frac{z^3}{3} \right|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{24} - \frac{b(-h)^3}{24} = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.4a)$$

Jak widać, mamy tu $J_{\eta} = 4J_y$, co potwierdza, że położenie osi odniesienia ma istotny wpływ na wartość momentu bezwładności.



Rys. 4.3. Przykłady określenia momentów bezwładności

W podobny sposób wyznaczamy momenty bezwładności prostokąta względem osi ζ bądź względem osi centralnej z . W rezultacie otrzymujemy $J_{\zeta} = hb^3/3$ oraz

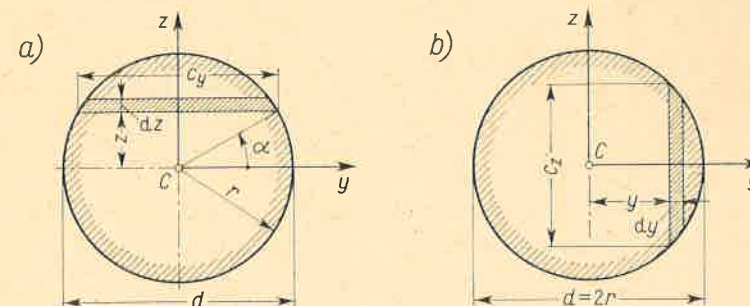
$$J_z = \frac{hb^3}{12}. \quad (4.4b)$$

Przy obliczeniu J_{η} dla trójkąta prostokątnego (rys. 4.3b) mamy $c_{\eta} = b(h-\zeta)/h \neq \text{const}$ i z wzoru (4.3a)

$$J_{\eta} = \int_0^h \frac{b(h-\zeta)}{h} \zeta^2 d\zeta = \frac{bh^3}{12}. \quad (c)$$

Podobnie określamy J_{ζ} , wyznaczając $c_{\zeta} = h(b-\eta)/b$, skąd po podstawieniu do (4.3b) i scałkowaniu od 0 do b

$$J_{\zeta} = hb^3/12. \quad (d)$$



Rys. 4.4. Obliczenie J_y i J_z dla przekroju kołowego

Dla przekroju kołowego (rys. 4.4a, b) mamy odpowiednio

$$c_y = 2\sqrt{r^2 - z^2}, \quad c_z = 2\sqrt{r^2 - y^2},$$

skąd wynika, że centralne momenty bezwładności J_y i J_z

$$J_y = \int_{-r}^{+r} 2\sqrt{r^2 - z^2} z^2 dz, \quad J_z = \int_{-r}^{+r} 2\sqrt{r^2 - y^2} y^2 dy$$

są wzajemnie równe, gdyż określone są jednakowymi zależnościami. Obliczenie uprościmy, biorąc jako zmienną kąt α . Wtedy

$$z = r \sin \alpha, \quad dz = r \cos \alpha d\alpha, \quad c_y = 2r \cos \alpha,$$

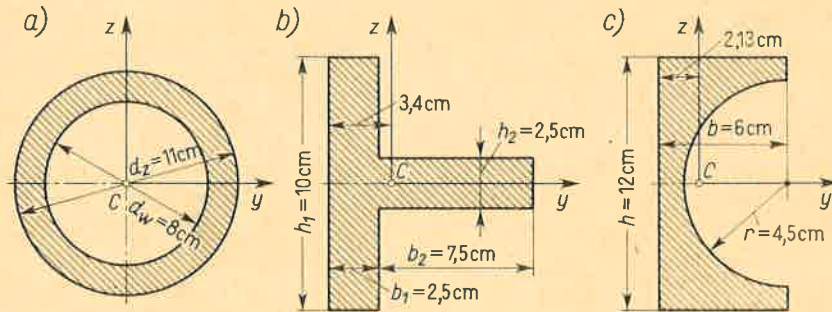
a granice całkowania są $\alpha_1 = -\pi/2$ i $\alpha_2 = \pi/2$, skąd

$$J_y = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 2r^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{r^4}{4} \left[\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4} \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\pi r^4}{4}$$

i ostatecznie dla kołowego przekroju mamy

$$J_y = J_z = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (4.5)$$

W wielu przypadkach obliczenia można uprościć, jeśli przekrój składa się z figur, których momenty bezwładności *względem tej samej osi* są znane. Moment bezwładności przekroju jest wtedy równy sumie⁽¹⁾ momentów bezwładności części składowych.



Rys. 4.5. Przykłady do obliczenia J_y przekrojów złożonych

Zadania

1. Dla trójkąta (rys. 4.3b) obliczyć J_ζ , gdy oś ζ przechodzi przez: a) wierzchołek A ; b) środek ciężkości przekroju.

Odp. a) $J_\zeta = b^3 h/4$, b) $J_\zeta = b^3 h/36$.

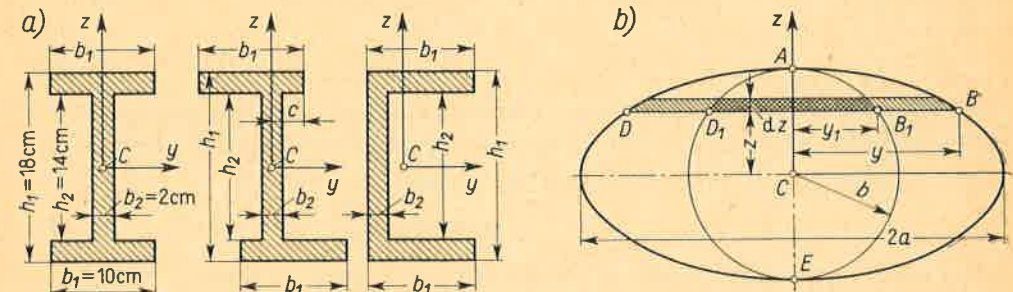
⁽¹⁾ Przy wycięciu z danego przekroju pewnych części, momenty bezwładności części usuniętych odejmujemy.

2. Wyznaczyć J_y dla przekrojów podanych na rys. 4.5.

Odp. a) $J_y = \pi(d_z^4 - d_w^4)/64 = 517 \text{ cm}^4$; b) $J_y = 218 \text{ cm}^4$; c) $J_y = (bh^3/12) - (\pi r^4/8) = 703 \text{ cm}^4$.

3. Który z podanych przekrojów (rys. 4.6a) ma największą wartość J_y ?

Odp. Wartości są jednakowe, $J_y = (b_1 h_1^3/12) - [(b_1 - b_2) h_2^3/12] = 3030 \text{ cm}^4$.



Rys. 4.6.

4. W przekroju (rys. 4.2) powiększono 1,5 raza rzędne ζ nie zmieniając odciętych. Jak zmienia się J_η oraz J_ζ ?

Odp. Przy takim przekształceniu nowe współrzędne η' , ζ' oraz c'_η i c'_ζ związane są z poprzednimi: $\eta' = \eta$, $\zeta' = 1,5\zeta$ i $c'_\eta = c_\eta$, $c'_\zeta = 1,5c_\zeta$. Zależność (4.1a) ma teraz postać

$$J'_\eta = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} c'_\eta (\zeta')^2 d\zeta' = 1,5^3 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} c_\eta \zeta^2 d\zeta = 1,5^3 J_\eta = 3,375 J_\eta$$

i podobnie z (4.2a) $J'_\zeta = 1,5 J_\zeta$.

5. Wykorzystując to, że elipsę $ABED$ otrzymujemy zwiększając odcięte koła AB_1ED_1 w stosunku a/b , tj. $y = ay_1/b$ (rys. 4.6b), obliczyć J_y i J_z dla przekroju eliptycznego.

Odp. Biorąc wyniki zadania 4 i wzór (4.5), mamy

$$J_y = \left(\frac{a}{b}\right) \frac{\pi b^4}{4} = \frac{\pi a b^3}{4}, \quad J_z = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{\pi b^4}{4} = \frac{\pi a^3 b}{4}. \quad (e)$$

4.2. Momenty bezwładności względem osi równoległych

Weźmy dowolny przekrój (rys. 4.7a), dla którego znane są *centralne* momenty bezwładności J_y oraz J_z . Obliczmy teraz momenty J_η i J_ζ względem osi η i ζ równoległych do centralnych osi y i z . Zgodnie z definicją (wzory 4.1a i 4.2a) mamy

$$J_\eta = \int_A \zeta^2 dA, \quad J_\zeta = \int_A \eta^2 dA. \quad (a)$$

Wstawiając do tych wyrażeń odczytane z rysunku zależności $\zeta = z + \zeta_C$, $\eta = y + \eta_C$ otrzymujemy po rozwinięciu

$$J_\eta = \int_A (z + \zeta_C)^2 dA = \int_A z^2 dA + 2\zeta_C \int_A z dA + \zeta_C^2 \int_A dA, \quad (b)$$

$$J_\zeta = \int_A (y + \eta_C)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2\eta_C \int_A y dA + \eta_C^2 \int_A dA, \quad (c)$$

przy czym ζ_C i η_C jako wielkości stałe wnosimy przed znak całki. Pierwsze składniki wyrażeń (b) i (c) są centralnymi momentami J_y oraz J_z (wzory 4.1b i 4.2b) i są znane z założenia. Trzecie składniki są odpowiednio $A\zeta_C^2$ i $A\eta_C^2$, albowiem $\int_A dA$ jest równa polu A przekroju. Wreszcie zauważmy, że całki

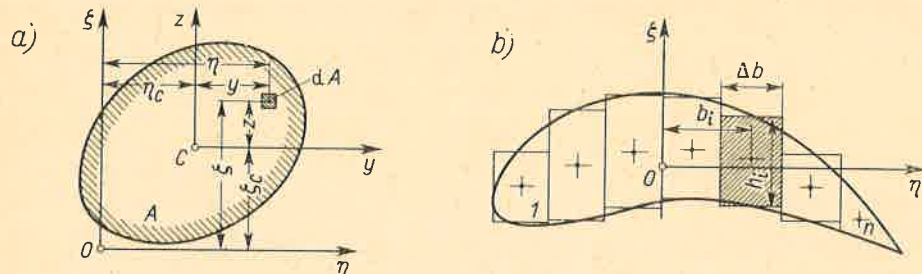
$$\int_A z dA, \quad \int_A y dA$$

są momentami statycznymi pola przekroju odpowiednio względem centralnych osi y i z i z tego powodu, jak wiemy z kursu mechaniki ogólnej, są one równe zeru.

W wyniku zależności (b) i (c) przybierają postać

$$J_\eta = J_y + A\zeta_C^2, \quad J_\zeta = J_z + A\eta_C^2, \quad (4.6)$$

dającą szukaną odpowiedź. Budowa wzorów (4.6), tzw. wzorów Steinerja, wskazuje, że z całej mnogości momentów J_η (lub J_ζ) dla rodziny równoległych osi η (lub ζ) centralny moment bezwładności J_y (lub J_z) jest najmniejszy. Jeśli więc mamy zagadnienie proste



Rys. 4.7. Sformułowanie wzorów Steinerja i ich zastosowanie

(dane: J_y, J_z, A, η_C i ζ_C , szukane: J_η, J_ζ), to składniki $A\zeta_C^2$ i $A\eta_C^2$ należy odpowiednio dodać do znanych J_y i J_z . Gdy zagadnienie jest odwrotne (dane: $J_\eta, J_\zeta, A, \eta_C, \zeta_C$, szukane: J_y, J_z), składniki te należy odpowiednio odjąć od znanych J_η i J_ζ .

Dzięki wzorom Steinerja obliczenie momentów bezwładności jest znacznie uproszczone, albowiem stosowane w praktyce przekroje stanowią kombinację tylko niewielu figur prostych (prostokąt, koło, trójkąt). To samo jest w przypadku przekrojów składanych z tzw. profili znormalizowanych (rys. 3.22), dla których tablice podają położenie ich środków ciężkości i ich centralne momenty bezwładności.⁽¹⁾ Innym zastosowaniem tych wzorów jest określenie momentów w sposób przybliżony, gdy przekrój podany jest tylko wykreślnie (rys. 4.7b). Przy obliczeniu na przykład momentu J_ζ przekrój dzielimy szeregiem równoległych linii i każdy pasek zastępujemy prostokątem. Moment bezwładności paska „i” jest

$$(J_\zeta)_i \approx (\Delta b^3 h_i/12) + \Delta b h_i b_i^2, \quad (d)$$

a całkowity moment J_ζ

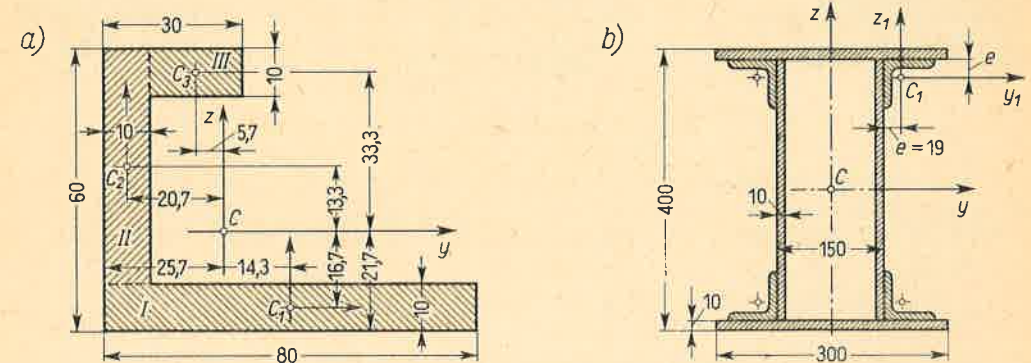
$$J_\zeta \approx (\Delta b^3/12) \sum h_i + \Delta b \sum h_i b_i^2. \quad (e)$$

⁽¹⁾ Patrz na przykład: *Mechanik*, t.II, cz. IA, str. 358 ÷ 367, ponadto *Polskie Normy* PN/H-93401-PN/H-93407.

Zadania

1. Dla podanego przekroju (rys. 4.8a) wyznaczyć momenty J_y i J_z .

Rozwiązanie. Dzielimy przekrój na prostokąty I, II i III, dla których określamy położenie ich środków ciężkości C_1, C_2, C_3 . Po wyznaczeniu położenia środka ciężkości C całego przekroju określamy współrzędne środków C_1, C_2, C_3 w układzie osi y, z , który dla składowych prostokątów jest



Rys. 4.8. Dane do zadań 1 i 2 (wymiary w mm)

niecentralny. W przyjętej więc symbolice (rys. 4.7a) współrzędne te są η_C i ζ_C , na przykład dla prostokąta II: $\eta_C = -2,07$ cm, $\zeta_C = 1,33$ cm. Z kolei obliczamy „własne” centralne momenty dla części składowych. Dla prostokąta II na przykład: $(J_y)_{wlasne} = 1 \cdot 5^3/12 = 10,4$ cm⁴, $(J_z)_{wlasne} = 5 \cdot 1^3/12 = 0,4$ cm⁴ itd. Całość obliczeń ujmujemy w poniższej tabelicy, w której znaczenie poszczególnych kolumn jest oczywiste. W wyniku mamy $J_y = 11,3 + 53,3 = 64,6$ cm⁴, $J_z = 82,1$ cm⁴.

Część	$J_{y,wlasne}$ cm ⁴	A cm ²	ζ_C cm	$A\zeta_C^2$ cm ⁴	$J_{z,wlasne}$ cm ⁴	A cm ²	η_C cm	$A\eta_C^2$ cm ⁴
I	$8 \cdot 1^3/12 \approx 0,7$	8,0	-1,67	22,3	$1 \cdot 8^3/12 = 42,7$	8,0	1,43	16,3
II	$1 \cdot 5^3/12 = 10,4$	5,0	+1,33	8,8	$5 \cdot 1^3/12 = 0,4$	5,0	-2,07	21,4
III	$2 \cdot 1^6/12 = 0,2$	2,0	+3,33	22,2	$1 \cdot 2^3/12 = 0,7$	2,0	-0,57	0,6
Σ	11,3 cm ⁴			53,3 cm ⁴	43,8 cm ⁴			38,3 cm ⁴

2. Wyznaczyć J_y i J_z symetrycznego przekroju (rys. 4.8b), jeśli dla każdego z kątowników: $A = 10$ cm², $(J_y)_{wlasne} = (J_z)_{wlasne} = 38$ cm⁴.

Odp. $J_y \approx 43,8 \cdot 10^3$ cm⁴, $J_z \approx 11,9 \cdot 10^3$ cm⁴.

3. Obliczyć J_y dla przekroju w kształcie półkola (rys. 4.9a).

Rozwiązanie. Zadanie jest przykładem zadania odwrotnego. Moment $J_\eta = \pi r^4/8$ jest równy połowie J_y (wzór 4.5), a ponieważ $\zeta_C = 4r/3\pi$, z wzoru (4.6) mamy

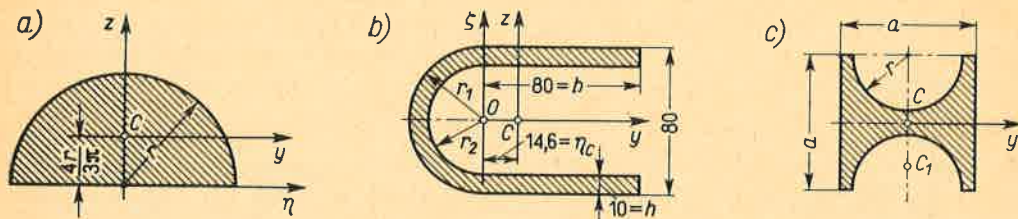
$$J_y = (\pi r^4/8) - (\pi r^2/2) (4r/3\pi)^2 \approx 0,1097 r^4.$$

4. Obliczyć J_z dla przekroju (rys. 4.9b).

Rozwiązanie. Po określeniu środka ciężkości C obliczamy

$$J_\zeta = \frac{\pi(r_1^4 - r_2^4)}{8} + \frac{2hb^3}{3} \approx 410 \text{ cm}^4 \quad \text{oraz} \quad J_z = J_\zeta - A\eta_C^2 = 352 \text{ cm}^4.$$

Widać, że wygodniej jest tu obliczyć najpierw J_z względem osi niecentralnej, a dopiero potem przejść do osi centralnej z .



Rys. 4.9. Dane do zadań 3, 4 i 5

5. Ktoś obliczając J_y dla przekroju (rys. 4.9c) podał wynik: $J_y = (a^4/12) - 2[(\pi r^4/8) + (\pi r^2/2)(a/2)^2]$. Czy wynik ten jest dobry?

Odp. Nie. Dla półkola należy obliczyć $(J_y)_{wlasne}$ względem C_1 i dopiero potem obliczyć $(J_y)_{wlasne} + (\pi r^2/2)(CC_1)^2$.

4.3. Odśrodkowy moment bezwładności. Definicja głównych osi

W teorii zginania prętów występują również całki typu

$$J_{\eta\zeta} = \int_A \eta\zeta dA, \tag{4.7}$$

w których każde elementarne pole dA mnożone jest przez iloczyn jego współrzędnych prostokątnych, a sumowanie (całkowanie) rozciąga się na całe pole A przekroju (rys. 4.1a). Wielkość $J_{\eta\zeta}$ nazywamy *odśrodkowym momentem bezwładności przekroju względem osi η i ζ* . Podobnie jak momenty bezwładności J_η, J_ζ , ma on wymiar cm^4 , a jego wartość zależy od kształtu i wymiarów przekroju oraz od położenia układu osi względem przekroju. Podobnie też sygnalizujemy przypadek szczególny, gdy osie η, ζ są centralne, pisząc J_{yz} zamiast $J_{\eta\zeta}$.

Poza wyliczonymi podobieństwami istnieją i różnice. Zasadniczą różnicą jest, że zależnie od obioru układu osi moment $J_{\eta\zeta}$ może być dodatni, ujemny lub równy zeru. To ostatnie jest widoczne, gdy przekrój jest symetryczny i jedna z osi układu η, ζ jest osią symetrii (rys. 4.10a). Każdemu elementowi dA o współrzędnych η, ζ odpowiada taki sam element o współrzędnych η i $\zeta_1 = -\zeta$ i suma $\eta\zeta dA + \eta\zeta_1 dA = 0$, a co za tym idzie i cała suma, tj. $J_{\eta\zeta} = 0$.

Dla każdego punktu O dowolnego przekroju można zawsze tak dobrać osie $\eta_\alpha, \zeta_\alpha$ (rys. 4.10b), żeby moment odśrodkowy $(J_{\eta\zeta})_\alpha$ był równy zeru. Aby tego dowieść, zbadajmy zmianę tego momentu przy obrocie osi. Załóżmy, że $(J_{\eta\zeta})_0$ w stadium I jest znane. Przy stopniowym obrocie układu osi wartość tego momentu ulega zmianie ciągłej. Gdy $\alpha = 90^\circ$ (stadium III), wówczas z rysunku widać, że współrzędne pola dA są

$$\eta_{90} = \zeta_0, \quad \zeta_{90} = -\eta_0, \tag{a}$$

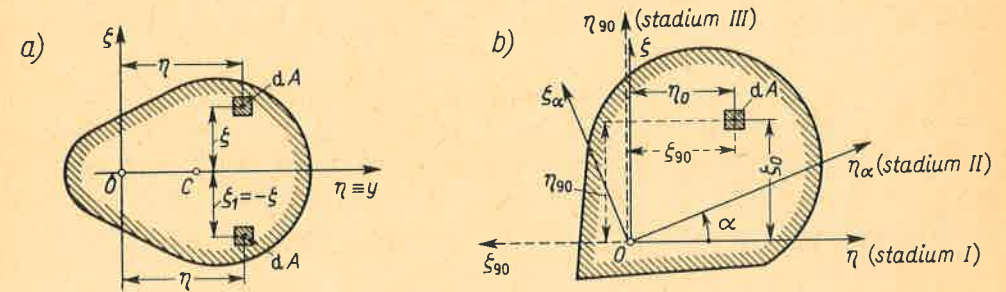
a elementarny moment odśrodkowy w tym stadium III

$$(dJ_{\eta\zeta})_{90} = \eta_{90} \zeta_{90} dA = -\eta_0 \zeta_0 dA = -(dJ_{\eta\zeta})_0. \tag{b}$$

Z tej zależności wynika w konsekwencji, że

$$(J_{\eta\zeta})_{90} = -(J_{\eta\zeta})_0. \tag{c}$$

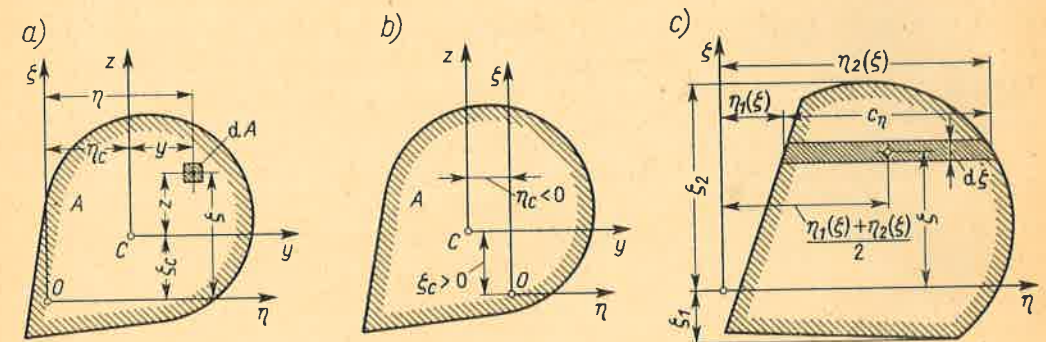
Skoro więc przy obrocie osi o kąt $\alpha = 90^\circ$ następuje zmiana znaku $J_{\eta\zeta}$, to musi istnieć pośrednie położenie osi, w którym $(J_{\eta\zeta})_\alpha = 0$. Ten szczególny układ nazywamy *głównym dla obranego punktu O* . Jeśli tym punktem jest środek ciężkości przekroju, to taki układ



Rys. 4.10. Jakościowa analiza odśrodkowego momentu bezwładności

osi nazywamy *głównym centralnym*. Dla przekroju symetrycznego (rys. 4.10a) jest oczywiste, że oś symetrii oraz prostopadła do niej druga centralna oś są *głównymi centralnymi*.

Sformułujmy obecnie wzór analogiczny do wzorów Steinera. Załóżmy mianowicie, że odśrodkowy moment J_{yz} jest znany i obliczmy moment $J_{\eta\zeta}$ względem układu osi η, ζ



Rys. 4.11. Obliczenie momentu odśrodkowego

równoległych do centralnego układu y, z (rys. 4.11a). Z rysunku odczytujemy, że $\eta = y + \eta_c, \zeta = z + \zeta_c$, wobec czego

$$\begin{aligned} J_{\eta\zeta} &= \int_A \eta\zeta dA = \int_A (y + \eta_c)(z + \zeta_c) dA = \\ &= \int_A yz dA + \eta_c \zeta_c \int_A dA + \eta_c \int_A z dA + \zeta_c \int_A y dA. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu, że dwie ostatnie całki, jako momenty statyczne względem osi centralnych, są równe zero, mamy zależność

$$J_{\eta\zeta} = J_{yz} + A \eta_c \zeta_c. \quad (4.8)$$

Jej znaczenie i zastosowanie jest takie samo jak wzorów Steinera dla momentów J_η i J_ζ . Dla uniknięcia błędów, należy pamiętać, że układy y, z oraz η, ζ muszą mieć zwroty zgodne, a współrzędne η_c i ζ_c środka ciężkości w układzie *niecentralnym* są wielkościami algebraicznymi. Na rysunku 4.11a mamy więc $\eta_c > 0$ i $\zeta_c > 0$, natomiast na rys. 4.11b $\eta_c < 0$, $\zeta_c > 0$.

Wykorzystując zależność (4.8) możemy $J_{\eta\zeta}$ wyznaczyć przez *pojedyncze* całkowanie. Dzieliąc przekrój na elementarne paski równoległe do jednej z osi (rys. 4.11c), obliczymy moment $dJ_{\eta\zeta}$ jednego z nich. Pasek ten jest prostokątem o polu $c_\eta d\zeta$, współrzędne jego środka ciężkości są $(\eta_1 + \eta_2)/2$ oraz ζ , a jego „własny” moment odśrodkowy względem jego osi centralnych (osie symetrii) jest równy zero. Uwzględniając to mamy z (4.8)

$$dJ_{\eta\zeta} = c_\eta(\eta_1 + \eta_2) \zeta d\zeta/2. \quad (d)$$

Całkowity moment odśrodkowy jest całką wyrażen (d) w granicach od ζ_1 do ζ_2 . Tak więc

$$J_{\eta\zeta} = \frac{1}{2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} c_\eta(\eta_1 + \eta_2) \zeta d\zeta, \quad (4.9)$$

przy czym zgodnie z rys. 4.11c wielkości c_η, η_1, η_2 muszą być wyrażone jako funkcje bieżącej zmiennej ζ .

Zadania

1. Obliczyć moment odśrodkowy $J_{\eta\zeta}$ dla prostokąta (rys. 4.3a).

Odp. Z wzoru (4.8), przy $J_{yz} = 0$, mamy $J_{\eta\zeta} = A \eta_c \zeta_c = b^2 h^2 / 4$.

2. Obliczyć momenty odśrodkowe $J_{\eta\zeta}, J_{yz}$ dla trójkąta (rys. 4.3b).

Odp. Konfrontując rys. 4.3b i 4.11c ustalamy: $c_\eta = b(h - \zeta)/h, \eta_1 = 0, \eta_2 = c_\eta, \zeta_1 = 0, \zeta_2 = h$, skąd

$$J_{\eta\zeta} = \frac{1}{2} \int_0^h \frac{b^2(h - \zeta)^2}{h^2} \zeta d\zeta = \frac{b^2 h^2}{24},$$

a z wzoru (4.8), gdy $\eta_c = b/3, \zeta_c = h/3$, mamy

$$(b^2 h^2 / 24) = J_{yz} + (bh/2)(b/3)(h/3), \quad \text{skąd} \quad J_{yz} = -b^2 h^2 / 72.$$

3. Obliczyć J_{yz} dla przekroju (rys. 4.8a).

Odp. $J_{yz} = 8 \cdot 1,43 (-1,67) + 5 (-2,07) 1,33 + 2 (-0,57) 3,33 = -36,7 \text{ cm}^4$.

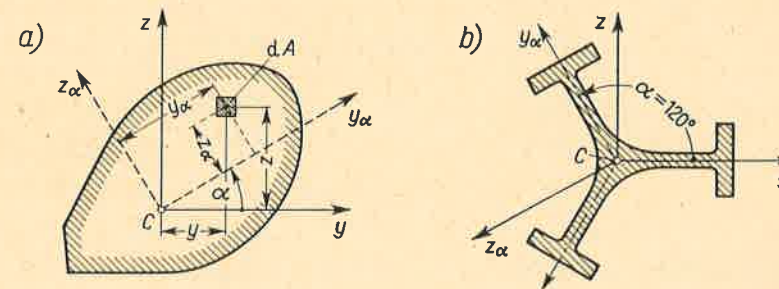
Uwaga. Współrzędne η_c i ζ_c określamy w układzie y, z *niecentralnym* dla prostokątów I, II i III.

4. Jak zmieni się moment odśrodkowy $J_{\eta\zeta}$ przekroju (rys. 4.11c), jeśli a) wszystkie wymiary przekroju zwiększyć dwukrotnie; b) zostawiając rzędne zwiększyć dwukrotnie odcięte; c) zostawiając odcięte zwiększyć dwukrotnie rzędne.

Odp. a) wzrośnie 16 razy, b) i c) wzrośnie 4-krotnie.

4.4. Wyznaczenie centralnych osi głównych. Główne centralne momenty bezwładności

W artykule 4.3 udowodniono istnienie głównych osi, nie określono jednak ich liczby i ich położenia. Kwestią tą zajmiemy się obecnie, przy czym ograniczymy się do przypadku,



Rys. 4.12. Obrót osi i określenie głównych osi centralnych

gdy osie η, ζ są *centralne*, tj. $\eta = y, \zeta = z$. Załóżmy, że dla danego przekroju (rys. 4.12) znane są centralne momenty bezwładności oraz centralny moment odśrodkowy

$$J_y = \int_A z^2 dA, \quad J_z = \int_A y^2 dA, \quad J_{yz} = \int_A yz dA \quad (a)$$

i spróbujmy wyznaczyć te wielkości dla układu osi y_α, z_α obróconego o kąt α względem pierwotnego. Z rysunku odczytujemy

$$y_\alpha = y \cos \alpha + z \sin \alpha, \quad z_\alpha = -y \sin \alpha + z \cos \alpha, \quad (b)$$

jako nowe współrzędne elementarnego pola dA . Zgodnie z definicją momentu bezwładności względem osi y_α mamy

$$\begin{aligned} (J_y)_\alpha &= \int_A z_\alpha^2 dA = \int_A (-y \sin \alpha + z \cos \alpha)^2 dA = \\ &= \int_A z^2 \cos^2 \alpha dA + \int_A y^2 \sin^2 \alpha dA - \int_A 2yz \sin \alpha \cos \alpha dA, \end{aligned}$$

a po uwzględnieniu zależności (a) i drobnych przekształceniach

$$(J_y)_\alpha = \frac{1}{2} (J_y + J_z) + \frac{1}{2} (J_y - J_z) \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha. \quad (4.10a)$$

Analogicznie obliczamy moment $(J_z)_\alpha$

$$(J_z)_\alpha = \int_A y_\alpha^2 dA = \frac{1}{2} (J_y + J_z) - \frac{1}{2} (J_y - J_z) \cos 2\alpha + J_{yz} \sin 2\alpha. \quad (4.10b)$$

Wreszcie moment odśrodkowy $(J_{yz})_\alpha$ jest

$$\begin{aligned}(J_{yz})_\alpha &= \int_A y_\alpha z_\alpha dA = \int_A (y \cos \alpha + z \sin \alpha)(-y \sin \alpha + z \cos \alpha) dA = \\ &= \int_A z^2 \sin \alpha \cos \alpha dA - \int_A y^2 \sin \alpha \cos \alpha dA + \int_A yz (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) dA\end{aligned}$$

lub po uwzględnieniu zależności (a)

$$(J_{yz})_\alpha = \frac{1}{2} (J_y - J_z) \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha. \quad (4.10c)$$

Zależności (4.10) dają poszukiwane wielkości dla dowolnego kąta α . Gdy centralne osie y_α i z_α są jednocześnie główne, $(J_{yz})_\alpha = 0$ i z zależności (4.10c) mamy równanie

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{yz}}{J_y - J_z}, \quad (4.11)$$

którego rozwiązanie daje w przedziale $0, 2\pi$ na ogół tylko dwie odpowiedzi $2\alpha_1$ i $2\alpha_2 = 2\alpha_1 + \pi$. Dowolny więc przekrój ma na ogół tylko dwie centralne osie główne, określone kątami α_1 i α_2 , i osie te są do siebie *prostopadłe*. Wyjątek od tej reguły jest, gdy jednocześnie $J_{yz} = 0$ oraz $J_y = J_z$, a $\operatorname{tg} 2\alpha = 0/0$ jest nieoznaczone. Wtedy jednak z wzorów (4.10) mamy, że niezależnie od kąta α

$$(J_{yz})_\alpha = 0, \quad (J_y)_\alpha = (J_z)_\alpha = J_y = J_z. \quad (c)$$

Tak więc w tym wyjątkowym przypadku *każda oś centralna jest główna*, a moment bezwładności względem każdej z nich jest jednakowy. Przekroje takie są, wbrew pozorom, dość często spotykane w praktyce, jak na przykład kwadrat, koło oraz przekroje o więcej niż dwóch osiach symetrii (rys. 4.12b).

Mając położenie głównych centralnych osi, tj. kąty α_1 i α_2 , wyznaczamy z (4.10a) odpowiadające tym osiom główne centralne momenty bezwładności J_1 oraz J_2 . Uwzględniając, że

$$\cos 2\alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}, \quad \sin 2\alpha = \operatorname{tg} 2\alpha/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha},$$

a $\operatorname{tg} 2\alpha$ jest znany z (4.11), otrzymujemy z (4.10a)

$$\left. \begin{matrix} J_1 \\ J_2 \end{matrix} \right\} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\frac{(J_y - J_z)^2}{4} + J_{yz}^2}. \quad (4.12)$$

Momenty J_1 i J_2 przedstawiają ekstremalne wartości momentów $(J_y)_\alpha$ i $(J_z)_\alpha$ odpowiadających różnym kątom α . Przyrównując mianowicie do zera pochodną

$$(dJ_y)_\alpha/d\alpha = -(J_y - J_z) \sin 2\alpha - 2J_{yz} \cos 2\alpha \quad (d)$$

otrzymujemy równanie dla $\operatorname{tg} 2\alpha$ identyczne z (4.11). To dowodzi, że moment bezwładności względem jednej z osi głównych jest maksymalny, względem drugiej — minimalny. Stwierdzenie to po naniesieniu głównych osi na rysunku przekroju pozwala ustalić od pierwszego rzutu oka, której z nich odpowiada maksymalny, a której minimalny moment bezwładności. W przypadkach wątpliwych, zresztą rzadkich, odpowiedniość ustalamy badając znaki $\cos 2\alpha$ i $\sin 2\alpha$ odpowiadające wartości $\operatorname{tg} 2\alpha$ danej z (4.11) i wstawiając te funkcje do (4.10a).

Należy zauważyć, że przedstawiona analiza stosuje się, gdy układ osi nie jest centralny, trzeba tylko we wzorach (4.10)÷(4.12) wstawić współrzędne η, ζ zamiast y, z .

Zadania

1. Udowodnić bez rachunków, że przekrój o 3-krotnej symetrii (rys. 4.12b) ma rzeczywiście nieskończenie wiele głównych centralnych osi.

Odp. Wiemy, że oś symetrii jest główna; przekrój ma więc co najmniej 3 osie główne, a wiemy, że tych osi może być albo tylko dwie, albo nieskończenie wiele.

2. Dla przekroju (rys. 4.8a) wyznaczyć położenie głównych centralnych osi i główne centralne momenty bezwładności.

Rozwiązanie. Biorąc wyniki zadań 1 (art. 4.2) i 3 (art. 4.3)

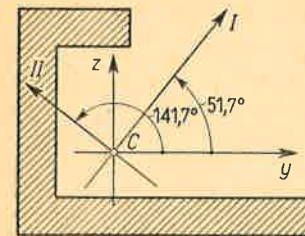
$$J_y = 64,6 \text{ cm}^4, \quad J_z = 82,1 \text{ cm}^4, \quad J_{yz} = -36,7 \text{ cm}^4$$

mamy z (4.11): $\operatorname{tg} 2\alpha = -4,19$, skąd $2\alpha_1 = 103,44^\circ$, $2\alpha_2 = 283,44^\circ$, i w wyniku $\alpha_1 = 51,7^\circ$, $\alpha_2 = 141,7^\circ$.

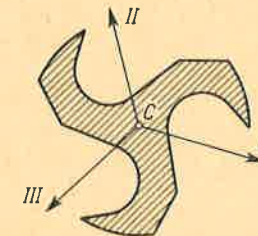
Nanosząc te osie na rysunku przekroju (rys. 4.13) widzimy od razu, że osi I odpowiada maksymalny moment, tj. J_1 , osi II minimalny, tj. J_2 . Wartości ich według (4.12) są

$$\left. \begin{matrix} J_1 \\ J_2 \end{matrix} \right\} = \frac{64,6 + 82,1}{2} \pm \sqrt{\frac{(64,6 - 82,1)^2}{4} + (-36,7)^2} = \begin{cases} 111,0 \text{ cm}^4, \\ 35,6 \text{ cm}^4. \end{cases}$$

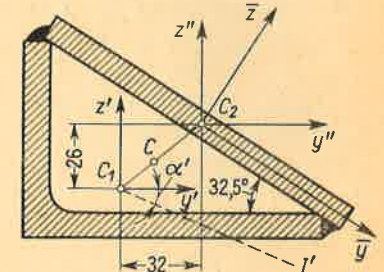
Z rachunków wynika potrzeba zwrócenia szczególnej uwagi na znak J_{yz} i znak $\operatorname{tg} 2\alpha$, gdyż to decyduje o poprawności wyniku.



Rys. 4.13. Wynik dla zadania 1



Rys. 4.14. Do zadania 5



Rys. 4.15. Do zadania 6

3. Wykorzystując wyniki zadania 1 (art. 4.1) i 2 (art. 4.3) wyznaczyć położenie głównych centralnych osi i wartości J_1, J_2 dla trójkąta (rys. 4.3b), gdy $b = 10 \text{ cm}$, $h = 18 \text{ cm}$.

Odp. $\alpha_1 = 19,3^\circ$, $\alpha_2 = 109,3^\circ$, $J_1 = 1778 \text{ cm}^4$, $J_2 = 342 \text{ cm}^4$.

4. W przekroju (rys. 4.13) powiększono dwukrotnie: a) wszystkie wymiary; b) tylko odcięte. Czy położenie głównych osi zmieni się?

Odp. a) nie; b) tak, nowe wartości są: $\alpha_1 = 82,4^\circ$, $\alpha_2 = 172,4^\circ$.

5. Ile głównych centralnych osi ma przekrój o trzykrotnej *punktowej* symetrii (rys. 4.14)?

Odp. Nieskończenie wiele. Gdy oś I jest główna, wówczas z racji symetrii osie II i III są też główne. Dalszy dowód, jak w zadaniu 1.

6. Przekrój (rys. 4.15) składa się z płaskownika $14 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ i kątownika, dla którego z tabliczki mamy: $J'_y = 98 \text{ cm}^4$, $J'_z = 276 \text{ cm}^4$, $A' = 19,1 \text{ cm}^2$ oraz położenie głównej centralnej osi I' określone przez $\operatorname{tg} \alpha' = -0,438$. Biorąc pozostałe dane z rysunku obliczyć położenie głównych centralnych osi dla przekroju oraz wartości J_1 i J_2 .

Rozwiązanie. Rozpoczynamy od obliczenia J'_{yz} dla kątownika. Z wzoru (4.11) mamy $J'_{yz} = -(J'_y - J'_z) \operatorname{tg} 2\alpha'/2 = 178 (-0,917)/2 = -81,6 \text{ cm}^4$, gdyż kąt $\alpha' = -23,7^\circ < 0$ (rys. 4.12a). Następnie obliczamy z (4.10a) i (4.10b) momenty J''_y, J''_z, J''_{yz} dla płaskownika biorąc główne centralne momenty względem osi \bar{y}, \bar{z} : $J_y = 1^3 \cdot 14/12 \approx 1,2 \text{ cm}^4, J_z = 1 \cdot 14^3/12 = 228,6 \text{ cm}^4, J_{yz} = 0$ oraz kąt $\alpha'' = 32,5^\circ$. W wyniku mamy $J''_y = 66,9 \text{ cm}^4, J''_z = 163,2 \text{ cm}^4, J''_{yz} = -103,0 \text{ cm}^4$. Po tych operacjach reszta jest powtórzeniem już przerobionych zadań i obejmuje: wyznaczenie środka ciężkości C i momentów bezwładności całego przekroju (wzory 4.6 i 4.8). Wynik

$$J_y = 224 \text{ cm}^4, \quad J_z = 522 \text{ cm}^4, \quad J_{yz} = -117 \text{ cm}^4$$

daje podstawę do obliczenia $\alpha_1 = 70,9^\circ, \alpha_2 = 160,9^\circ$ z wzoru (4.11) oraz $J_1 = 562 \text{ cm}^4, J_2 = 184 \text{ cm}^4$ z wzoru (4.12).

4.5. Biegunowy moment bezwładności przekroju

Dodając stronami zależności (4.10a) i (4.10b) otrzymujemy, że suma ta jest stała i nie zależy od kąta α , czyli

$$(J_y)_\alpha + (J_z)_\alpha = J_y + J_z. \quad (a)$$

Wynik powyższy stanie się jasny, jeśli zauważyć, że

$$J_y + J_z = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = \int_A r_c^2 dA \quad (b)$$

jest sumą iloczynów elementarnych pól przez kwadraty ich odległości r_c od środka C , nieczułych na obrót osi, gdyż zawsze $r_c^2 = y^2 + z^2 = y_\alpha^2 + z_\alpha^2$. Tę sumę

$$J_0 = J_y + J_z = \int_A r_c^2 dA \quad (4.13a)$$

nazywamy *centralnym biegunowym momentem bezwładności przekroju*. Jeśli początek układu O nie pokrywa się ze środkiem ciężkości (rys. 4.7a), to analogiczną sumę

$$J_0^* = J_\eta + J_\zeta = \int_A (\zeta^2 + \eta^2) dA = \int_A \rho^2 dA \quad (4.13b)$$

nazwiemy *biegunowym momentem bezwładności przekroju względem punktu O* . Wykorzystując wzory Steinera (4.6) mamy od razu

$$J_0^* = J_0 + A(\eta_c^2 + \zeta_c^2) = J_0 + A\varrho_c^2, \quad (4.14)$$

gdzie $\varrho_c = \overline{OC}$ odległość między początkiem układu O a środkiem ciężkości C .

Na ogół wartość J_0 bądź J_0^* obliczamy z (4.13) sumując momenty bezwładności względem dwóch dowolnych osi prostopadłych do siebie i przechodzących przez początek układu. Dla przekroju na przykład kołowego (rys. 4.5a) mamy z wzorów (4.5) wynik

$$J_0 = J_y + J_z = 2 \frac{\pi(r_z^4 - r_w^4)}{4} = \frac{\pi(d_z^4 - d_w^4)}{32}, \quad (c)$$

identyczny ze znanym już wzorem (3.10). Daje on fizyczną interpretację wielkości J_0 stosowanej przy skręcaniu.

Pojęcie biegunowego momentu J_0 można wykorzystać do obliczenia momentów bezwładności J_y, J_z w przekrojach o wielokrotnej (większej niż dwukrotna) symetrii osiowej (rys. 4.12b) lub punktowej (rys. 4.14). W takich przekrojach każda oś centralna jest główna, a $J_y = J_z$ i z wzoru (4.13a) mamy

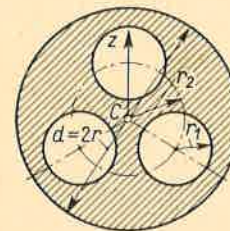
$$J_y = J_z = J_0/2. \quad (4.15)$$

Zadania

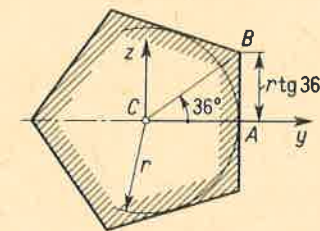
1. Wyznaczyć wartość J_z dla przekroju (rys. 4.16).

$$\text{Odp. } J_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi r^4}{2} - 3 \left(\frac{\pi r_1^4}{2} + \pi r_1^2 r_2^2 \right) \right].$$

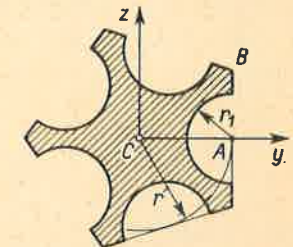
2. Wyznaczyć momenty bezwładności J_y, J_z dla foremnego pięciokąta o promieniu koła wpisanego r (rys. 4.17).



Rys. 4.16. Do zadania 1



Rys. 4.17. Do zadania 2



Rys. 4.18. Do zadania 3

Rozwiązanie. Wyznaczamy biegunowy moment $(J_0^*)_{ABC}$ trójkąta ABC względem punktu C . Momenty: $(J_y)_{ABC} = r(r \operatorname{tg} 36^\circ)^3/12$ (wzór a art. 4.1), $(J_z)_{ABC} = r^3(r \operatorname{tg} 36^\circ)/4$ (zadanie 1 art. 4.1), skąd

$$(J_0^*)_{ABC} = r^4 \operatorname{tg} 36^\circ (3 + \operatorname{tg}^2 36^\circ)/12,$$

a całkowity moment biegunowy $J_0 = 10 (J_0^*)_{ABC}$, skąd poszukiwane

$$J_y = J_z = 5r^4 \operatorname{tg} 36^\circ (3 + \operatorname{tg}^2 36^\circ)/12 = 1,065 r^4.$$

3. Jak zmieni się wynik zadania 2, jeśli z przekroju usunąć 5 połówek kół (rys. 4.18)? Przyjąć $r_1 = r/2$.

Odp. Biegunowy moment jednego półkoła względem punktu C

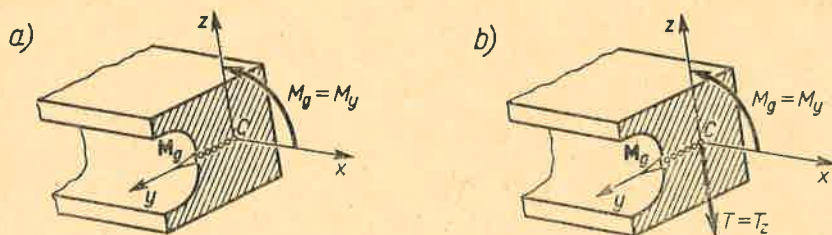
$$J_0^* = (\pi r_1^4/4) + (\pi r_1^2/2) [r^2 - (8r r_1/3\pi)] \approx 0,275 r^4.$$

Momenty J_y i J_z zmniejszają się o $5 J_0^*/2$ i są $J_y = J_z \approx 0,378 r^4$.

5 ZGINANIE PROSTE

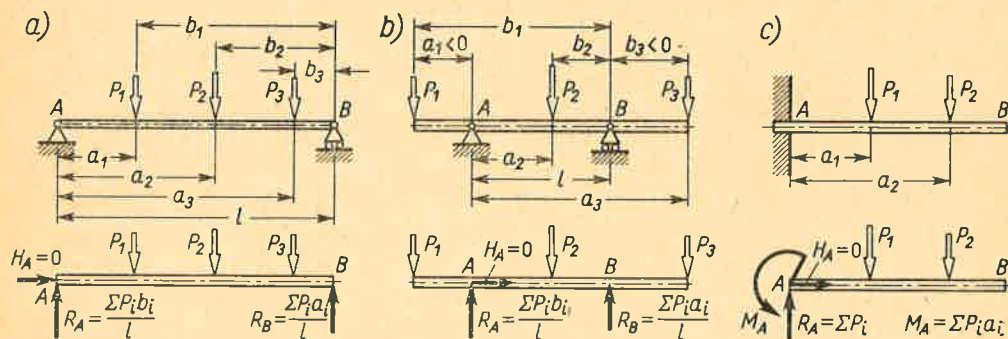
5.1. Uwagi wstępne

Ostatnim z trzech prostych przypadków pracy pręta jest *czyste zginanie*. Zachodzi ono, gdy w myślowym przekroju pręta istnieje tylko moment zginający M_g (rys. 5.1a), którego wektor jest prostopadły do osi pręta, czyli leży w płaszczyźnie przekroju. Równolegle istnieje przypadek *zginania poprzecznego*, gdy wysiłek przekroju tworzą moment M_g i siła poprzeczna T prostopadła do osi pręta, czyli leżąca w płaszczyźnie przekroju (rys. 5.1b).



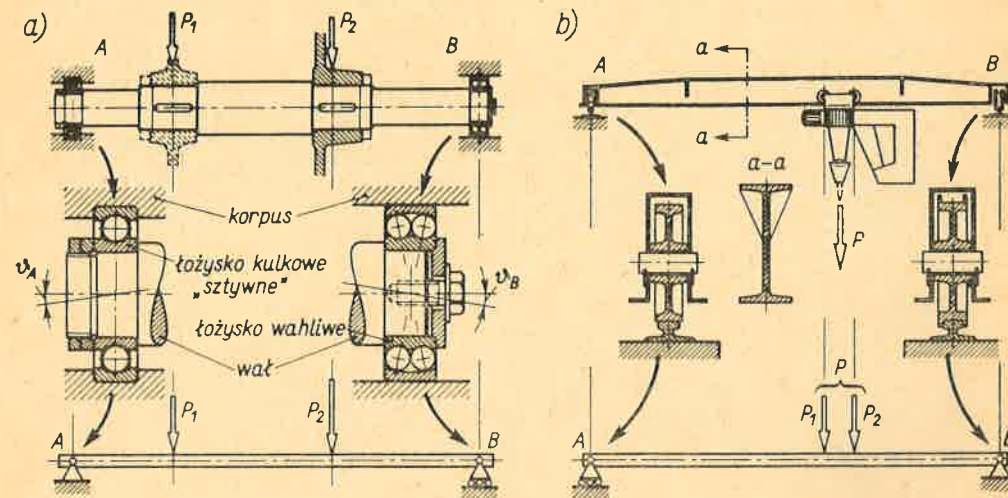
Rys. 5.1. Przypadek czystego zginania (a) i zginania poprzecznego (b)

Ten drugi przypadek, chociaż należy do tzw. *wytrzymałości złożonej*, ma wiele wspólnego z pierwszym. Z tego powodu obydwie te przypadki zbadamy pod wspólnym mianem zginania, zaznaczając, gdzie to potrzeba, zachodzące między nimi różnice.



Rys. 5.2. Podstawowe postacie belki statycznie wyznaczalnej
a) dwupodporowa; b) dwupodporowa z wysięgnikami; c) wspornikowa.

Zginanie występuje, gdy obciążenie pręta, zwanego odtąd *belką*, stanowi układ sił przecinających jego oś i do tej osi prostopadłych (rys. 5.2a). Zakładamy na razie, że układ ten jest *plaski*. Składa się on z sił czynnych P_1, P_2, \dots i sił biernych (reakcji), tj. R i H . Te ostatnie określone są z trzech równań równowagi płaskiego układu sił, wobec czego mogą być tylko trzy niewiadome reakcje, a pojedyncza belka może mieć tylko jedną z trzech postaci (rys. 5.2). Wyznaczenie reakcji, stanowiące pierwszy i niezbędny na ogół etap analizy, jest znane z mechaniki ogólnej i dlatego będzie ono zaznaczone tylko w formie skróconej.



Rys. 5.3. Przykłady tworzenia schematu obliczeniowego

Każdy z modeli (rys. 5.2) stanowi pewien schemat obliczeniowy i może odpowiadać różnym konstrukcjom, jak na rys. 5.3, gdzie ten sam schemat obejmuje i wał maszyny na łożyskach tocznych i belkę suwnicy opartą na kołach jezdnych.

Łożysko wahlwe B (rys. 5.3a) ma bieżnię pierścienia zewnętrznego w postaci odcinka kuli, co daje swobodę obrotu (w płaszczyźnie rysunku) o dość spory kąt ϑ_B (rzędu $3 \div 5^\circ$). Ponadto w tym rozwiązaniu pierścien zewnętrzny ma możliwość, o ile pominąć tarcie, przesuwu poosiowego. Z tych powodów modelem łożyska B jako zespołu jest podpora przegubowa przesuwna. W łożysku A swoboda obrotu w płaszczyźnie rysunku wynika tylko z pewnych luzów i jest znacznie mniejsza ($\vartheta_{max} \approx 0,1^\circ$). Gdy kąt ϑ_A spowodowany odkształceniem belki jest mniejszy⁽¹⁾ od ϑ_{max} , to modelem łożyska A, jako zespołu, jest podpora przegubowa nieprzesuwna, gdyż pierścien zewnętrzny łożyska nie ma swobody przesuwania wzdłużnego.

Podobnie schematyzujemy podpory suwnicy (rys. 5.3b). Koło toczne A nie ma obrzeży i sprowadza się do modelu podpory przegubowej przesuwnej (przy pominięciu tarcia). Koło toczne B mające obrzeża sprowadza się do modelu podpory przegubowej nieprzesuwnej.

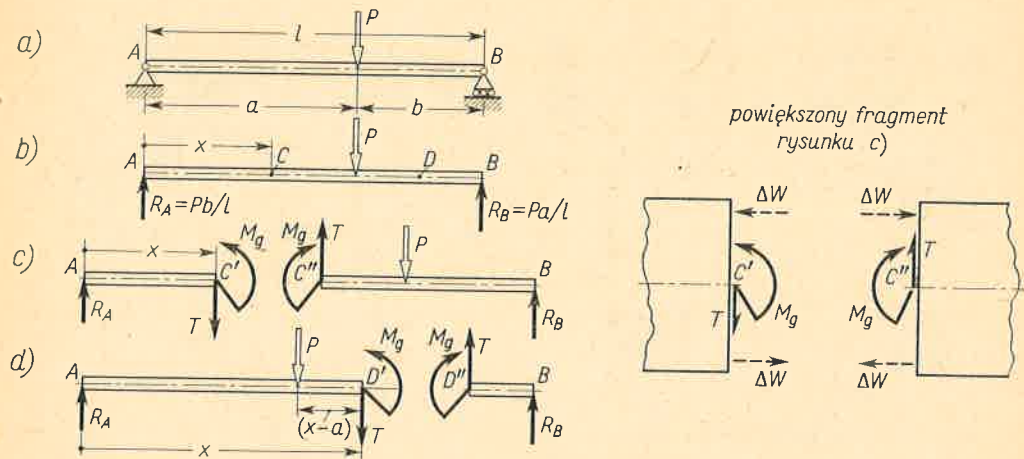
⁽¹⁾ Sprawdzenie tego jest konieczne. Jeśli bowiem $\vartheta_A > \vartheta_{max}$, to łożysko takie ulega szybkiemu zużyciu.

5.2. Analityczne określenie momentów gnących i sił tnących

Podobnie jak w przypadku rozciągania lub skręcania, tak i przy zginaniu rozpoczniemy od określenia wysiłku przekrojów belki. Weźmy dla przykładu belkę obciążoną siłą czynną P (rys. 5.4a). Po wyznaczeniu reakcji

$$R_A = Pb/l, \quad R_B = Pa/l, \quad (a)$$

mamy pełny obraz obciążenia (rys. 5.4b). Dla ujawnienia wysiłku pewnego przekroju C , rozciniemy w nim myślowo belkę na dwie części. Aby przywrócić pierwotną równowagę



Rys. 5.4. Określenie momentu gnącego i siły tnącej

każdej z części, wprowadzamy w nowo powstałych przekrojach C' i C'' wysiłek o składowych w postaci siły tnącej T i momentu gnącego M_g (rys. 5.4c). Składowe te działające na jedną część są odpowiednio przeciwne do działających na część drugą. Ich wartość wyznaczamy z równań równowagi sformułowanych dla jednej części, obojętne której. Wiadomo bowiem, że wartości te nie zależą od tego, czy badamy równowagę jednej, czy drugiej części.

Po tym przypomnieniu ogólnej metody z art. 1.4, obliczmy wartość T i M_g dla części AC' . Równania równowagi: rzutów na oś pionową i momentów względem punktu C' są

$$R_A - T = 0, \quad R_A x - M_g = 0,$$

skąd po uwzględnieniu (a) mamy wartości

$$T = R_A = Pb/l, \quad M_g = R_A x = Pbx/l \quad (b)$$

i ponieważ są one dodatnie, zatem zwroty T i M_g są jak na rys. 5.4c. Wzory (b) są słuszne, gdy $0 < x < a$. Jeśli bowiem badać wysiłek przekroju D ($a < x < l$), to obraz sił działających na część badaną AD' jest inny (rys. 5.4d). Formułując podobne równania równowagi, mamy z nich

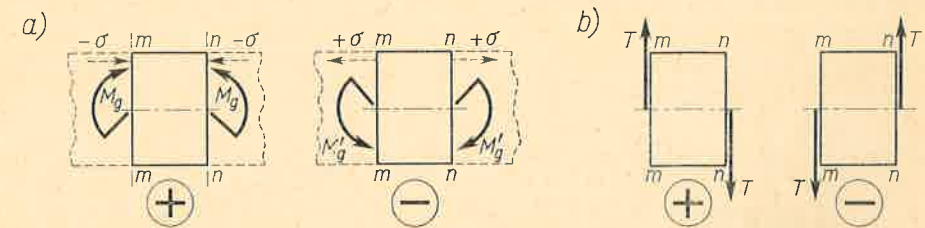
$$T = R_A - P, \quad M_g = R_A x - P(x-a), \quad (c)$$

lub po uwzględnieniu (a) oraz tego, że $a + b = l$,

$$T = -\frac{Pa}{l} = -R_B, \quad M_g = \frac{Pbx}{l} - P(x-a) = R_B(l-x). \quad (d)$$

Ujemna wartość siły T oznacza, że jej zwrot jest przeciwny do założonego. Dodatnia wartość M_g mówi, że M_g ma zwrot zgodny z założonym. Ponadto wzory (d) ilustrują dowolność wyboru jednej lub drugiej części do obliczenia T i M_g . Takie same bowiem wyniki otrzymamy badając równowagę części $D''B$ belki, zakładając oczywiście przeciwne niż dla części AD' zwroty T i M_g .

Dla porozumiewania się celowe jest wprowadzenie umowy o znaku momentu gnącego i siły tnącej. Przypomnijmy, że moment M_g jest wypadkowy z momentów elementarnych sił ΔW (rys. 5.4c). Jest rzeczą jasną, że przy podanych zwrotach M_g w częściach przekrojów C' i C'' leżących powyżej osi dominują siły ΔW , a więc i naprężenia, ściskające a w dolnej części — rozciągające. Umawiamy się, że takie właśnie momenty gnące są dodatnie. Jeśli z belki wyciąć element, to dodatnie i ujemne momenty są według powyższego kryterium naprężeń⁽¹⁾ takie jak na rys. 5.5a. Znak siły tnącej ustalimy według kryterium,



Rys. 5.5. Definicja znaków M_g i T

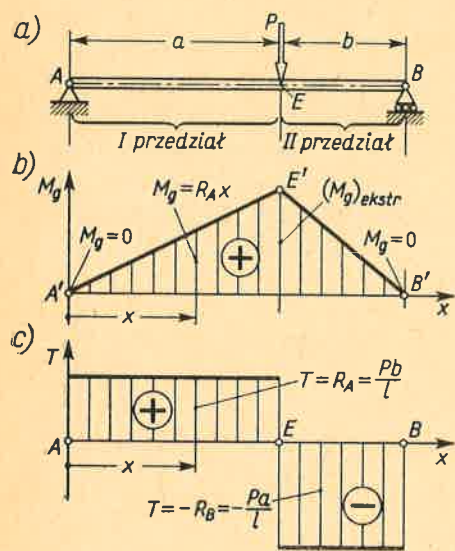
jakie użyto dla naprężeń stycznych (rys. 2.14c). Mianowicie, siłę tnącą uważamy za dodatnią, gdy usiłuje ona nadać rozpatrywanej części obrót *współzegarowy*. Tak więc obie siły T z rys. 5.4c są dodatnie, gdyż kryterium to jest spełnione. Dla wyciętego myślowo elementu przyjęte kryterium daje obraz sił T według rys. 5.5b.

Powyższe umowy są potrzebne przy przedstawieniu przebiegu $T(x)$ i $M_g(x)$ w formie wykresu sił tnących i wykresu momentów gnących. Sposób ich budowy jest identyczny jak w przypadku rozciągania lub skręcania. Oś odciętych jest równoległa do osi belki, sama odcięta x określa położenie badanego przekroju, a rzędne dają wartości T lub M_g w tym przekroju. I tak w badanej tu belce (rys. 5.4) zależności $M_g(x)$ są liniowe w obydwóch przedziałach i do zbudowania wykresu $M_g(x)$ wystarcza znajomość rzędnych dla dwóch wybranych wartości x . Biorąc w pierwszym przedziale $x = 0$ i $x = a$ mamy z wzoru (b) odpowiednio $M_g = 0$ i $M_g = Pab/l$. Z konfrontacji rys. 5.4 i 5.5 wynika, że ta druga wartość M_g jest dodatnia. Podobnie w drugim przedziale dla $x = a$ i $x = l$, mamy z wzoru (d) odpowiednio dodatnią wartość $M_g = Pab/l$ i $M_g = 0$.

⁽¹⁾ Aby ułatwić zrozumienie, wróćmy do rys. 1.14b. Obie siły N_a i N_b są tam dodatnie, albowiem są wypadkowymi dodatnich σ . W przypadku momentu gnącego na jednej części przekroju naprężenia są ściskające, na drugiej — rozciągające. Do ustalenia znaku momentu potrzeba więc *dodatkowo* powiedzieć, na której części przekroju działają dodatnio, a na której ujemnie naprężenia.

Jeśli dodatnie rzędne wykresu M_g odmierzać powyżej, a ujemne poniżej osi odciętych, to z rys. 5.5 widać, iż rzędne te znajdują się zawsze po tej stronie, po której występują naprężenia ściskające. Ujmując to skrótowo, mówimy: „wykres M_g rysujemy po ściskanej stronie belki”. Zgodnie z tą umową otrzymujemy więc wykres $M_g(x)$ (rys. 5.6) jako łamaną linię $A'E'B'$. Ekstremalny moment gnący występuje w przekroju E , jest dodatni, a jego wartość

$$(M_g)_{\text{ekstr}} = Pab/l. \quad (e)$$



Rys. 5.6. Wykresy $M_g(x)$ i $T(x)$ dla belki z rys. 5.4

Wykres sił tnących (rys. 5.6c) jest jeszcze prostszy, albowiem na odcinkach AE i EB wartość T jest stała. Uwzględniając umowę o znaku siły tnącej (rys. 5.5) mamy na odcinku AE siłę T dodatnią, a na odcinku EB ujemną. Przeskok wykresu w punkcie E jest

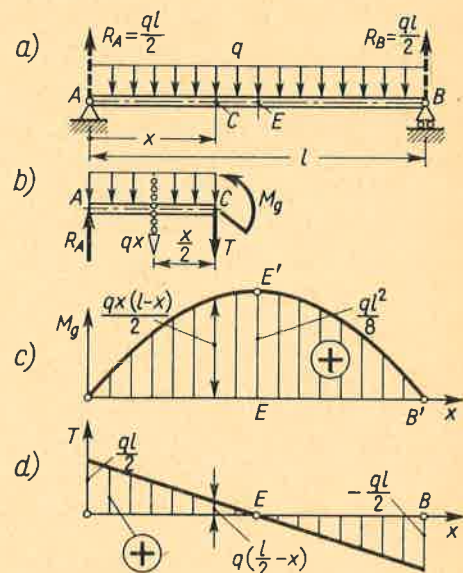
$$(Pb/l) - (-Pa/l) = P(a+b)/l = P.$$

Jako drugi przykład zbadajmy belkę, na którą działa równomierne obciążenie q (rys. 5.7a). Po wyznaczeniu reakcji⁽¹⁾

$$R_A = R_B = ql/2$$

odcinamy myślowo część AC belki nanosząc przy tym (rys. 5.7b) działające na nią siły: reakcję R_A , składowe wysiłku T i M_g oraz obciążenie ciągłe q na długości $AC = x$. Działanie tego ostatniego obciążenia jest, według praw statyki, równoważne działaniu wypadkowej qx przyłożonej w odległości $x/2$ od przekroju C . Z równania równowagi rzutów na

⁽¹⁾ Reakcje te narysowano umownie na rysunku samej belki nie usuwając podpór, jak na rys. 5.4b. Ściśle biorąc, sposób taki nie jest prawidłowy, jest jednak stosowany, gdyż redukuje liczbę rysunków.



Rys. 5.7. Wykresy $M_g(x)$ i $T(x)$ belki obciążonej w sposób ciągły

prostopadłą do osi belki mamy

$$T = R_A - qx = q[(l/2) - x], \quad (f)$$

a z równania równowagi momentów względem punktu C

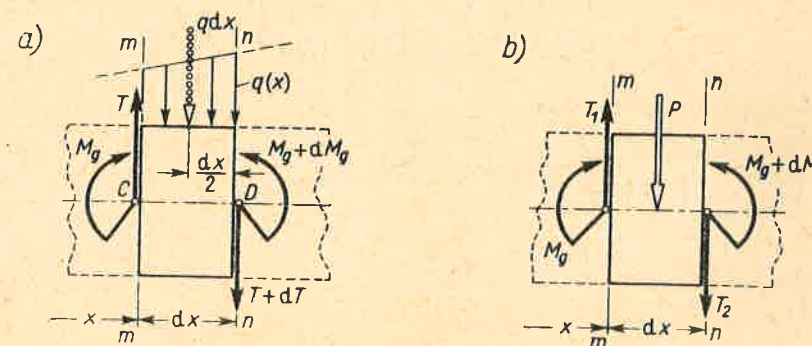
$$M_g = R_A x - (qx)(x/2) = qx(l-x)/2, \quad (g)$$

przy czym zależności te słuszne są na całej długości belki. Dodatkowo wartości T i M_g wskazują, że ich zwroty są zgodne z danymi na rysunku. Widzimy, że taka siła T daje współzegarowy obrót części AC , a taki moment daje ściskanie części przekroju powyżej osi. Obie te wielkości są więc dodatnie w sensie umowy przyjętej na rys. 5.5.

Wykorzystując zależności (f) i (g) zbudujemy teraz wykresy $M_g(x)$ i $T(x)$. Z wzoru (g) wynika, że wykres $M_g(x)$ jest parabolą wierzchołkiem do góry, przecinającą oś x w punktach $x = 0$ i $x = l$, odpowiadających podporom A i B (rys. 5.7c). Ekstremalna wartość M_g

$$(M_g)_{\text{ekstr}} = ql^2/8 \quad (h)$$

występuje w przekroju E ($x = l/2$). Wykres $T(x)$ jest zgodnie z wzorem (f) odcinkiem prostej (rys. 5.7d), której rzędne w przekrojach A i B są odpowiednio $(ql/2)$ i $(-ql/2)$. Zerowa siła tnąca jest w przekroju E ($x = l/2$), a więc tam, gdzie $M_g = (M_g)_{\text{ekstr}}$.



Rys. 5.8. Analiza równowagi elementów belki

Ta ostatnia uwaga jest przejawem ogólnej zależności między M_g i T . Zbadajmy mianowicie równowagę wyciętego myślowo elementu CD belki (rys. 5.8), na który działają:

- a) zewnętrzne obciążenie ciągłe q o wypadkowej $q dx$,
- b) siły wewnętrzne w przekroju $m-m$ o wypadkowej T i momencie M_g stanowiącymi wysiłki tego przekroju,
- c) siły wewnętrzne w przekroju $n-n$ o nieco zwiększonej wypadkowej $T+dT$ i nieco zwiększonym momencie M_g+dM_g będącymi wysiłkiem tego przekroju, a więc odpowiadającymi wartości $x+dx$ innej niż wartość x dla przekroju $m-m$.

Z warunku, że suma rzutów sił na prostopadłą do osi belki jest równa zero, otrzymujemy równanie

$$T - q dx - (T + dT) = 0,$$

skąd po przekształceniach mamy zależność

$$\frac{dT}{dx} = -q, \tag{5.1}$$

wiązącą pochodną siły tnącej z lokalną, tj. odpowiadającą danej współrzędnej x , wartością ciągłego obciążenia $q(x)$.

Formułując podobnie warunek równowagi momentów względem punktu D otrzymujemy równanie

$$M_g + T dx - (q dx)(dx/2) - (M_g + dM_g) = 0.$$

Jeśli $dx \rightarrow 0$, to w równaniu powyższym możemy pominąć małą wyższego rzędu, tj. $q dx^2/2$, i w rezultacie mamy

$$\frac{dM_g}{dx} = T, \tag{5.2}$$

jako zależność wiążącą pochodną momentu gnącego z lokalną wartością siły tnącej $T(x)$. Różniczkując na koniec stronami równanie (5.2) mamy przy uwzględnieniu (5.1)

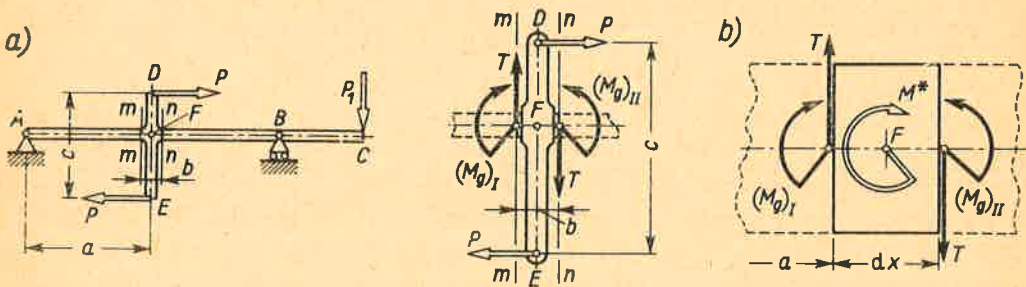
$$\frac{d^2M_g}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -q, \tag{5.3}$$

wiązące bezpośrednio moment gnący z lokalną wartością $q(x)$.

Z zależności (5.1)–(5.3) wynikają pewne reguły o przebiegu momentów gnących i sił tnących. Jeśli belka jest obciążona, jak na rys. 5.7, to $q(x) = q = \text{const}$ i z (5.1) mamy, że $T(x)$ musi być liniową funkcją x . Podobnie z (5.3) wynika, że $M_g(x)$ musi być kwadratową funkcją x . Obydwa te fakty znajdują potwierdzenie w zależnościach (f) i (g). Dla belek obciążonych siłami skupionymi (rys. 5.2) mamy na odcinkach między kolejnymi siłami $q(x) \equiv 0$. Wobec tego na poszczególnym odcinku $T(x) = \text{const}$, a M_g jest liniową funkcją zmiennej x . W miejscu przyłożenia siły skupionej (rys. 5.8b) siła tnąca doznaje przeskoku

$$T = T_2 - T_1 = -P,$$

czyli równego sile skupionej. Temu przeskokowi T odpowiada raptowna zmiana dM_g/dx , czyli załom funkcji $M_g(x)$. Obydwa te fakty obserwujemy w przekroju E (rys. 5.6).



Rys. 5.9. Wprowadzenie pojęcia momentu skupionego

Inną osobliwością są w przebiegu $M_g(x)$ miejsca przyłożenia skupionych momentów. Gdy do badanej belki AC przymocowana jest belka DE obciążona parą sił P o momencie $M^* = Pc$ (rys. 5.9a), wówczas z równowagi momentów elementu belki wyciętego prze-

krojami $m-m$ i $n-n$ wynika

$$(M_g)_I + Pc - (M_g)_{II} + Tb = 0. \tag{i}$$

Gdy wymiar $b \rightarrow 0$, z równania (i) mamy

$$(M_g)_{II} - (M_g)_I = Pc = M^*,$$

co wskazuje na przeskok wartości M_g między dwoma przekrojami teoretycznie nieskończenie bliskimi. Taki wyidealizowany przypadek zaznaczymy, jak na rys. 5.9b, gdzie M^* jest dla badanej belki AC zewnętrznym momentem przyłożonym w punkcie F i przedstawiającym działanie odrzuconej myślowo belki DE . W miejscu przyłożenia skupionego momentu siła tnąca nie zmienia się, co widać z tegoż rys. 5.9b.

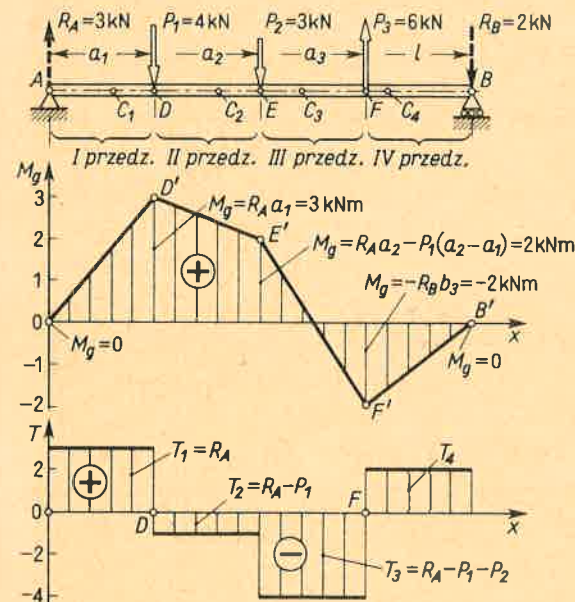
Zadania

1. Wykonać wykresy $M_g(x)$ dla belki (rys. 5.10) przyjmując $a_1 = 1$ m, $a_2 = -2$ m, $a_3 = 3$ m, $l = 4$ m.

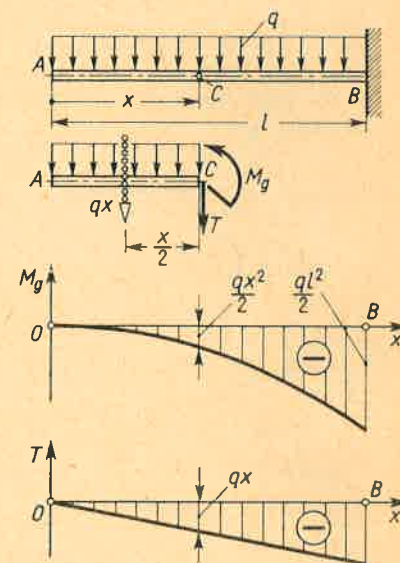
Odp. W porównaniu z przykładem (rys. 5.4) zadanie różni się liczbą przedziałów (4 przedziały), dla których należy sformułować odrębne równania równowagi. Na przykład dla przedziału II (gdzie $a_1 < x < a_2$)

$$T = R_A - P_1, \quad M_g = R_A x - P_1(x - a_1).$$

Inne etapy rozwiązania jak w przykładzie (rys. 5.4). Wyniki końcowe podaje rysunek.



Rys. 5.10. Analiza belki obciążonej siłami skupionymi



Rys. 5.11. Belka wspornikowa przy obciążeniu ciągłym

2. Wykonać wykresy M_g i T dla belki wspornikowej (rys. 5.11).

Odp. Rozwiązanie przebiega podobnie jak dla belki (rys. 5.7). Widać, że obliczenie reakcji w utwierdzonym przekroju jest tu zbędne.

3. Obliczyć wartości i wykonać wykresy M_g i T dla belki (rys. 5.12).

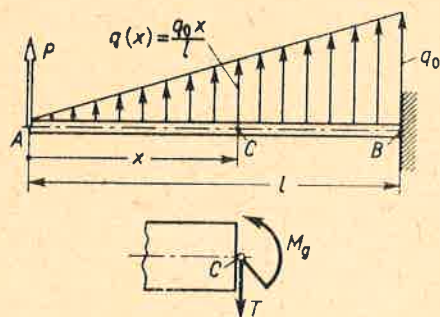
Od p. Równania równowagi dla myślowo odciętej części AC są

$$P + (q_0 \cdot x/l)(x/2) - T = 0, \quad Px + (q_0 x/l)(x/2)(x/3) - M_g = 0,$$

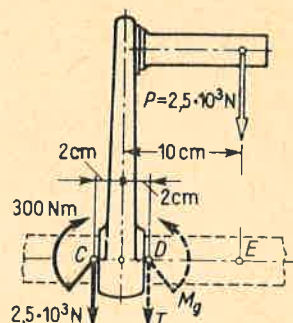
skąd

$$T = P + (q_0 x^2/2l) > 0, \quad M_g = Px + (q_0 x^3/6l) > 0.$$

W przekroju B jest $T_{ekstr} = P + (q_0 l/2)$, $(M_g)_{ekstr} = Pl + (q_0 l^2/6)$.



Rys. 5.12. Do zadania 3

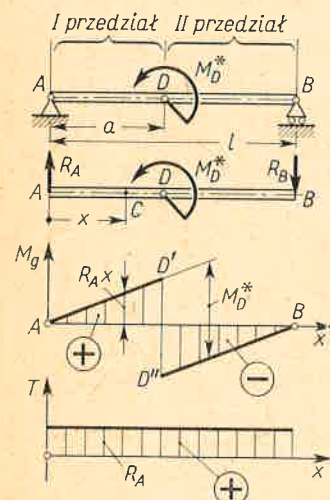


Rys. 5.13. Do zadania 4

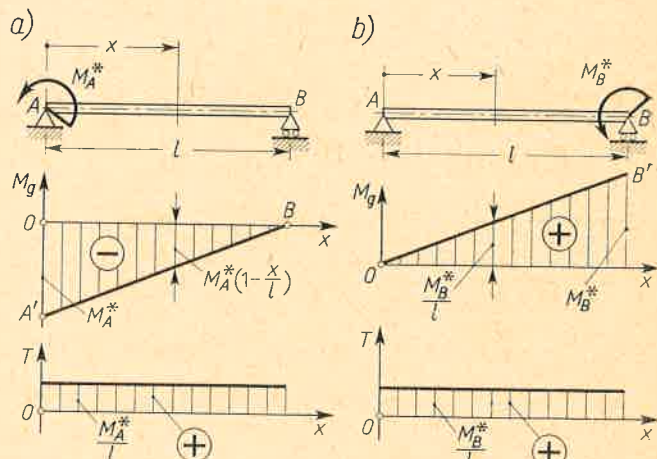
4. Wyznaczyć T i M_g w przekroju D poziomej belki z osadzoną na niej dźwignią obciążoną siłą P (rys. 5.13).

Od p. Z równań równowagi odcinka CD przy znanym wysiłku przekroju C mamy $T = -5$ kN (skierowane do góry), $M_g = 400$ N m.

5. Dla belki obciążonej skupionym momentem M_D^* (rys. 5.14) wyznaczyć wykresy T i M_g . Zbadać przypadki, gdy $a = 0$ i $a = l$.



Rys. 5.14. Wykresy M_g i T dla belki obciążonej skupionym momentem



Rys. 5.15. Dwupodporowa belka obciążona momentami na podporach

Od p. Po wyznaczeniu reakcji $R_A = R_B = M_D^*/l$ o zwrotach jak na rysunku, badamy równowagę odciętej części AC , raz, gdy $x < a$, drugi raz, gdy $x > a$. W wyniku dla $0 < x < a$ mamy $T = M_D^*/l > 0$, $M_g = M_D^* x/l > 0$; dla $a < x < l$ mamy $T = M_D^*/l > 0$, $M_g = M_D^* [(x/l) - 1] < 0$. Wykres $M_g(x)$ stanowią dwa równoległe odcinki AD' i $D''B$ z przeskokiem w przekroju D . Wykres T — linia równoległa do osi x .

Gdy $a \rightarrow 0$, wówczas obciążenie stanowi moment M_A^* (rys. 5.15a). Przedział I z rys. 5.14 znika, przedział II obejmuje całą belkę. Z pierwotnego wykresu zostaje tylko prosta $D''B$ łącząca rzędną M_A^* z punktem B . Przypadek, gdy $a \rightarrow l$, jest podobny (rys. 5.15b). W obydwóch przypadkach wykres T zostaje ten sam.

6. W zadaniu 1: a) zwiększono n razy wszystkie siły P ; b) podwojono wszystkie siły zmieniając jednocześnie ich zwroty na przeciwnie. Jak zmieniają się rzędne wykresów M_g i T ?

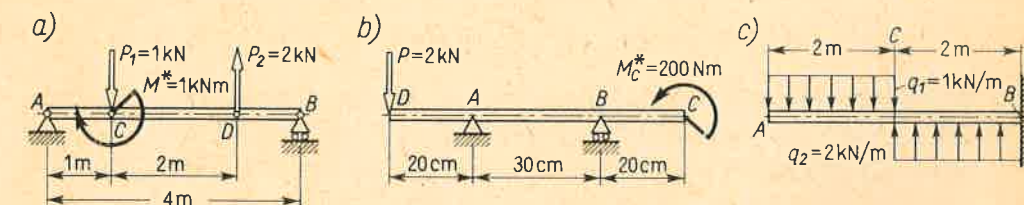
Od p. a) Wzrosną n -krotnie; b) w tym przypadku $n = -2$, a więc wzrosną dwukrotnie z jednoczesną zmianą znaku.

7. W zadaniu 1: a) zmieniono m razy wszystkie odległości, tj. l i a ; b) zmieniono odległości jak w punkcie (a) i jednocześnie zmieniono n razy siły P . Jakie są M_g i T w przekrojach A, D, E, F, B ?

Od p. a) Wartości T nie zmieniają się, M_g zmieni się m razy; b) siły T zmieniają się n razy, momenty M_g zmieniają się mn razy.

8. W zadaniu 2 i 3 dwukrotnie zwiększono l oraz odległości x badanych przekrojów. Jak zmieniają się wartości T i M_g ?

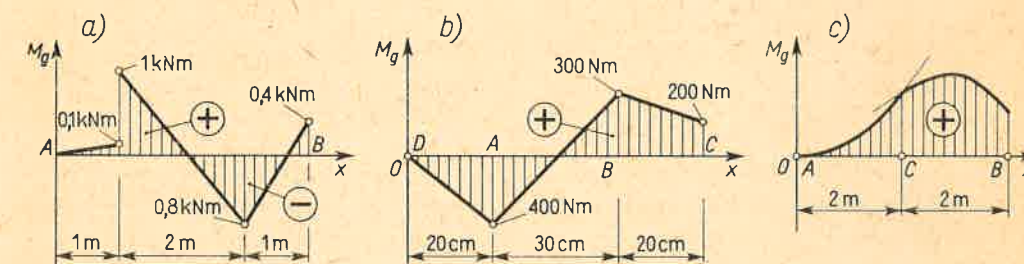
Od p. Siły T wzrosną dwukrotnie, M_g — czterokrotnie.



Rys. 5.16. Dane do zadania 9

9. Dla podanych belek (rys. 5.16) zbudować wykresy M_g i T oraz określić ich ekstremalne wartości (dodatnie i ujemne).

Od p. a) $+1$ kN m i -1 kN m; $+1$ kN i -1 kN; b) $+200$ N m i -400 N m, $+2$ kN i -2 kN; c) -3 kN m, brak $M_g > 0$, $+2$ kN i -2 kN.



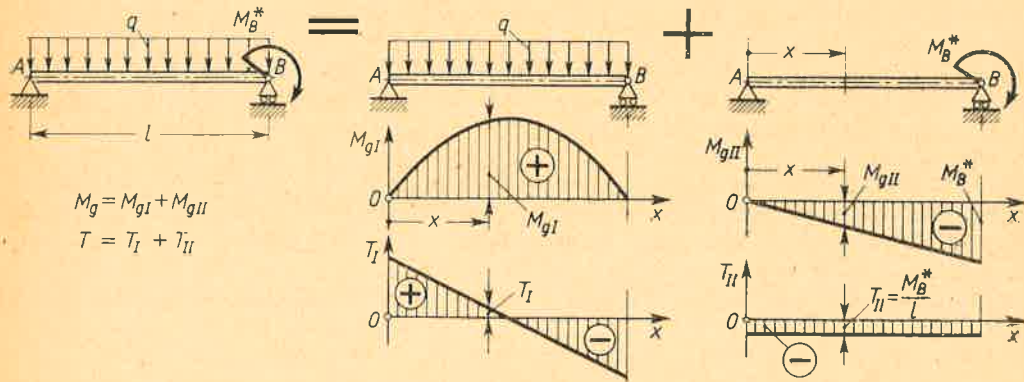
Rys. 5.17. Błędne rozwiązania zadania 9

10. Ktoś rozwiązując zadanie 9 podał wykresy M_g (rys. 5.17). Nie rachując szczegółowo wskazać oczywiste błędy na tych wykresach.

Od p. a) Pierwszy błąd: przeskok momentu jest $0,9$ kN m, a powinien być $1,0$ kN m, drugi błąd: na podporze B otrzymano $M_g \neq 0$; b) na odcinku BC jest zmienny moment, a powinien być stały, bo $T = 0$; c) pierwszy błąd w znaku momentu, drugi: w przekroju C narysowano załom, chociaż nie ma tam siły skupionej.

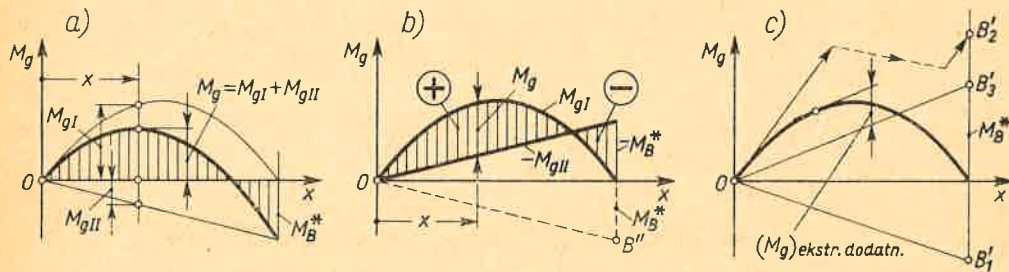
5.3. Niektóre ułatwienia obliczeń

W wielu przypadkach dla ułatwienia obliczeń stosujemy zasadę superpozycji. Weźmy dla przykładu belkę (rys. 5.18). Jej obciążenie jest superpozycją obciążenia ciągłego q oraz skupionego momentu M_B^* , dla których znamy już wykresy T i M_g (rys. 5.7 i 5.15),



Rys. 5.18. Zastosowanie zasady superpozycji do określania M_g i T

z tym że zadanemu kierunkowi M_B^* odpowiadają znaki przeciwne niż na rys. 5.15. Jedyne, co zostaje do zrobienia, to złożyć te wykresy sumując algebraicznie odpowiednie rzędne (rys. 5.19a). Prościej jednak jest na jeden wykres, tj. M_{gI} , nałożyć drugi odwrócony,



Rys. 5.19. Techniczne szczegóły superpozycji wykresów

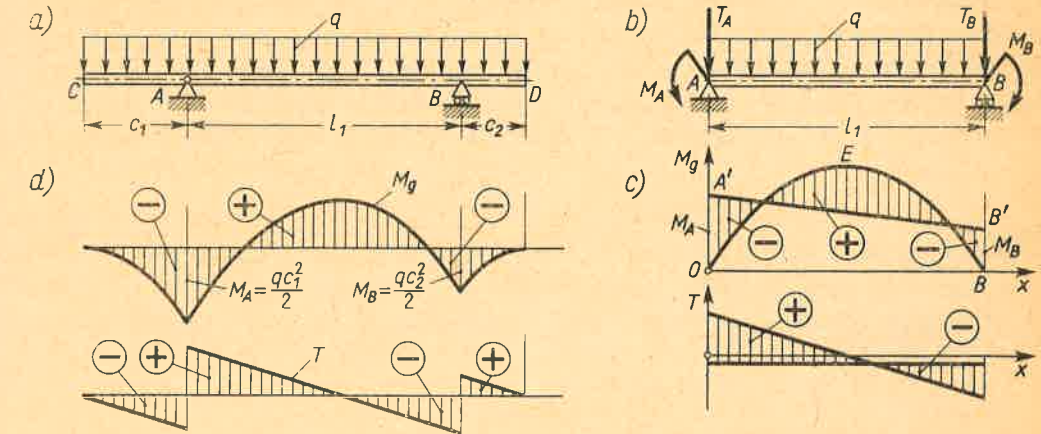
tj. M_{gII} (rys. 5.19b). Rzędna wypadkowa, tj. M_g , równa jest długości odcinka między wykresami.⁽¹⁾ Dla jasności konieczne jest zaznaczenie znaku rzędnych.

Opisany sposób jest szczególnie przydatny do badania różnych wariantów obciążenia. Tak na przykład zmianie M_B^* przy ustalonym q odpowiadają różne proste OB (rys. 5.19c). Gdy M_B^* jest dodatnie (prosta OB_1), wówczas M_g jest wszędzie dodatnie. Gdy M_B^* ma dużą ujemną wartość (prosta OB_2), wtedy wszędzie mamy $M_g < 0$. W sytuacji pośredniej (prosta OB_3) moment ten na części belki jest dodatni, na części ujemny, a jego absolutne wartości mniejsze niż w przypadkach poprzednich. Najmniejsze absolutne wartości wy-

⁽¹⁾ Gdyby moment M_B^* miał zwrot przeciwny, M_g byłby równy długości odcinka między parabolą a prostą OB'' .

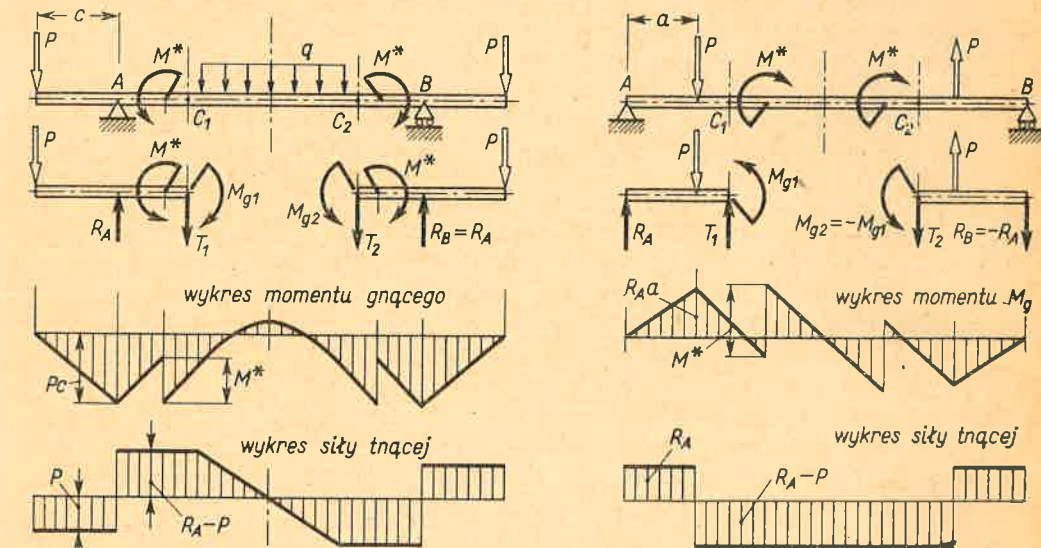
stępują, gdy ekstremalny ujemny moment, tj. M_B^* , i ekstremalny dodatni będą równe co do bezwzględnej wartości. Postulat tego rodzaju spotyka się często w praktyce.

Inny przykład superpozycji podaje rys. 5.20a. Części CA i BD są wspornikami z rys. 5.11, dla których rolę podłoża spełnia część AB . Jeśli te wysięgniki myślowo odrzucić, to w prze-



Rys. 5.20. Przykład zastosowania zasady superpozycji

kroju A części środkowej ujawni się wysięk o składowych $T_A = qc_1$ i $M_A = qc_1^2/2$, a w przekroju B wysięk o składowych $T_B = qc_2$ i $M_B = qc_2^2/2$. Siły T_A i T_B są zrównoważone od razu na podporach. W rezultacie na środkową część belki działają momenty M_A i M_B oraz obciążenie q (rys. 5.20b). Biorąc ze stosownymi znakami wyniki z rys. 5.7 i 5.15 mamy wykres M_g , będący nałożeniem paraboli OEB i trapezu $A'B'BO$ oraz wykres T



Rys. 5.21. Wykresy T i M_g przy obciążeniu symetrycznym

Rys. 5.22. Wykresy T i M_g przy obciążeniu antysymetrycznym

(rys. 5.20c). Dołączając do tego wykresu M_g i T dla wysięgników mamy wynik według rys. 5.20d. Podobnie jak poprzednio, tak i tu superpozycja ułatwia badanie różnych modyfikacji ustroju.

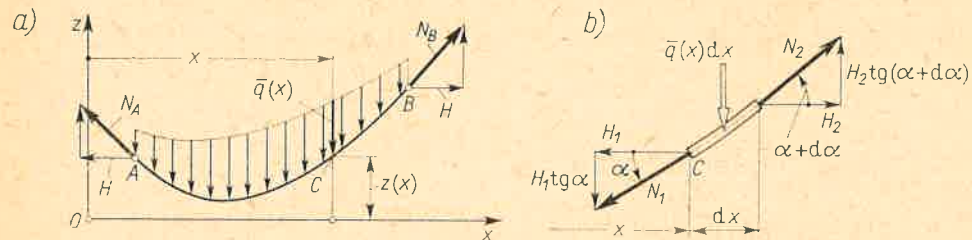
Gdy obciążenie belki jest symetryczne (rys. 5.21), wówczas w odpowiadających sobie przekrojach C_1 i C_2 działają jednakowe momenty M_g , natomiast siły tnące mają wartości przeciwnie (umowa z rys. 5.5). Wynika stąd, że wykres M_g jest symetryczny, wykres T antysymetryczny. Przy obciążeniu antysymetrycznym (rys. 5.22) sytuacja jest odwrotna: wykres M_g jest antysymetryczny, wykres T symetryczny. W takich zatem przypadkach do otrzymania pełnego obrazu M_g i T wystarcza obliczenie ich dla połowy belki.

Zadania

1. Metodą superpozycji wyznaczyć wykres M_g i T w belkach z rys. 5.16a, b.
2. Zakładając w belce (rys. 5.20), że $c_1 = c_2 = c$, wyznaczyć c tak, aby absolutne wartości $(M_g)_{\text{ekstr}}$ były równe.
Odp. $c = l_1/2\sqrt{2} \approx 0,354 l_1$ i wtedy $(M_g)_{\text{ekstr}} = ql_1^2/16$.

5.4. Wykreślna metoda wyznaczania momentów gnących

Istota tej metody polega na wykorzystaniu analogii między przebiegiem momentów gnących w belce zginanej a kształtem linii sznurowej. Z mechaniki ogólnej wiadomo, że



Rys. 5.23. Linia sznurowa

wiotki sznur pod obciążeniem $\bar{q}(x)$, odniesionym do jednostki długości na osi odciętych x , przyjmuje kształt linii sznurowej ACB (rys. 5.23a), której rzędna $z(x)$ określona jest równaniem⁽¹⁾

$$H \frac{d^2 z}{dx^2} = \bar{q}(x), \quad (\text{a})$$

⁽¹⁾ A oto krótkie przypomnienie. Na element linii (rys. 5.23b) działają: pionowa siła $\bar{q}(x) dx$, wzdłużna siła N_1 o poziomej składowej H_1 i pionowej $H_1 \operatorname{tg} \alpha = H_1 (dz/dx)$, wzdłużna siła N_2 o składowej poziomej H_2 i pionowej $H_2 \operatorname{tg} (\alpha + d\alpha) = H_2 [(dz/dx) + (d^2 z/dx^2) dx]$. Z warunku równowagi rzutów sił na oś x mamy $H_1 = H_2 = H$, a z warunku rzutów na oś z

$$H \left(\frac{dz}{dx} + \frac{d^2 z}{dx^2} dx \right) - H \frac{dz}{dx} - \bar{q}(x) dx = 0,$$

skąd po prostych przekształceniach otrzymujemy równanie (a).

gdzie H — pozioma składowa napięcia N liny. Ta siła H nie zależy od x , a więc zamiast (a) możemy napisać

$$\frac{d^2(Hz)}{dx^2} = \bar{q}(x). \quad (\text{5.4})$$

Jak widzimy, równanie (5.4) staje się identyczne z poprzednio sformułowanym (5.3), tj. $d^2 M_g/dx^2 = -q(x)$, jeśli

$$\bar{q}(x) \equiv -q(x). \quad (\text{5.5})$$

Identyczność równań (5.3) i (5.4) nie oznacza jeszcze, że wielkość M_g i H_z są identyczne. Aby osiągnąć tożsamość

$$M_g \equiv H_z, \quad (\text{5.6})$$

potrzeba i wystarcza⁽¹⁾, poza spełnieniem warunku (5.5), aby te dwie wielkości były sobie równe dla dwóch dowolnie wybranych wartości x_1 i x_2 . W takim przypadku analityczne określenie $M_g(x)$ możemy zastąpić wykreśleniem linii sznurowej. Czynność ta jest znana z kursu mechaniki ogólnej i dlatego tutaj podawana jest bez wnikania w szczegóły.

Zadania

1. Wyznaczyć wykreślnie przebieg M_g w belce (rys. 5.24a).

Rozwiązanie. Obciążenie ciągle zastępujemy na razie pewną liczbą sił skupionych, w tym przypadku dwiema siłami: 2,19 kN i 4,06 kN, przyłożonymi w środkach ciężkości odpowiednich pól. Z tych sił zastępczych i rzeczywistych sił skupionych tworzymy, zachowując ich zwroty, jeden ciąg, w którym kolejność ich jest taka jak na belce. Następnie budujemy wielobok sił (rys. 5.24b). Przenosząc równolegle na rysunek odpowiednie boki $N_I \div N_{IV}$ mamy wielobok sznurowy $LGIFK$ (rys. 5.24c). Przedstawia on postać równowagi (kształt) sznura obciążonego siłami skupionymi, przy czym siła wzdłużna w odcinku LG jest N_I , w odcinku GI jest N_{II} itd. Rzeczywista linia sznurowa jest styczna do boków wieloboku w punktach $C'D'$ i E' odpowiadających punktom C, D, E podziału obciążenia ciągłego⁽²⁾. Bez wielkiego błędu linię tę kreślimy w sposób przybliżony. Na części LC' oraz $E'F'K$, gdzie nie ma obciążenia ciągłego, linia sznurowa pokrywa się z wielobokiem sznurowym. Jej rzędne $z(x)$ mierzone są w tej samej skali co i skala belki. Pozioma składowa H napięcia liny jest w skali wieloboku sił równa odległości bieguna O_p od ciągu sił P .

⁽¹⁾ Dygresja z matematyki. Przy spełnieniu warunku (5.5) rozwiązania równań (5.3) i (5.4) są

$$M_g(x) = f(x) + B_1 x + B_2, \quad Hz(x) = f(x) + C_1 x + C_2,$$

gdzie $f(x)$ jest tą samą funkcją x , a B_1, B_2, C_1, C_2 są stałymi całkowania. Gdy $M_g \equiv Hz$, wówczas te stałe muszą być odpowiednio równe. Jeśli dla x_1 i x_2 zachodzą równości

$$M_g(x_1) = Hz(x_1), \quad M_g(x_2) = Hz(x_2),$$

to podstawiając za M_g i Hz poprzednie wyrażenia mamy

$$(B_1 - C_1)x_1 + (B_2 - C_2) = 0, \quad (B_1 - C_1)x_2 + (B_2 - C_2) = 0,$$

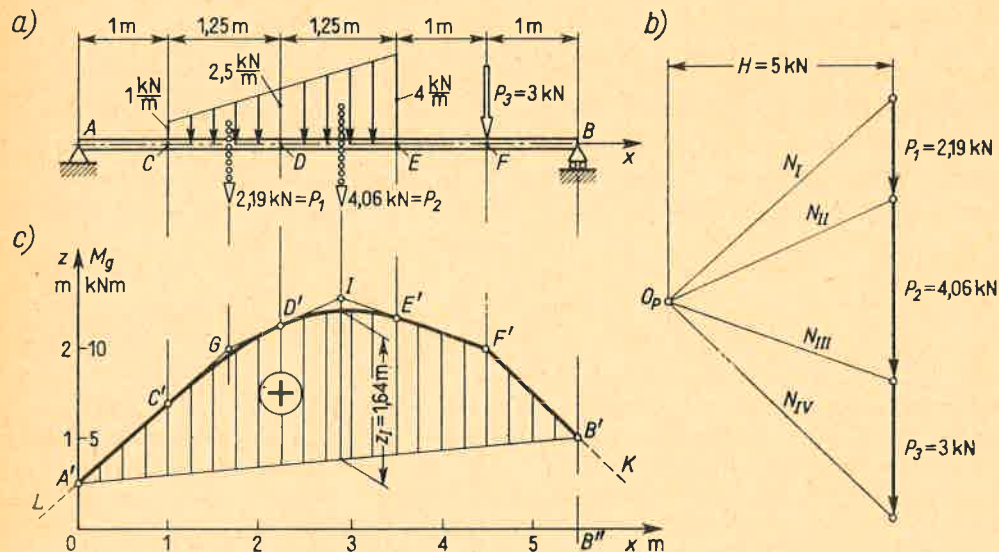
które spełnione są tylko wtedy, gdy $B_1 = C_1, B_2 = C_2$, c.b.d.d.

⁽²⁾ Podzielmy siłę zastępczą 4,06 kN na wiele sił. Na wieloboku sił pojawią się nowe boki N , ale skrajne N_{II} i N_{III} zostaną te same. Wobec tego na odcinku $D'E'$ skrajne elementy linii sznurowej będą styczne do starych boków GI i IF w punktach D' i E' .

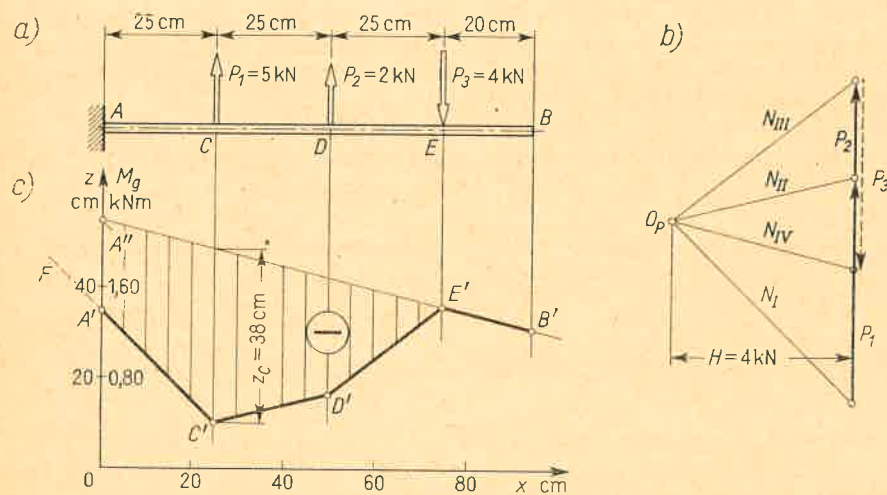
Aby otrzymana linia sznurowa $LC'D'E'F'K$ reprezentowała M_g , musimy uzgodnić wartości $M_g = Hz$ w dwóch przekrojach. W belce momenty M_g w przekrojach nad podporami są równe zero. W tych więc punktach rzędne $z(x)$ muszą też być równe zero. Oznacza to, iż $z(x)$ muszą być mierzone nie od osi x , lecz od prostej $A'B'$. Na przykład w przekroju odpowiadającym zastępczej sile P_2 rzędna $z_I = 1,64$ m i według (5.6)

$$(M_g)_I = z_I H = 1,64 \text{ m} \cdot 5 \text{ kN} = 8,20 \text{ kNm}.$$

W ostatecznym zatem wyniku rzędne zakreskowanego pola między linią sznurową $A'C'D'E'F'B'$ a prostą $A'B'$ są proporcjonalne do M_g . Wystarczy zmienić jedynie skalę, aby ten wykres stał się wykresem M_g . Należy zauważyć, że przez umieszczenie bieguna O_P z lewej strony ciągu sił P_1, P_2, P_3 usunięto potrzebę zmiany znaku obciążeń przewidzianą wzorem (5.5).



Rys. 5.24. Wykreślne wyznaczenie M_g w belce dwupodporowej



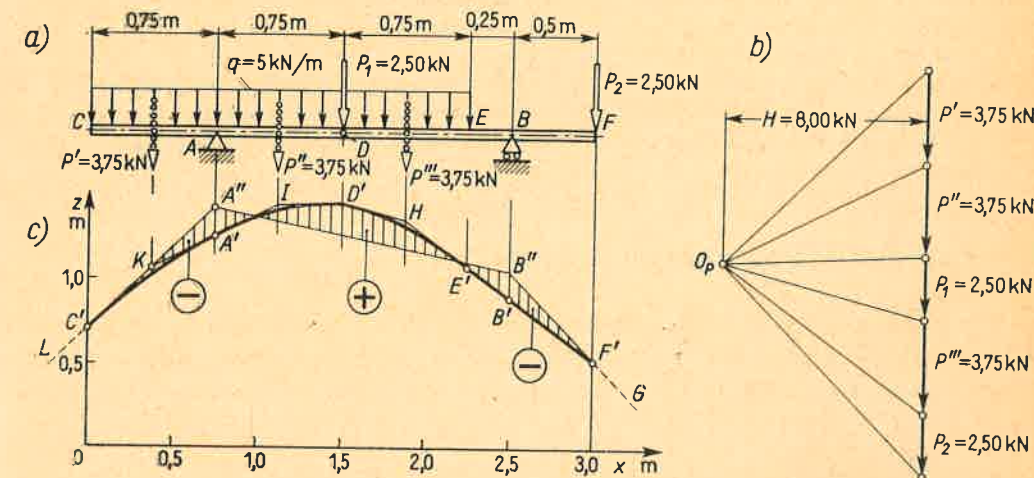
Rys. 5.25. Wykreślne wyznaczenie M_g w belce wspornikowej

2. Wyznaczyć wykreślnie $M_g(x)$ w belce wspornikowej (rys. 5.25).

Rozwiązanie. Po narysowaniu ciągu sił P_1, P_2, P_3 i wieloboku sił (rys. 5.25b), kreślimy wielobok sznurowy $FC'D'E'B'$ (rys. 5.25c). Z uwagi na brak obciążeń ciągłych jest on poszukiwaną linią sznurową. Aby ta linia stała się wykresem M_g , zauważmy, że na odcinku EB belki $M_g \equiv 0$ i rzędna $z(x)$ musi być tam równa zero. Oznacza to, iż $z(x)$ należy mierzyć nie od osi x , lecz od prostej $E'B'$. Wtedy rzędne zakreskowanego pola zawarte między prostą $A'E'B'$ a linią sznurową są proporcjonalne do M_g . Na przykład w przekroju C mamy według (5.6)

$$(M_g)_C = Hz_C = 4 \text{ kN} \cdot 38 \text{ cm} = 1,52 \text{ kNm},$$

przy czym $H = 4 \text{ kN}$ – pozioma składowa sił N (rys. 5.25b).



Rys. 5.26. Wykreślne wyznaczenie M_g w belce z wysięgnikami

3. Wyznaczyć wykreślnie $M_g(x)$ w belce z wysięgnikami (rys. 5.26).

Rozwiązanie. Po wprowadzeniu zastępczych sił P', P'', P''' , zbudowaniu wieloboku sił (rys. 5.26b) i wieloboku sznurowego $LKID'HF'G$ wygładzamy ten ostatni na odcinku $C'E'$ przez wpisanie linii sznurowej stycznej w punktach C', A', D' i E' podziału obciążenia ciągłego. W punkcie D' odpowiadającym sile P_1 mamy przy tym załom i dwie różne styczne, tj. ID' oraz $D'H$. Aby ta linia przedstawiała wykres M_g , musimy dopasować linię odniesienia. Przez analogię do zadania 2 linią odniesienia na wysięgniku AC jest prosta $C'L$ przedłużona aż do punktu A'' i podobnie na wysięgniku BF linia $F'G$ przedłużona aż do punktu B'' . Rzędne $A''A'$ i $B''B'$ przedstawiają w pewnej skali momenty gnące w przekrojach A i B . Aby uzgodnić na odcinku AB rzędne linii sznurowej z wykresem M_g , linią odniesienia musi być prosta $A''B''$. W tym więc przypadku linia odniesienia jest *lamana*, a nie prosta jak w zadaniu 1 i 2.

Uwagi ogólne do zadań 1÷3. We wszystkich przypadkach znak M_g pokrywa się ze znakiem rzędnej linii sznurowej mierzonej od linii odniesienia. Na przykład na rys. 5.24 rzędne te mierzone od linii $A'B'$ są dodatnie, a więc i dodatnie są M_g , natomiast na rys. 5.26 są one częściowo dodatnie, częściowo ujemne.

Przyglądając się krytycznie wynikom można od razu ocenić zalety i wady metody wykreślnej w porównaniu z metodą analityczną. Do zalet należy usunięcie obliczenia reakcji i żmudnych często rachunków. Wadą jest nie zawsze dostateczna dokładność. W przypadkach jak na rys. 5.24 i 5.25 dokładność ta jest rzędu $\pm 1,5\%$ i jest wystarczająca dla potrzeb technicznych. Inaczej przedstawia się przypadek (rys. 5.26), gdy lamana linia odniesienia $C'A''B''F'$ przebiega blisko linii sznurowej. Błędy mogą wtedy być rzędu 10% i więcej. Aby takich błędów uniknąć, należy konstrukcję wykreślną wykonać starannie i w większej skali. Należy podkreślić, że wprowadzenie zbyt dużej liczby sił zastępczych

obciążenie ciągle nie zwiększa dokładności. Przyczyną są dodatkowe błędy związane z kreśleniem większej liczby boków.

4. W belce (rys. 5.24) podpory A i B przesunięto odpowiednio do punktów C i F . Jak zmieni się wykres momentów gnących?

Odp. Linia sznurowa zostanie ta sama, $C'F'$ nowa linia odniesienia, od której mierzymy rzędne $z(x)$ na odcinku CF . Na wysięgnikach AC i FB : $M_g \equiv 0$.

5. W belce (rys. 5.24) podporę B przesunięto raz do punktu E , drugi raz do punktu D . Który z wariantów jest lepszy z uwagi na pożądaną redukcję maksymalnego momentu gnącego?

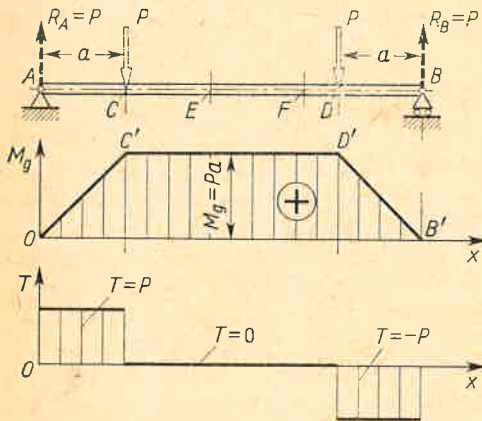
Rozwiązanie. Gdy podpora jest w punkcie E , wówczas wykres M_g otrzymamy przedłużając linię $F'B'$ do przecięcia z prostą EE' . Łącząc ten (nie podany na rysunku) punkt przecięcia E'' z punktem A mamy łamaną linię odniesienia $A'E''F'$. Ekstremalny moment występuje nad podporą E i jest -3 kNm . W drugim wariantcie linię $F'B'$ musimy przedłużyć aż do przecięcia z linią DD' i od razu widać, że ten drugi wariant jest mniej korzystny.

6. W belce (rys. 5.25) usunięto utwierdzenie i wstawiono podpory przegubowe w punktach A i B . Czy taka zmiana podparcia jest korzystna z uwagi na zmniejszenie wartości $(M_g)_{\text{ekstr}}$?

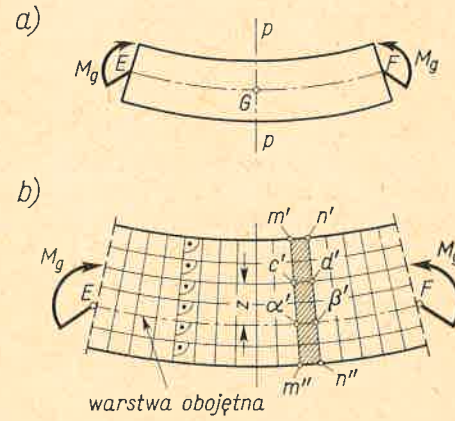
Odp. Linia sznurowa zostaje bez zmian, nową linią odniesienia jest prosta $A'B'$ i widać od razu, że zmiana jest korzystna.

5.5. Naprężenia przy czystym zginaniu

Wyznaczenie naprężeń i odkształceń w danym przekroju belki rozpoczniemy od przypadku czystego zginania belki *pryzmatycznej, gdy jej zgięcie zachodzi w płaszczyźnie działania momentu gnącego* (płaszczyźnie rysunku).⁽¹⁾ Jeden ze sposobów realizacji tego stanu



Rys. 5.27. Realizacja czystego zginania



Rys. 5.28. Obraz odkształceń przy czystym zginaniu

pokazano na rys. 5.27. Na odcinku CD belki mamy tu stały moment $M_g = Pa$ i siłę tnącą $T = 0$, co pokrywa się z definicją czystego zginania (art. 1.4 i 5.1). Jeśli pominąć pewien wpływ odcinków AC i BD , to elementy odcinka CD znajdują się w jednakowych

⁽¹⁾ Ilustracją tego jest zginanie belki o przekroju symetrycznym ustawionej symetrycznie względem płaszczyzny rysunku. Taka sytuacja nie jest jednak regułą. Wprowadzone ograniczenie wyróżnia zatem pewien szczególnie przypadek zginania i związane jest ze specjalnym warunkiem podanym poniżej.

warunkach ($M_g = \text{const}$, $T = 0$) i jeśli jeden z nich ulega zakrzywieniu, to takie samo zakrzywienie mają pozostałe. Krzywizna belki na odcinku CD jest więc stała i belka wygina się w łuk koła. W tych warunkach *plaskie przekroje prostopadłe do osi belki przed odkształceniem muszą zostać płaskie i prostopadłe do zakrzywionej po odkształceniu osi belki*.⁽¹⁾ Wynika stąd, że przekroje te ulegają względnemu obrotowi (rys. 5.28b). Narysowana na bocznej powierzchni prostokątna siatka o bokach równoległych do osi zamienia się po odkształceniu na krzywoliniową z zachowaniem przy tym kątów prostych.

Na skutek obrotu przekrojów wzdłużne elementy belki, tzw. *włókna*, doznają odkształceń. Jak wiemy z art. 5.2, część włókien ulega skróceniu, część wydłużeniu. Między nimi musi więc być pewna warstwa $E\alpha\beta'F$, tzw. *warstwa obojętna*, której wydłużenia są równe zero. Załóżmy, że jej położenie oraz promień krzywizny ρ są znane. Narysujmy teraz fragment $m-n$ belki przed i po odkształceniu (rys. 5.29). Pewne włókno cd leżące w odległości z od warstwy obojętnej $\alpha\beta$ miało początkowo długość s taką jak inne włókna. Jego długość s' po odkształceniu jest

$$s' = s \frac{\rho - z}{\rho} = s \left(1 - \frac{z}{\rho}\right). \quad (\text{a})$$

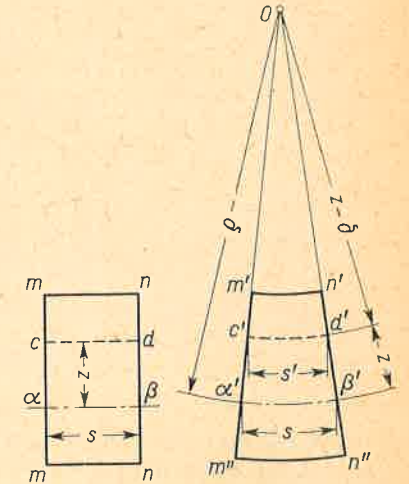
Wynika to z podobieństwa figur $Oc'd'$ i $O\alpha'\beta'$, przy czym długość warstwy obojętnej $\alpha'\beta'$ jest nadal s . Według definicji art. 1.6, względne odkształcenie $\varepsilon = (s' - s)/s$, i po podstawieniu s' z wzoru (a)

$$\varepsilon = -z/\rho. \quad (5.7)$$

Tak więc, przy czystym zginaniu odkształcenia względne włókien są proporcjonalne do ich odległości od warstwy obojętnej. Włókna powyżej warstwy obojętnej ($z > 0$) ulegają skróceniu ($\varepsilon < 0$), leżące zaś poniżej ($z < 0$) ulegają wydłużeniu ($\varepsilon > 0$). Zależność (5.7) wynika z rozważań geometrycznych. Jest więc słuszna niezależnie od tego, czy materiał jest, czy nie jest sprężysty.

Jeśli obciążenia belki są takie, że materiał jej zostaje sprężysty, to słuszne jest prawo Hooke'a. W tym miejscu wprowadzamy zweryfikowaną przez teorię sprężystości i doświadczenie hipotezę, że ewentualne naciski (naprężenia) w kierunku poprzecznym do włókien można zaniedbać. Wtedy każde włókno pracuje jak elementarny pręt na rozciąganie lub

⁽¹⁾ A oto dowód. Wydzielmy z belki (rys. 5.27) dowolny odcinek EF (rys. 5.28a). Punkty przekroju $p-p$ symetrycznie położonego względem E i F nie mają przemieszczeń ani w prawo, ani w lewo, gdyż materia odkształca się w sposób ciągły (bez szczelin), a jedna i druga strona są równoprawne. Tak więc przekrój $p-p$ zostaje płaski prostopadły do zakrzywionej osi EGF . Ponieważ każdy przekrój na odcinku CD belki jest płaszczyzną symetrii odpowiednio obranego odcinka EF , wynika stąd zatem sformułowany powyżej kanon.

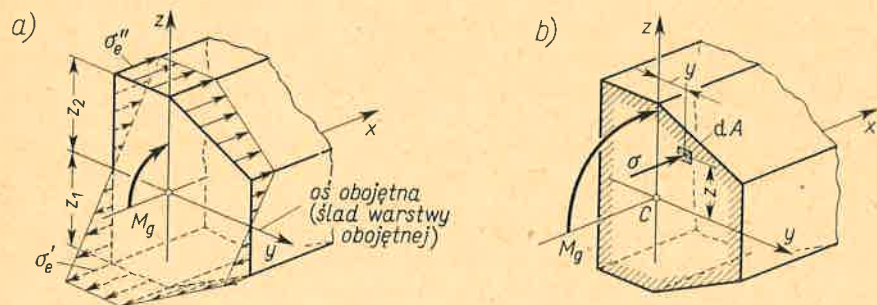


Rys. 5.29. Określenie odkształceń względnych

ściskanie. Uwzględniając (5.7) i prawo Hooke'a mamy w tym włóknie naprężenia

$$\sigma = E\varepsilon = -Ez/\varrho. \quad (5.8)$$

Obraz naprężeń w przekroju poprzecznym (rys. 5.30) ma więc te same cechy i znaki co i odkształcenia względne.



Rys. 5.30. Obraz naprężeń przy czystym zginaniu

Mając prawo rozkładu σ określimy nie znane dotąd położenie warstwy obojętnej i jej promień krzywizny oraz wartości σ w funkcji momentu gnącego. Zauważmy, że przy czystym zginaniu siła wzdłużna $N = 0$. Z drugiej strony siła ta jest równa algebraicznej sumie elementarnych sił σdA (rys. 5.30b), czyli

$$N = 0 = \int_A \sigma dA = - \int_A (Ez/\varrho) dA = -(E/\varrho) \int_A z dA, \quad (b)$$

przy czym wielkości stałe E i ϱ wyniesiono za znak całki. Z wzoru (b) wynika, że ślad warstwy obojętnej, czyli oś y , od której mierzymy odległości z , leży w przekroju tak, że

$$\int_A z dA = 0. \quad (c)$$

Całka ta jest momentem statycznym pola przekroju względem osi y i ma wartość równą zeru, gdy oś ta jest centralna. Oś y jest z kolei prostopadła do płaszczyzny zx zgięcia belki. Ujmując te fakty w jedno, powiemy, że ślad warstwy obojętnej, tzw. oś obojętna, jest osią centralną przekroju prostopadłą do płaszczyzny zgięcia.

Podobnie wykorzystamy warunek momentów. Moment elementarnej siły σdA względem osi y , obliczony przy założeniu $\sigma > 0$, jest $-\sigma z dA = Ez^2 dA/\varrho$. Suma takich wszystkich momentów musi być równa momentowi wypadkowemu, czyli M_g . Wynika stąd

$$M_g = \int_A (E/\varrho) z^2 dA = (E/\varrho) \int_A z^2 dA. \quad (d)$$

Figurująca we wzorze (d) całka jest znanym już z art. 4.1 momentem bezwładności J_y pola przekroju względem osi y , tj. osi obojętnej. Wprowadzając to pojęcie do wzoru (d) mamy zależność

$$\frac{EJ_y}{\varrho} = M_g \quad \text{lub} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{M_g}{EJ_y}, \quad (5.9)$$

wyrażającą, że krzywizna warstwy obojętnej, tj. $1/\varrho$, jest proporcjonalna do momentu gnącego, a odwrotnie proporcjonalna do iloczynu EJ_y , tzw. sztywności na zginanie.

Wyznaczając z (5.9): $E/\varrho = M_g/J_y$ i wstawiając do (5.8) mamy

$$\sigma = - \frac{M_g z}{J_y}. \quad (5.10)$$

Tak więc wartość naprężenia σ w danym włóknie jest proporcjonalna do momentu gnącego, a odwrotnie proporcjonalna do momentu bezwładności przekroju. Jak widać, wartość ta nie zależy od rodzaju materiału, o ile tylko jest on sprężysty. Ekstremalne naprężenia ściskające σ_e'' i rozciągające σ_e' występują we włókniach, których odległości z_2 i z_1 od osi obojętnej są największe (rys. 5.30a). Ich wartość wyrażamy w postaci

$$\sigma_e' = M_g/W_y', \quad \sigma_e'' = -M_g/W_y'', \quad (5.11)$$

gdzie tzw. wskaźniki wytrzymałości na zginanie W_y' i W_y''

$$W_y' = J_y/z_1, \quad W_y'' = J_y/z_2 \quad (5.12)$$

są wielkościami czysto geometrycznymi o dodatniej wartości. Ich wymiarem jest cm^3 . Dla prostokąta na przykład (rys. 4.3)

$$W_y' = W_y'' = bh^2/6, \quad (e)$$

a dla przekroju kołowego drażonego (patrz zadanie 2 art. 4.1)

$$W_y' = W_y'' = (\pi d^3/32) [1 - (d_w/d_z)^4] \approx 0,1 d_z^3 [1 - (d_w/d_z)^4]. \quad (f)$$

Dla takich symetrycznych względem osi y przekrojów mamy $W_y' = W_y'' = W_y$ i ekstremalne naprężenia $|\sigma_e'| = |\sigma_e''|$. Na ogół tak nie jest i obie te wartości należy zawsze określić.

Obliczmy z kolei sumę momentów sił σdA względem osi z . Elementarny moment jest $\sigma dA y = -Ezy dA/\varrho$, a ich suma

$$- \int_A (Ezy/\varrho) dA = -(E/\varrho) \int_A yz dA = -EJ_{yz}/\varrho, \quad (g)$$

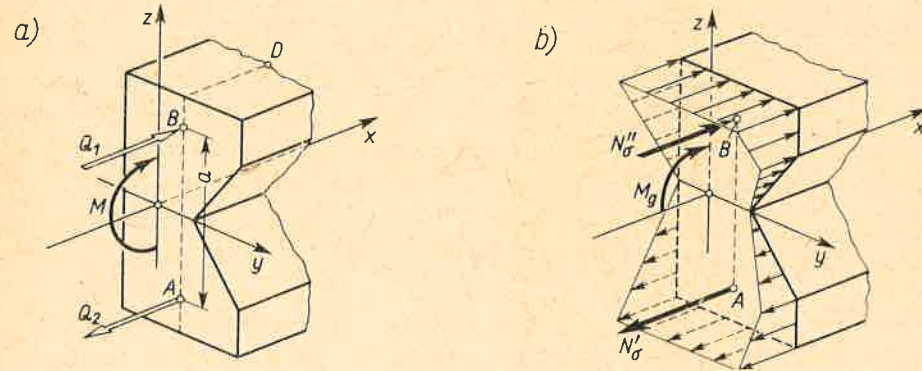
gdzie J_{yz} — odśrodkowy moment bezwładności przekroju względem centralnych osi y i z , znany już z art. 4.3. Ponieważ na początku założono, że wypadkowy moment działa w płaszczyźnie zgięcia xz , to jest rzeczą oczywistą, że wartość wyrażenia (g) jest równa zeru, co daje

$$J_{yz} = 0, \quad (5.13)$$

czyli że centralne osie y i z są głównymi. Warunek (5.13) jest tu konsekwencją początkowego założenia. Odwracając kolejność powiemy, że zgięcie belki zachodzi w płaszczyźnie działania momentu zginającego tylko wtedy, gdy ta płaszczyzna przechodzi przez główną centralną oś przekroju. Takie zgięcie nazywamy prostym, w odróżnieniu od zginania ukośnego, gdy płaszczyzna działania momentu nie pokrywa się z główną centralną osią przekroju.

Fizyczny sens rozważań prowadzących od wzoru (5.8) do wzorów (5.10) i (5.13) jest w gruncie rzeczy taki sam, jak w elementarnym zadaniu rozłożenia momentu M na dwie równoległe siły Q_1 i Q_2 (rys. 5.31a). Siły te muszą tworzyć parę sił, skąd $Q_1 = Q_2 = Q$. Ich moment Qa musi być równy M . Wreszcie ich płaszczyzna działania AB musi być równoległa do płaszczyzny xz działania momentu M . Te same trzy etapy mieliśmy w na-

szych rozważaniach, z tym że zamiast dwóch sił Q było nieskończenie wiele sił σdA związanych zależnością (5.8). I tak etap pierwszy, dający w wyniku wzór (c), odpowiada stwierdzeniu, że $Q_1 = Q_2 = Q$. Etap drugi, kończący się wzorem (5.10), odpowiada w elementarnym zadaniu wynikowi $Qa = M$. Wreszcie etap trzeci, kończący się wzorem

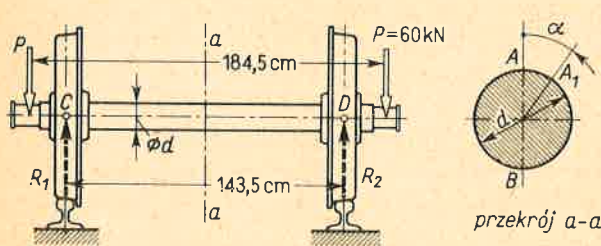


Rys. 5.31. Analogia zagadnień: a) rozkładu momentu M na parę sił $Q_1 = Q_2$ i b) wyznaczenia naprężeń σ przy zginaniu

(5.13), to stwierdzenie, że wypadkowa N'_σ wszystkich elementarnych sił ściskających i taka sama wypadkowa N'_σ wszystkich sił rozciągających (rys. 5.31b) leżą w płaszczyźnie AB równoległej do płaszczyzny xz działania momentu M_g .

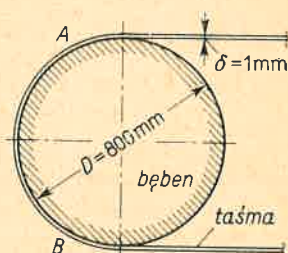
Zadania

1. Wyznaczyć średnicę d środkowej części osi wagonu (rys. 5.32), aby ekstremalne naprężenia $\sigma_e < 75$ MPa.
Odp. Mamy tu czyste zgięcie; $M_g = 12,3 \cdot 10^3$ N m; $W_y = \pi d^3/32$. Z wzoru (5.11) i warunku na σ_e mamy $d_{\min} = \sqrt[3]{32 M_g / \pi \sigma_e} = 11,9$ cm ≈ 12 cm.



Rys. 5.32. Do zadania 1 i 2

2. Jak zmieniają się naprężenia we włóknie A osi z zadania 1, gdy wagon toczy się po szynach?
Odp. Punkt A przechodzi kolejno w A_1, B, A, \dots ; płaszczyzna AB działania momentu jest stała; w położeniu A_1 według (5.10) $\sigma = (M_g/J_y)(d \cos \alpha/2) = \sigma_e \cos \alpha = 75 \cos \alpha$ MPa; kąt $\alpha = \omega t$; naprężenia zmieniają się cosinusoidalnie w funkcji czasu.



Rys. 5.33. Do zadania 4

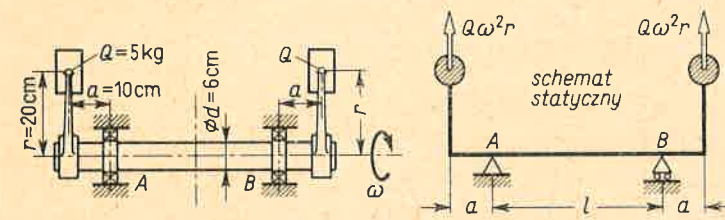
3. O jaki kąt ϑ (w płaszczyźnie rysunku) obróć się względem siebie przekroje C i D osi z zadania 1, jeśli $E = 2 \cdot 10^5$ MPa?
Odp. Kąt $\vartheta = CD/q = CD(2\sigma_e/Ed) \approx 9,3 \cdot 10^{-3}$ rad $\approx 0,53^\circ$.

4. Pierwotnie prostą stalową taśmę ($E = 2 \cdot 10^5$ MPa) nawinięto na bęben (rys. 5.33). Określić σ_e w odcinku AB taśmy, na którym przylega ona do bębna.
Odp. Na odcinku AB taśma staje się łukiem koła, a więc mamy tu czyste zginanie. Promień krzywizny warstwy obojętnej $\rho = (D + \delta)/2$, odległość $z_{\max} = \pm \delta/2$ i z wzoru (5.8) mamy

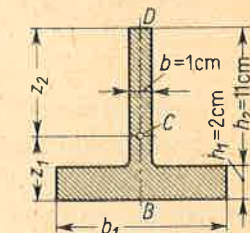
$$|\sigma'_e| = |\sigma''_e| = E z_{\max} / \rho = E \delta / (D + \delta) \approx E \delta / D = 250 \text{ MPa}$$

Takie zginanie taśm występuje w piłach taśmowych, wagach, przyrządach pomiarowych itp.

5. Osadzony w łożyskach A i B wałek z mimośrodowymi masami Q wiruje z n obr/min (rys. 5.34). Pomijając odkształcenia ustroju oraz siły ciężkości, określić \bar{n} , aby na odcinku AB naprężenia $\sigma_e < 100$ MPa.
Odp. Na odcinku AB mamy czyste zginanie; obciążenie stanowią siły bezwładności $Q\omega^2 r$; $M_g = Q\omega^2 r a$; przy $W_y = \pi d^3/32$ i $\sigma_e = 100$ MPa mamy z (5.11): $\omega = \sqrt{\pi d^3 \sigma_e / 32 Q r a} = 146$ rad/s, skąd $\bar{n} = 30\omega/\pi = 1390$ obr/min.



Rys. 5.34. Do zadania 5



Rys. 5.35. Do zadania 7

6. Dla przekrojów (rys. 4.5) obliczyć wskaźniki W'_y i W''_y .
Odp. Z racji symetrii $W'_y = W''_y = W_y$. Biorąc wyniki zadania 2 (art. 4.1) mamy: a) $W_y = 94$ cm³; b) $W_y = 43,6$ cm³; c) $W_y \approx 118$ cm³.

7. Określić wymiar b_1 żelaznej ławy (rys. 5.35), aby przy czystym zginaniu w płaszczyźnie DB stosunek naprężeń ściskających we włóknie D do rozciągających we włóknie B był 10/3.
Odp. Musimy dobrać b_1 tak, aby $z_1/z_2 = 3/10$, przy czym $z_1 + z_2 = h_1 + h_2 = h = 13$ cm, skąd $z_1 = 3$ cm, $z_2 = 10$ cm. Ponieważ

$$z_1 = [bh^2 + (b_1 - b)h_1^2] / 2 [bh + (b_1 - b)h_1],$$

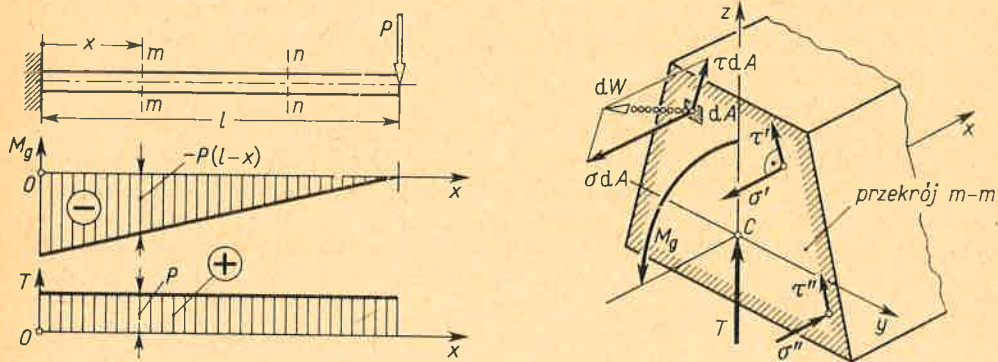
zatem przy danych b, h, h_1 i z_1 mamy $b_1 = 12,4$ cm.

8. Obliczyć wartość M_g dla ławy z zadania 7, gdy wywołuje on we włóknie D : a) ściskanie, b) rozciąganie, a dopuszczalne naprężenia na ściskanie $k_c = 100$ MPa, na rozciąganie $k_r = 30$ MPa.
Odp. $J_y = 441$ cm⁴. Dla włókna D jest $W''_y = 44,1$ cm³. Przy jego ściskaniu $M_g = k_c W''_y = 4410$ N m, przy rozciąganiu $M_g = k_r W''_y = 1320$ N m.

5.6. Naprężenia przy zginaniu poprzecznym

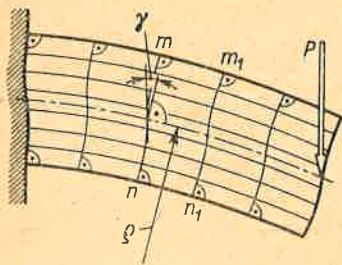
Jak już wiemy, przy zginaniu poprzecznym (rys. 5.36) wysiłek przekroju stanowi moment gnący M_g i siła tnąca T . Przy takiej postaci wysiłku elementarne siły dW rozłożone w sposób ciągły na przekroju mają nie tylko składowe σdA normalne do przekroju, lecz

i składowe styczne τdA . Wypadkową ze składowych σdA jest moment M_g , wypadkową ze składowych τdA jest siła T . Jest ponadto rzeczą jasną, że naprężenia σ w podobnych punktach *różnych* przekrojów, jak *m-m* i *n-n*, mają *różne* wartości, albowiem *różne* są w tych przekrojach momenty gnące.

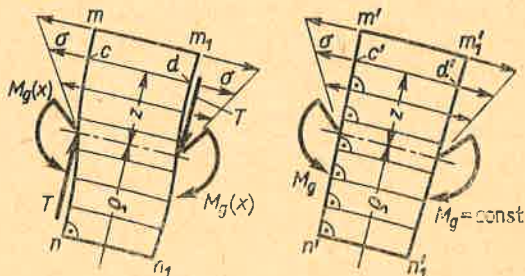


Rys. 5.36. Obraz naprężeń przy zginaniu poprzecznym

Istnienie naprężeń τ oraz zmiana wartości σ w funkcji x powodują, że obraz odkształceń pierwotnie prostokątnej siatki przedstawia się jak na rys. 5.37. W porównaniu z analogicznym obrazem dla czystego zginania (rys. 5.28) obserwujemy tu, że kąty między bokami odkształconej siatki nie są na ogół proste. Ta zmiana postaci określona kątem γ występuje najsilniej w środkowych oczkach siatki, natomiast w oczkach obejmujących włókna skrajne jest ona niezauważalna. Ponieważ naprężenia styczne są proporcjonalne do kąta γ



Rys. 5.37. Obraz odkształceń



Rys. 5.38. Określenie naprężeń normalnych

(art. 3.1), zaobserwowany więc fakt świadczy, że w przekroju poprzecznym belki naprężenia styczne τ są rozłożone *nierównomiernie*. Powoduje to, że linie proste pierwotnie prostopadłe do osi belki stają się po odkształceniu zakrzywione, a pierwotnie płaskie przekroje poprzeczne przestają być płaskimi.

Dokładniejsze badania doświadczalne oraz teoria sprężystości wykrywają jeszcze jeden podstawowy fakt. Okazuje się, że naprężenia τ mają mały, a niekiedy nawet zerowy, wpływ na względne wydłużenia włókien belki i że wydłużenia te zależą głównie od lokalnej wartości $M_g(x)$. Innymi słowy, jeśli w dwóch identycznych elementach belki, z których jeden podlega zginaniu poprzecznemu, a drugi zginaniu czystemu (rys. 5.38), mamy

$M_g(x) = M_g$, to odkształcenia ϵ odpowiadających sobie włókien cd i $c'd'$ są praktycznie jednakowe. To samo stwierdzenie dotyczy naprężeń σ . Wynika stąd, że zależności (5.7) ÷ (5.12) można stosować z techniczną dokładnością w przypadku zginania poprzecznego, wstawiając zamiast $M_g = \text{const}$ zmienny moment $M_g(x)$. W szczególności zamiast wzorów (5.10) i (5.11) mamy

$$\sigma = - \frac{M_g(x) z}{J_y}, \tag{5.14}$$

$$\sigma'_e = M_g(x)/W'_y, \quad \sigma''_e = -M_g(x)/W''_y. \tag{5.15}$$

Podobnie zamiast wzoru (5.9) mamy obecnie zależność

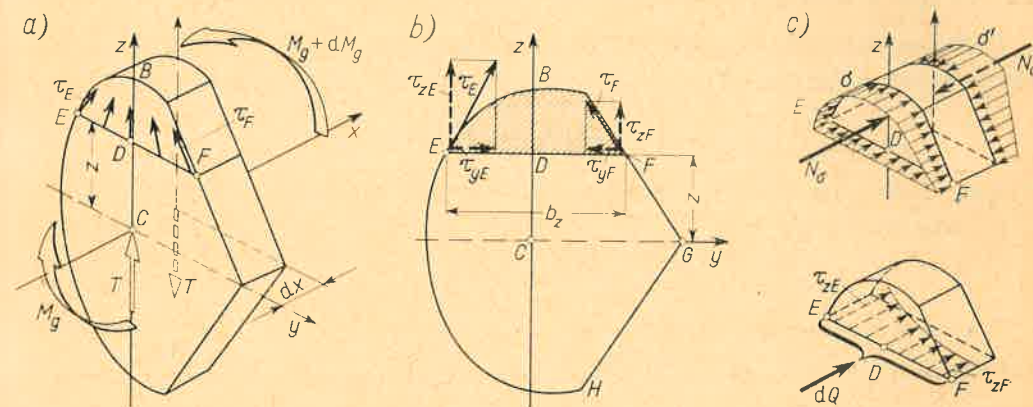
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_g(x)}{EJ_y}, \tag{5.16}$$

określającą krzywiznę warstwy obojętnej jako funkcję x .

Określenie rozkładu naprężeń stycznych jest ogólnie rozwiązane w teorii sprężystości. W nauce wytrzymałości materiałów przy ograniczonych środkach analizy zadowalamy się rozwiązaniami uproszczonymi. Najdalej idące jest założenie, że naprężenia τ są równomiernie rozłożone w przekroju poprzecznym i mają kierunek osi z (rys. 5.36). W takim ujęciu wartość $\tau = \tau_{sr}$:

$$\tau_{sr} = T/A = \text{const}, \tag{5.17}$$

otrzymujemy z warunku, że siła tnąca T jest wypadkową elementarnych sił τdA . Wynik (5.17), mimo swego prymitywizmu, ma pewne znaczenie, daje bowiem rząd wielkości τ .



Rys. 5.39. Określenie naprężeń τ w belce o przekroju zwartym

W rzeczywistości żadne z dwóch poprzednich prymitywnych założeń nie jest uzasadnione. W ogólnym przypadku (rys. 5.39a) kierunki naprężeń τ_E i τ_F mają na pewno kierunki stycznych do konturu⁽¹⁾. Z racji ciągłości zjawisk naprężenia w innych włóknach warstwy EF

⁽¹⁾ Wynika to z identycznego rozumowania jak w przypadku skręcania prętów (rys. 3.15 i 3.17).

mają jakieś kierunki pośrednie. Wobec tego upada założenie, że naprężenia τ są równoległe do osi z . Nie do przyjęcia jest również założenie o równomierności rozkładu τ , gdyż stoi to w jawnej sprzeczności z doświadczeniem. W tej skomplikowanej sytuacji dla otrzymania drugiego przybliżenia wartości τ zadowolamy się określeniem średnich naprężeń τ dla włókien warstwy EF odległej o z od osi obojętnej y . W tym celu wypadkowe naprężenia, jak τ_E , rozkładamy na składowe τ_{yE} i τ_{zE} (rys. 5.39b). Dla określenia składowych τ_z stosujemy teraz chwyt, polegający na dodatkowym rozcięciu badanego plasterka belki poziomą płaszczyzną EDF . Umożliwia to zbadanie równowagi nie całości plasterka, lecz jednej jego części, np. górnej. Na część tę działają naprężenia normalne σ i σ' w równoległych przekrojach plasterka oraz naprężenia styczne τ_z na płaszczyźnie EDF (rys. 5.39c). Istnienie tych ostatnich wynika z zasady symetrii naprężeń stycznych. Obliczmy teraz wypadkowe siły działające w kierunku osi x na tych trzech ścianach. Wypadkowa N_σ z naprężeń σ na ścianie BEF jest

$$N_\sigma = \int_{EF} \sigma dA, \quad (a)$$

gdzie symbol \int_{EF} oznacza sumowanie sił σdA na części przekroju powyżej linii EDF . Wstawiając σ z (5.14) mamy⁽¹⁾

$$N_\sigma = \int_{EF} (M_g/J_y) z^* dA = (M_g/J_y) \int_{EF} z^* dA = M_g S_y^{(z)}/J_y, \quad (b)$$

gdzie $S_y^{(z)} = \int_{EF} z^* dA$ — moment statyczny względem osi obojętnej y pola leżącego powyżej linii EDF (zakreskowane na rys. 5.39b).

Podobnie określamy wypadkowa N'_σ z naprężeń σ' na ścianie równoległej do BEF , gdzie moment gnący jest $M_g + dM_g$,

$$N'_\sigma = (M_g + dM_g) S_y^{(z)}/J_y. \quad (c)$$

Wreszcie oznaczając przez τ_z średnią wartość naprężeń stycznych w płaszczyźnie EDF mamy wypadkową ich dQ :

$$dQ = \tau_z b_z dx. \quad (d)$$

Ponieważ badana część plasterka jest w równowadze, zatem $N_\sigma + dQ - N'_\sigma = 0$ i po wykorzystaniu (b), (c) i (d) otrzymujemy

$$\tau_z b_z = \frac{dM_g}{dx} \frac{S_y^{(z)}}{J_y} = \frac{TS_y^{(z)}}{J_y}, \quad (5.18)$$

albowiem według (5.2) pochodna $dM_g/dx = T$.

Zbadajmy dla przykładu przekrój prostokątny (rys. 5.40). Podstawiając $b_z = b = \text{const}$,

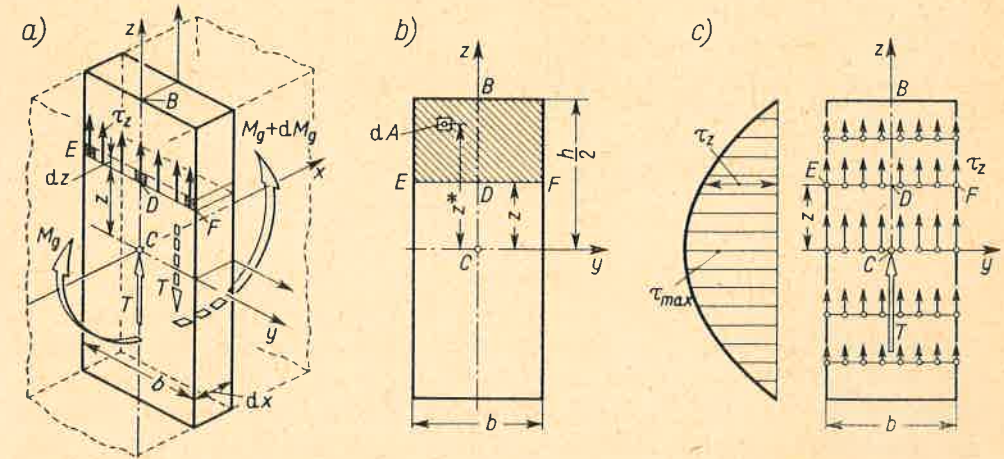
$J_y = bh^3/12$ oraz

$$S_y^{(z)} = \int_z^{h/2} z^* b dz^* = b \left. \frac{(z^*)^2}{2} \right|_z^{h/2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (e)$$

otrzymujemy z zależności (5.18) następujący wynik:

$$\tau_z = (3T/2bh) [1 - (2z/h)^2] = (3\tau_{sr}/2) [1 - (2z/h)^2], \quad (f)$$

gdzie $\tau_{sr} = T/bh$ jest średnią wartością τ_z określoną z (5.17). Jak widać, zależność τ_z od z jest paraboliczna (rys. 5.40c), naprężenie $\tau_{max} = 1,5\tau_{sr}$ występuje we włóknach warstwy



Rys. 5.40. Określenie τ_z w belce o przekroju prostokątnym

obojętną ($z = 0$). We włóknach skrajnych ($z = \pm h/2$) mamy $\tau_z = 0$ i $\gamma = 0$, co zgadza się z doświadczeniem (rys. 5.37). Widać również, że wypadkowa sił $\tau_z dA = \tau_z b dz$ jest

$$\int_A \tau_z dA = \int_{-h/2}^{+h/2} (3\tau_{sr}/2) [1 - (2z/h)^2] b dz = (3\tau_{sr}/2) b (2h/3),$$

a więc jest ona równa $\tau_{sr} bh = \tau_{sr} A = T$, jak być musi.

Podobnie dla przekroju kołowego (rys. 5.41a) wyznaczamy⁽¹⁾

$$S_y^{(z)} = d^3 \sin^3 \alpha/12, \quad J_y = \pi d^4/64, \quad b_z = d \sin \alpha,$$

⁽¹⁾ Moment statyczny elementarnego paska $b_z^* dz^*$ jest $b_z^* z^* dz^*$, a moment $S_y^{(z)}$ całego pola powyżej linii EF

$$S_y^{(z)} = \int_z^{d/2} b_z^* z^* dz^*.$$

Wprowadzając kąt α^* jako nową zmienną, mamy

$$b_z^* = d \sin \alpha^*, \quad z^* = (d/2) \cos \alpha^*, \quad dz^* = -(d/2) \sin \alpha^* d\alpha^*.$$

Dolna granica całkowania jest $\alpha^* = \alpha$, górna $\alpha^* = 0$. W wyniku

$$S_y^{(z)} = - \int_\alpha^0 (d^3/4) \sin^2 \alpha^* \cos \alpha^* d\alpha^* = d^3 \sin^3 \alpha/12.$$

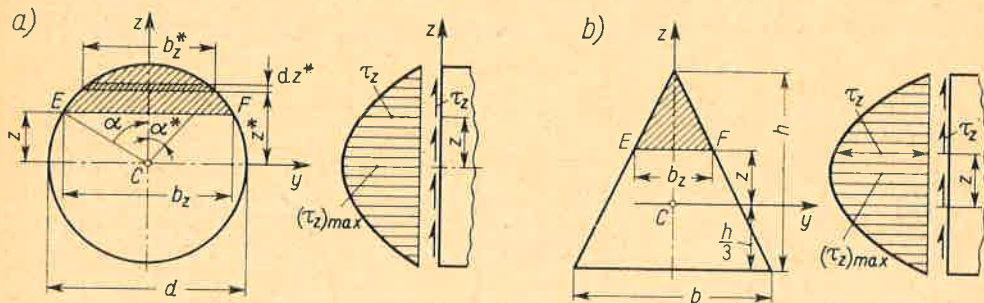
⁽¹⁾ Aby odróżnić rzędną z warstwy EDF od współrzędnej pola dA , tę ostatnią oznaczono przejściowo przez z^* .

przy czym położenie badanej warstwy EF określono kątem α , a nie współrzędną z . Po podstawieniu do (5.18) mamy

$$\tau_z = (16T/3\pi d^2) \sin^2 \alpha = (4\tau_{sr}/3) \sin^2 \alpha, \quad (g)$$

gdzie $\tau_{sr} = 4T/\pi d^2 = T/A$. Jak widać, maksymalne τ_z występują w warstwie obojętnej ($\sin \alpha = 1, z = 0$) i są one

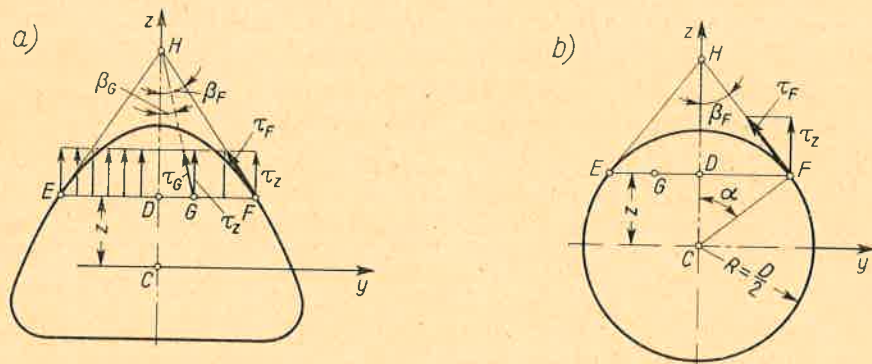
$$\tau_{max} = 4T/3A = (4/3) \tau_{sr}. \quad (h)$$



Rys. 5.41. Przykłady obliczenia naprężeń stycznych

Dla innych włókien przebieg τ_z uwidocznił na rysunku. Z tych przykładów widać, że dla włókien skrajnych wzór (5.18) daje $\tau_z = 0$. Wynik ten nie jest przypadkowy. W dowolnym przekroju (rys. 5.39), gdy badana warstwa EDF zbliża się do górnych skrajnych włókien, wówczas pole zakreskowane na rys. 5.39b maleje i jego moment $S_y^{(z)} \rightarrow 0$. Gdy badana warstwa zbliża się do dolnych skrajnych włókien, wówczas zakreskowane pole obejmuje prawie cały przekrój i wtedy $S_y^{(z)} \rightarrow 0$, gdyż oś y jest centralna.

W niektórych przypadkach wzór (5.18) „udoskonalamy” uwzględniając rzeczywiste kierunki działania naprężeń τ . Na przykład w przekroju symetrycznym względem osi z (rys. 5.42a) kierunki τ dzia-



Rys. 5.42. Uwzględnienie rzeczywistych kierunków naprężeń τ

łających w punktach E, D i F przecinają się w jednym punkcie H . Racjonalnie jest założyć, że linia działania naprężenia w innym punkcie G tejże warstwy przechodzi też przez punkt H . Przyjmując obliczoną z (5.18) wartość τ_z jako prawdziwą dla wszystkich punktów, możemy wyznaczyć „rzeczy-

wiste” naprężenie. Na przykład dla punktów F i G mamy

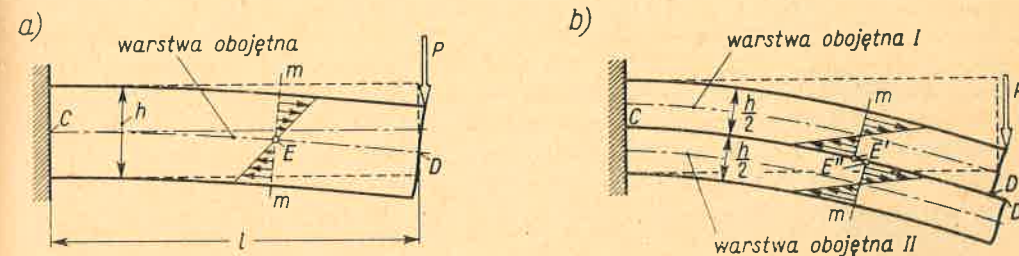
$$\tau_F = \tau_z / \cos \beta_F, \quad \tau_G = \tau_z / \cos \beta_G. \quad (i)$$

W przekroju kołowym (rys. 5.42b), gdzie $\beta_F = 90^\circ - \alpha$, wzór (i) przy wykorzystaniu wyniku (g) daje

$$\tau_F = (4\tau_{sr}/3) \sin \alpha. \quad (j)$$

Gdy kontur przekroju nie ma ostrych naroży, korekta według wzoru (i) daje wyniki bliższe rzeczywistości niż wzór (5.18) (błąd rzędu 6%).

Istnienie naprężeń τ_z w płaszczyznach równoległych do warstwy obojętnej nie jest fikcją, lecz stanowi przejaw fizycznych więzów. Można się o tym przekonać, porównując obrazy odkształceń: pierwotnej belki (rys. 5.43a) i tejże belki po rozcięciu jej w płaszczyźnie CED (rys. 5.43b). Każda z części tej drugiej belki zgina się niezależnie (pomijając tarcie). W każdej z nich górne włókna są rozciągane, a dolne ściskane. W miejscu rozcięcia ściskana warstwa $CE'D'$ górnej części ślizga się po rozciąganej warstwie $CE''D''$ dolnej części. Tęgo zjawiska nie ma w pierwotnej belce, dzięki czemu jest ona znacznie sztywniejsza, a naprężenia w niej mniejsze niż w przypadku belki rozciętej.



Rys. 5.43. Wpływ usunięcia więzów międzypłaszczyznowych na odkształcenia przy poprzecznym zginaniu

Podsumowując stwierdzamy, że w belkach o przekroju zwartym (koło, prostokąt itd.) strefa maksymalnych naprężeń stycznych znajduje się w środkowej części przekroju, a wartość τ_{max} jest rzędu $\tau_{sr} = T/A$. Inna jest sytuacja, gdy przekrój jest cienkościenny (rys. 3.22). Określenie naprężeń τ wiąże się tu z szeregiem innych zagadnień rozpatrzonych w rozdz. 13.

Zadania

1. Belka (rys. 5.20), w której $c_1 = c_2 = 1$ m, $l_1 = 4$ m, $q = 2$ kN/m, ma przekrój teowy (rys. 5.35). Biorąc wyniki zadania 8 (art. 5.5) wyznaczyć σ_c w niebezpiecznych przekrojach.

Odp. Według rys. 5.20d niebezpieczny może być przekrój nad podporą, gdzie $M_g = -qc_1^2/2 = -10^3$ N m, bądź przekrój środkowy, gdzie $M_g = (ql_1^2/8) - (qc_1^2/2) = 3 \cdot 10^3$ N m. Oznaczając σ_D i σ_B naprężenia we włóknach D i B mamy w przekroju nad podporą $\sigma_D = 22,7$ MPa, $\sigma_B = -6,8$ MPa, a w przekroju środkowym $\sigma_D = -68,1$ MPa, $\sigma_B = 20,4$ MPa.

2. Belka (rys. 5.10) jest rurą o zewnętrznej średnicy $d_z = 10$ cm. Dobrać wewnętrzną średnicę d_w , aby $\sigma_c \leq k = 100$ MPa.

Odp. Niebezpieczny jest przekrój D , gdzie $M_g = 3$ kN m. Przy $\sigma_c = k$ niezbędny wskaźnik $W_y =$

$= M_g/k = 30 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 30 \text{ cm}^3$. Ponieważ $W_y = (\pi d_z^3/32) [1 - (d_w/d_z)^4]$, zatem $1 - (d_w/d_z)^4 = 0,307$ i $d_w/d_z = 0,913$ oraz $d_w \leq 9,13 \text{ cm}$, na przykład $d_w = 9,1 \text{ cm}$.

3. Jaki jest promień ρ krzywizny warstwy obojętnej w przekrojach A , D , F belki z zadania poprzedniego, jeśli $E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ MPa}$?

Odp. Moment bezwładności $J_y = W_y d_z/2 = 150 \text{ cm}^4 = 150 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$, sztywność $EJ_y = 3,0 \cdot 10^{11} \times 150 \cdot 10^{-8} = 3,0 \cdot 10^5 \text{ N m}^2$. Z wzoru (5.16) $\rho = EJ_y/M_g$ i biorąc dane z rys. 5.10 mamy $\rho_A = \infty$, $\rho_D = 3,0 \cdot 10^5/3 \cdot 10^3 = 100 \text{ m}$, $\rho_F = -150 \text{ m}$. Odpowiedź $\rho > 0$ oznacza wypukłość do dołu, $\rho < 0$ wypukłość do góry.

4. Belka (rys. 5.14) o wymiarach $a = 4 \text{ m}$, $l = 6 \text{ m}$ jest dwuteówką (rys. 4.6a). Biorąc wyniki zadania 3 (art. 4.1) określić moment M_D^* , aby naprężenie $\sigma_e \leq k = 160 \text{ MPa}$.

Odp. Wskaźnik $W_y = 337 \text{ cm}^3$; stąd $(M_g)_{\text{ekstr}} = kW_y = 5,40 \cdot 10^4 \text{ N m}$. Przy danych a i l jest $(M_g)_{\text{ekstr}} = M_D^* a/l = 2M_D^*/3$, skąd $M_D^* = 1,5 (M_g)_{\text{ekstr}} = 1,5 \cdot 5,40 \cdot 10^4 = 8,10 \cdot 10^4 \text{ N m}$.

5. Belka (rys. 5.6), w której $a = 2 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $P = 24 \text{ kN}$, ma przekrój prostokątny ($h = 18 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$). Wyznaczyć σ_e i τ_{max} .

Odp. Niebezpieczny przekrój leży tuż na prawo od punktu E , bo $M_g = (M_g)_{\text{ekstr}} = 16 \text{ kN m}$, a jednocześnie działa tam większa siła tnąca $T = 16 \text{ kN}$. Z wzoru (5.15) $\sigma_e = \pm 98,8 \text{ MPa}$, z (5.17) $\tau_{\text{sr}} = T/A = 2,96 \text{ MPa}$, a z wzoru (f) $\tau_{\text{max}} = 1,5\tau_{\text{sr}} = 4,44 \text{ MPa}$. Jak widać, τ_{max} jest wielokrotnie mniejsze (około 22 razy) od σ_e .

6. Belka (rys. 5.43a) o przekroju prostokątnym sklejona jest z dwóch drewnianych listew, każda o wymiarach $b_1 = 4 \text{ cm}$ i $h_1 = 3 \text{ cm}$. Obliczyć naprężenia w kleju, jeśli $P = 3 \text{ kN}$.

Odp. Po sklejeniu mamy belkę o wymiarach $b = b_1 = 4 \text{ cm}$ i $h = 2h_1 = 6 \text{ cm}$. Naprężenia w kleju $\tau_z = \tau_{\text{max}} = 1,5\tau_{\text{sr}} = 1,5 \cdot 3000/(4 \cdot 6 \cdot 10^{-4}) = 1,88 \text{ MPa}$, gdyż powierzchnia sklejania pokrywa się z warstwą obojętną belki. Pomimo tak małej wartości, naprężenia te mogą decydować o bezpieczeństwie gdyż wytrzymałość kleju na ścinanie nie jest duża (rzędu 10 MPa).

7. Obliczyć wartość τ_z dla przekroju trójkątnego (rys. 5.41b).

Odp. $\tau_z = (12T/hh^3) [(2h/3) - z] [(h/3) + z]$, $\tau_{\text{max}} = 1,5\tau_{\text{sr}}$ dla $z = h/6$.

8. Wykorzystując zasadę symetrii naprężeń stycznych, określić rzeczywiste naprężenia τ w punktach G i H przekroju (rys. 5.39b).

Odp. Zero. Patrz badanie τ przy skręcaniu (rys. 3.15).

9. Wykorzystując wynik zadania 7 określić naprężenia τ_F w punkcie F przekroju (rys. 5.41b) z korektą uwzględniającą rzeczywisty kierunek τ . Przyjąć $b = h = 9 \text{ cm}$, $z = 1,5 \text{ cm}$, $T = 10 \text{ kN}$.

Odp. $\tau_z = 3,7 \text{ MPa}$. Postępując jak podano na rys. 5.42a, mamy $\text{tg } \beta = b/2h = 0,500$, $\cos \beta = 0,896$ i według wzoru (i) $\tau_F \approx 4,1 \text{ MPa}$.

10. Jaki jest sens fizyczny wyrażenia $(TS_y^{(z)}/J_y)$?

Odp. Jest to różnica wypadkowych sił N'_σ i N_σ działających w przekrojach odległych o $\Delta x = 1 \text{ cm}$ (rys. 5.39c), gdyż wzór (5.18) jest bilansem sił, w którym $\tau_z b_z$ jest wypadkową średnich naprężeń τ_z działających na pole o szerokości b_z i długości $\Delta x = 1 \text{ cm}$, a wypadkowa ta musi być równa $N'_\sigma - N_\sigma$.

11. W przekroju (rys. 5.39) zwiększono dwukrotnie: a) wszystkie wymiary, b) tylko rzędne, c) tylko odcięte. Jak zmienią się wartości τ_z w odpowiadających sobie punktach?

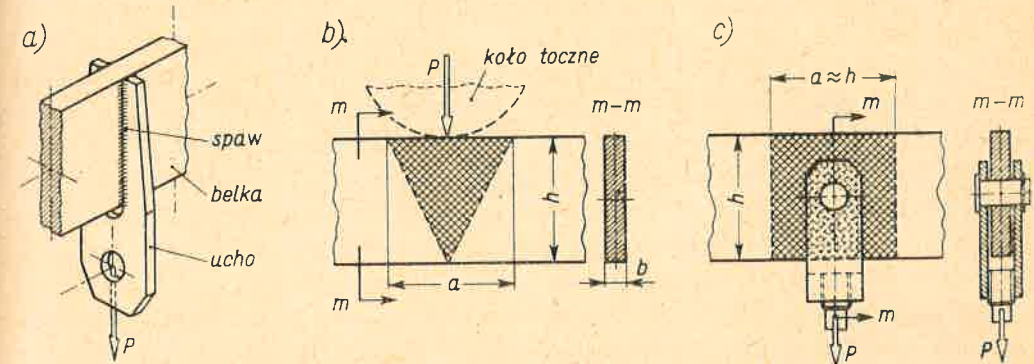
Odp. a) zmniejszą czterokrotnie, b) i c) zmniejszą dwukrotnie.

5.7. Zastosowania teorii

Jak wspomniano, zależności sformułowane w art. 5.6 są przybliżone, wobec czego istotna jest kwestia ich dokładności. Wyjaśnienie tego daje porównanie z wynikami teorii sprężystości.

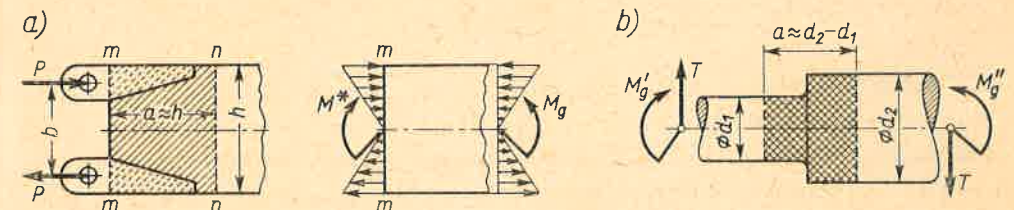
Dokładność wzoru (5.14) określającego naprężenia σ zależy od przebiegu siły tnącej. I tak, jeśli siła tnąca jest stała (rys. 5.36), to wzór (5.14) jest ścisły. Jeśli siła tnąca zmienia

się w sposób ciągły, jak na rys. 5.7, 5.11 itp., to różnica między wzorem (5.14) a wynikami ścisłymi jest rzędu $(h/l)^2$, gdzie h — gabarytowy wymiar w płaszczyźnie zginania, l — długość belki. Gdy siła tnąca zmienia się skokami (rys. 5.6, 5.10 i in.), różnice te w otoczeniu skoku siły T są rzędu (h/l) . Tak więc gdy w belce (rys. 5.7) $h/l = 0,1$, wówczas błąd wartości σ określonej z wzoru (5.14) jest rzędu 1% , jeśli jednak ta sama belka jest obciążona, jak na rys. 5.6, to w otoczeniu punktu E błąd wzoru (5.14) jest rzędu 10% . W tym drugim przypadku strefa takich odchyłek jest nieduża i obejmuje odcinek belki o długości równej w przybliżeniu wymiarowi h .



Rys. 5.44. Stosowalność teorii zginania poprzecznego

Powyzsze informacje odpowiadają rozwiązaniom konstrukcyjnym, w których obciążenia wprowadzono przez odpowiednie elementy na *cały* przekrój belki (rys. 5.44a). Inna jest sytuacja, gdy obciążenia stanowią ciśnienia kontaktowe od kół tocznych (rys. 5.44b). Występujące tu odchyłki są zupełnie innego rzędu i obejmują zakresowany na rysunku obszar o długości $a \approx h$. Podobne znaczne odchyłki mamy przy innych wariantach wprowadzenia sił (rys. 5.44c), momentów skupionych (rys. 5.45a), bądź karbach (rys. 5.45b). Weźmy dla przykładu wprowadzenie momentu $M^* = Pb$ (rys. 5.45a). Zgodnie z teorią



Rys. 5.45. Inne przypadki ograniczenia stosowalności teorii zginania

(art. 5.5) moment ten w przekroju $m-m$ należałoby zrealizować pod postacią naprężeń $\sigma = -M^* z/J_y$. Wprowadzenie jego za pośrednictwem okuć jako pary sił P zakłóca teoretyczny rozkład σ . Jest to zagadnienie podobne do rozpatrzonego w art. 2.1 i podobna też jest odpowiedź. Wykorzystując mianowicie zasadę de Saint-Venanta powiemy, że w przekroju $n-n$ obydwie obciążenia M^* i para sił P dadzą praktycznie ten sam rozkład naprężeń,

o ile tylko $M^* = Pb$. Dla belek o przekroju zwartym odległość a , na której wystąpią znaczne odchyłki, jest

$$a \approx h. \quad (a)$$

Podobny rezultat mamy w przypadku rys. 5.44c, dla karbu natomiast odległość a uzależniamy od jego wysokości. W odróżnieniu od tego łagodna zmienność przekroju nie powoduje dużych odchyłek. Dla takich belek można z techniczną dokładnością ($\pm 3\%$) obliczać naprężenia normalne z wzorów (5.14) wstawiając tylko odpowiadające danemu przekrojowi wielkości J_y , bądź W_y .

W porównaniu ze względnie dużą dokładnością wzoru (5.14), dokładność wzoru (5.18) określającego naprężenia styczne jest na ogół gorsza. Wyjątek stanowi przekrój prostokątny, dla którego wynik (f) jest ścisły, o ile tylko $b \ll h$. W innych przekrojach zwartych różnice między rzeczywistymi wartościami τ a obliczonymi z wzoru (5.18) są z reguły kilkanaście procent, a bywają sytuacje, gdy są one stuprocentowe (zadanie 8 art. 5.6). Również niewielkie zmiany kształtu, np. łagodna zbieżność belki, powodują radykalne zmiany w rozkładzie naprężeń stycznych. Z tych powodów często zadowalamy się zgrubnym oszacowaniem wartości⁽¹⁾ naprężeń stycznych według wzoru (5.17). Na takie podejście wpływa również to, że wartość τ_{\max} jest na ogół mała w porównaniu z σ_e . W miejscu na przykład zamocowania belki wspornikowej (rys. 5.43) o przekroju prostokątnym mamy $\tau_{\max} = 3P/2bh$, $\sigma_e = 6Pl/bh^2$, a stosunek

$$\tau_{\max}/\sigma_e = h/4l. \quad (b)$$

Podobny rząd wielkości otrzymujemy i dla innych przekrojów zwartych. Wynika stąd, że naprężenia styczne mogą mieć istotny wpływ tylko w belkach krótkich, natomiast w typowych zagadnieniach, gdy $h \ll l$, są one praktycznie bez znaczenia.

To ostatnie spostrzeżenie wykorzystujemy do oceny bezpieczeństwa przy zginaniu poprzecznym, badając tylko ekstremalne naprężenia normalne. Dodatkowym uzasadnieniem jest to, że we włóknach skrajnych, w których działa σ_{ekst} , mamy naprężenia $\tau = 0$. W typowych zatem zagadnieniach warunek bezpieczeństwa przy zginaniu czystym lub poprzecznym wyraża się zależnościami

$$\sigma'_e = \frac{M_y(x)}{W_y} \leq k_r = \frac{R_{er}}{n_{er}}, \quad \left| \sigma''_e \right| = \left| -\frac{M_y(x)}{W_y} \right| \leq k_c = \frac{R_{ec}}{n_{ec}}, \quad (5.19)$$

gdzie k_r , R_{er} , n_{er} — dopuszczalne naprężenie, granica plastyczności oraz współczynnik bezpieczeństwa przy rozciąganiu, a k_c , R_{ec} , n_{ec} także wielkości przy ściskaniu.

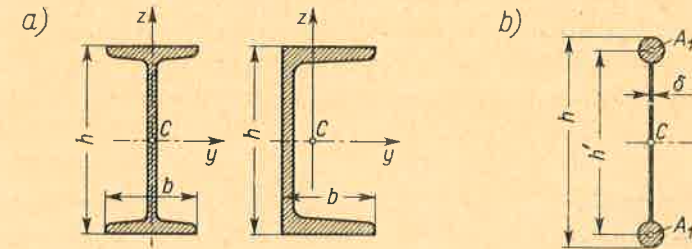
Dla materiałów mających $R_{er} = R_{ec}$ (stal, dural) jest logiczne, aby współczynniki n_{er} i n_{ec} były równe. W belkach z takich materiałów środek ciężkości przekroju powinien znajdować się w połowie jego wysokości. Inna jest sytuacja dla materiałów takich jak żeliwo, gdy $R_{ec} > R_{er}$ i $k_c > k_r$. Racjonalne wykorzystanie materiału jest wtedy, gdy jednocześnie

$$\sigma'_e = k_r, \quad \left| \sigma''_e \right| = k_c. \quad (c)$$

Z rysunku 5.30a widać, że postulat (c) jest spełniony, gdy $z_1/k_c = z_2/k_r$, czyli gdy odległości skrajnych włókien są proporcjonalne do odpowiednich naprężeń dopuszczalnych.

⁽¹⁾ Z wyłączeniem przekrojów cienkościennych (rozdz. 13).

Z uwagi na ekonomię ciężaru belki celowy jest taki kształt przekroju, w którym przy małym zużyciu materiału otrzymujemy duży wskaźnik W_y . Jak widać z rys. 5.30 i 5.31, najcenniejszą częścią przekroju jest materiał w otoczeniu włókien skrajnych, albowiem jest on należycie wykorzystany ($\sigma'_e \approx k_r$ lub $|\sigma''_e| \approx k_c$) i jednocześnie najbardziej efektywny w przeniesieniu momentu gnącego (duża odległość z). W przeciwieństwie do tego włókna środkowe są martwe ($\sigma \approx 0$) i nieefektywne ($z \approx 0$). Uwzględnienie tych faktów znajduje odbicie w belkach dwuteowych lub ceowych (rys. 5.46a), w których pasy stanowiące



Rys. 5.46. Racjonalne postacie przekrojów belek

dużą część przekroju są oddalone od warstwy obojętnej. Takie profile, z uwagi na ich rozpowszechnienie, są znormalizowane⁽¹⁾ w tablicach, w których poza wymiarami podane są też wartości J_y i W_y .

Idealem byłby przekrój, w którym całe pole A dzieliłoby się na dwa pasy $A_1 = A/2$, a udział ścianki łączącej pasy byłby pomijalny (rys. 5.46b). Uważając, że pola pasów są skupione w środkach ciężkości i przyjmując $h \approx h'$ mamy $J_y \approx 2(A/2)(h/2)^2 = Ah^2/4$, a wskaźnik wytrzymałości

$$(W_y)_{\text{idealne}} = Ah/2. \quad (d)$$

Wartość ta może stanowić porównawczy wzorec do oceny jakości danego przekroju. Dla prostokąta na przykład $(W_y)_{\text{idealne}} = bh^2/2$, a rzeczywista wartość $W_y = bh^2/6$. Ich stosunek

$$\eta_y = W_y/(W_y)_{\text{idealne}} = 0,33$$

stanowi miarę jakości. Podobnie dla przekroju kołowego pełnego

$$\eta_y = W_y/(W_y)_{\text{idealne}} = (\pi d^3/32)/[(\pi d^2/4)(d/2)] = 0,25.$$

W porównaniu z takimi przekrojami znormalizowane profile dwuteowe i ceowe są zdecydowanie lepsze, albowiem dla nich

$$(\eta_y)_{\text{dwuteownika}} \approx 0,64, \quad (\eta_y)_{\text{ceówki}} \approx 0,60.$$

Podana miara η_y jakości przekroju, tj.

$$\eta_y = 2W_y/Ah \quad (e)$$

odpowiada zginaniu w płaszczyźnie xz . Jeśli zgięcie zachodzi w płaszczyźnie xy , to osią obojętną będzie oś z , a o naprężeniach ekstremalnych decydować będą wskaźniki W'_z i W''_z :

$$W'_z = J_z/|y_1|, \quad W''_z = J_z/|y_2|, \quad (f)$$

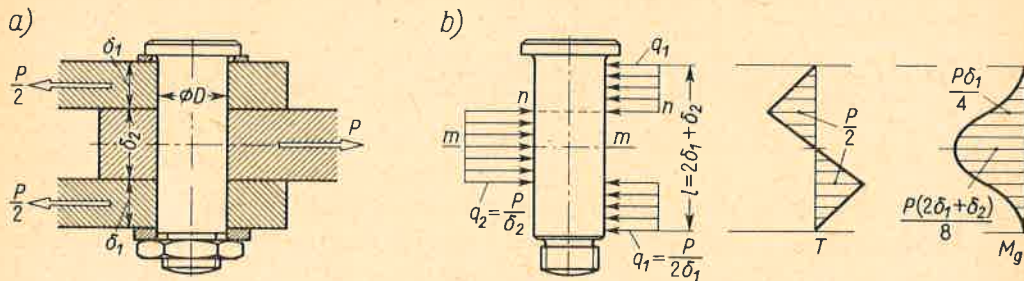
⁽¹⁾ W normach państwowych, jak PNH-93403, PNH-93407 dla profili stalowych, oraz normach fabrycznych dla profili specjalnych.

gdzie y_1, y_2 — odpowiednie ekstremalne odległości włókien od osi z . Miarą jakości przekroju będzie wtedy

$$\eta_z = 2W_z/Ab, \quad (g)$$

gdzie b — gabarytowy pomiar przekroju w kierunku osi y . Interesujące jest, że wartość η_z dla profili dwuteowych i ceowych jest mała (rzędu $0,17 \div 0,20$) i profile te wyraźnie są gorsze od innych, jak np. przekroju kołowego.

Zagadnienia nietypowe, gdy naprężenia styczne stanowią miernik bezpieczeństwa, należą do jednego z dwóch wariantów. Pierwszy występuje, gdy długość belki l jest tego samego rzędu co i gabarytowy wymiar h . Technicznym przykładem tego są połączenia nitowe i pasowane sworznie (rys. 5.47a). Zakładając dla prostoty, że naciski uszu na sworznie są równomiernie rozłożone, otrzymujemy obraz obciążeń sworznia i przebieg sił tnących



Rys. 5.47. Analiza pracy połączenia sworzniowego

oraz momentów gnących według rys. 5.47b. W świetle tego, co powiedziano o skutkach różnych sposobów wprowadzenia obciążeń, jest rzeczą jasną, że wyniki otrzymane z wzorów (5.14) i (5.18) są tu niezgodne z rzeczywistością. Jakikolwiek uściślenie analizy teoretycznej jest ponadto beznadziejne, z uwagi na szereg czynników o charakterze przypadkowym, np. dokładność pasowania, wpływ tarcia itp. W tej sytuacji obliczona dla przekroju $m-m$ wartość σ_e , a dla przekroju $n-n$ wartość τ_{sr} :

$$\sigma_e = P(2\delta_1 + \delta_2)/8W_y, \quad \tau_{sr} = P/2A, \quad (h)$$

mają jedynie charakter względnego miernika, służącego do porównania danego połączenia z innymi udanymi konstrukcjami. Taki sposób jest szeroko stosowany w częściach maszyn. Wykorzystując istniejący zasób doświadczenia, ustala się z wzorów (h) nieprzekraczalne wartości σ_e bądź τ_{sr} jako „naprężenia dopuszczalne” gwarantujące bezpieczeństwo. Takie „naprężenia dopuszczalne” nie mają żadnego uzasadnienia naukowego, lecz są praktyczną receptą, której stosowalność podlega wielu ograniczeniom, jak: rodzaj materiału, proporcje geometryczne, rodzaj maszyny.

Drugi wariant nietypowych zagadnień występuje, gdy wytrzymałość materiału belki na ścinanie jest mała. Takim materiałem jest na przykład drewno. Wykonana z niego krótka belka (rys. 5.43a) może ulec zniszczeniu przez poślizg w warstwie obojętnej. W takich przypadkach konieczne jest porównanie wartości τ_{max} z wytrzymałością materiału na ścinanie i upewnienie się o istnieniu dostatecznego współczynnika bezpieczeństwa.

5.8. Linia ugięcia belki

W wielu zagadnieniach ocena bezpieczeństwa według wzoru (5.19) musi być uzupełniona określeniem odkształceń (przemieszczeń) belki. Ich wartość bowiem może w równym stopniu co i bezpieczeństwo decydować o przydatności konstrukcji.

Wyznaczenie przemieszczeń rozpoczniemy od określenia postaci odkształconej osi $AB'C'$ belki zginanej w płaszczyźnie rysunku (rys. 5.48). Oś ta, jak wiemy, pokrywa się z warstwą obojętną, wobec czego jej krzywizna $1/\rho$ według wzoru (5.16)

$$1/\rho = M_g(x)/EJ_y,$$

jest związana z lokalną wartością $M_g(x)$ momentu gnącego. Obierając jako oś odciętych nieodkształconą oś belki, widzimy, że postać odkształconej osi, tzw. *linia ugięcia*, będzie znana, jeśli wyznaczymy rzędne $w(x)$ tej osi. Z geometrii różniczkowej wiemy, że krzywizna $1/\rho$ linii $w(x)$ wyraża się wzorem

$$1/\rho = w''/(1+w'^2)^{3/2}$$

i po podstawieniu do poprzedniej zależności mamy równanie

$$\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = \frac{M_g(x)}{EJ_y}, \quad (a)$$

wiążące w formie różniczkowej poszukiwaną funkcję $w(x)$ z obciążeniem wyrażonym przez $M_g(x)$ i sztywnością belki EJ_y . Ta ostatnia może być stała lub zmienna.

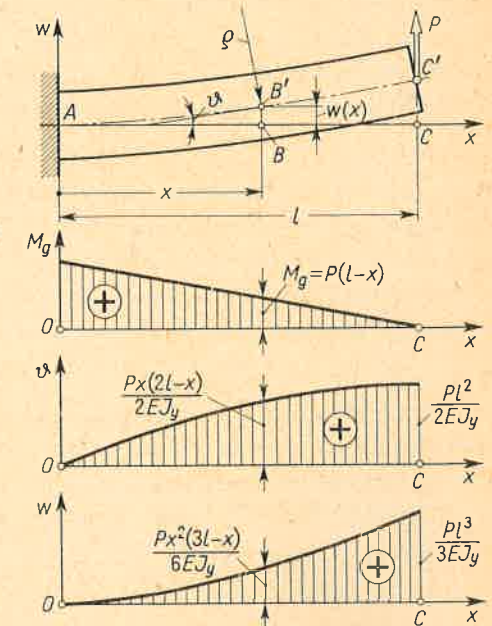
W ogromnej większości zagadnień technicznych rzędne $w(x)$, tzw. *ugięcia*, są bardzo małe w porównaniu z długością belki, wobec czego małe są też kąty ugięcia θ . Dla takiego przypadku, tzw. *małych ugięć*, można w równaniu (a) pominąć człon w'^2 w stosunku do jedności. Dzięki temu równanie to przybiera uproszczoną postać

$$w'' = \frac{M_g(x)}{EJ_y}. \quad (5.20)$$

Zgodnie przy tym z umową, wprowadzoną w art. 5.2, moment $M_g(x)$ uważamy za dodatni, gdy wywołuje on naprężenia ściskające w górnej części belki (rys. 5.5). Z taką samą dokładnością jak powyżej napiszemy, że kąt ugięcia (mierzony w radianach)

$$\theta \approx \text{tg } \theta = w'. \quad (5.21)$$

Samo wyznaczenie $w(x)$ sprowadza się do dwukrotnego scałkowania stronami równania (5.20), będącego najprostszym równaniem różniczkowym drugiego rzędu. Z matematyki wiadomo, że w wyniku całkowania otrzymujemy funkcję $w(x)$ obciążoną dowolną funkcją liniową $Cx + D$, gdzie stałe całkowania C i D muszą być określone z warunków brzegowych (podporowych). Należy tu rozróżnić dwa warianty. W pierwszym z nich, gdy $w''(x)$



Rys. 5.48. Określenie ugięć belki

określone jest na całej belce jedną tylko funkcją x , stałe C i D wyznaczamy z warunków unieruchomienia belki jako całości. I tak dla przypadku (rys. 5.48), gdy $EJ_y = \text{const}$, mamy w utwierdzonym przekroju A ($x = 0$)

$$(w)_{x=0} = 0 \quad \text{oraz} \quad (w')_{x=0} = 0, \quad (5.22)$$

gdyż przekrój ten nie ulega ani przesunięciu, ani obrotowi. Jeśli bowiem pominąć odkształcenia od naprężeń stycznych (rys. 5.37), to przekroje poprzeczne zostają prostopadłe do odkształconej osi.

Podobnie dla belki dwupodporowej (rys. 5.7) mamy dwa warunki

$$(w)_{x=0} = 0 \quad \text{oraz} \quad (w)_{x=l} = 0, \quad (5.23)$$

wystarczające do określenia dwóch stałych C i D .

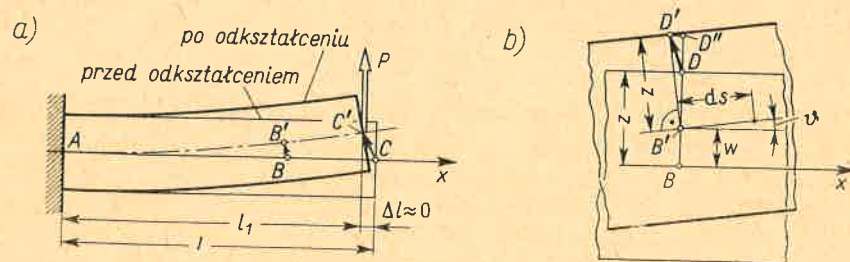
W wariacie drugim, jak na rys. 5.10, gdy $w''(x)$ określone jest w kolejnych odcinkach AD, DE, \dots belki różnymi funkcjami $w_1''(x), w_2''(x), \dots$, całkowanie równania (5.20) daje odpowiednio różne wyrażenia

$$w_1'(x) + C_1, w_2'(x) + C_2, \dots, w_1(x) + C_1 x + D_1, w_2(x) + C_2 x + D_2, \dots \quad (b)$$

z różnymi stałymi całkowania $C_1, D_1, C_2, D_2, \dots$. Do wyznaczenia tych stałych mamy, jak poprzednio, dwa warunki typu (5.23), a ponadto w miejscach styku D, E, \dots kolejnych odcinków, tzw. warunki ciągłości. Te ostatnie wyrażają fakt, że w miejscu styku odpowiednie gałęzie linii ugięcia mają wspólną rzędną i wspólną styczną, gdyż w'' ma wszędzie wartość skończoną i pochodna w' nie może mieć przeskoków. Tak na przykład w przekroju D , tj. $x = a_1$, mamy

$$w_1'(a_1) + C_1 = w_2'(a_1) + C_2, \quad w_1(a_1) + C_1 a_1 + D_1 = w_2(a_1) + C_2 a_1 + D_2, \quad (c)$$

i podobnie w pozostałych przekrojach E i F . Łatwo sprawdzić, że liczba warunków ciągłości łącznie z warunkami typu (5.23) lub (5.22) jest równa liczbie szukanych stałych całkowania.



Rys. 5.49. Uproszczony obraz przemieszczeń punktów belki

Ponieważ rzędne $w(x)$ są z założenia małe, zatem z dokładnością do małych wyższego rzędu można przyjąć, że całkowite przemieszczenia BB', CC', \dots punktów B, C osi są prostopadłe⁽¹⁾ do pierwotnej osi ABC (rys. 5.49a). Takie same przemieszczenia jak punkty

⁽¹⁾ Długość s odkształconej osi $AB'C'$, jako leżącej w warstwie obojętnej, jest równa długości pierwotnej l . Rzut linii $AB'C'$ na oś x jest nieco krótszy niż l i wynosi $l_1 = \int ds \cos \theta$, a przesunięcie $\Delta l = l - l_1$. Zauważmy (rys. 5.49b), że $ds \cos \theta \approx ds [1 - (\theta^2/2)] \approx ds [1 - (w'^2/2)]$. Z taką samą więc dokładnością, jak przy formułowaniu (5.20), można napisać $ds \cos \theta \approx ds$, a wtedy $\int ds \cos \theta \approx \int ds = l$ i $\Delta l = 0$. To samo można udowodnić dla dowolnego punktu B osi belki.

osi mają punkty warstwy obojętnej, która przy zgięciu belki w płaszczyźnie rysunku jest do tej płaszczyzny prostopadła. Inne są natomiast przemieszczenia punktów leżących poza warstwą obojętną jak punkt D (rys. 5.49b). Pomijając wpływ naprężeń stycznych, czyli zakładając, że przekroje zostają do osi belki prostopadłe, widzimy, że przemieszczenie DD' punktu D ma składową pionową DD'' i poziomą $D''D'$

$$DD'' = w + z \cos \theta - z \approx w, \quad D''D' = -z \sin \theta \approx -z\theta \approx -zw'. \quad (5.24)$$

Powyższe rozumowanie dowodzi, że znajomość linii ugięcia wystarcza przy pewnych uzasadnionych uproszczeniach do określenia przemieszczeń wszystkich punktów belki. Z tego powodu badanie przemieszczeń w belkach ograniczamy do samej tylko linii ugięcia.

Zadania

1. Wyznaczyć linię ugięcia pryzmatycznej belki (rys. 5.48) o przekroju kołowym. Określić ekstremalny kąt ugięcia θ_e i ekstremalne ugięcie $|w_e| = f$, tzw. strzałkę ugięcia. Przyjąć, że $P = 10 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, a dopuszczalne naprężenie $k_r = k_c = 100 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie. Moment gnący określony jest jedną tylko funkcją

$$M_g = P(l-x) \quad (0 < x < l)$$

i ma wartość dodatnią. Wstawiając to wyrażenie do (5.20) i całkując stronami (przy $EJ_y = \text{const}$) mamy w wyniku

$$w' = \int w'' dx + C = \int [P(l-x)/EJ_y] dx + C = (P/EJ_y) [lx - (x^2/2)] + C.$$

Całkując podobnie powyższe wyrażenie otrzymujemy

$$w = \int w' dx + D = (P/EJ_y) [(lx^2/2) - (x^3/6)] + Cx + D.$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków (5.22), stąd

$$C = 0, \quad D = 0,$$

i w rezultacie mamy poszukiwany kąt θ oraz ugięcie w

$$\theta \approx w' = \frac{Px(2l-x)}{2EJ_y}, \quad w = \frac{Px^2(3l-x)}{6EJ_y}. \quad (d)$$

Ich przebieg (w dużej skali) podaje rysunek. Widać, że θ i w są na całej długości belki dodatnie, co zgadza się z intuicją. Ekstremalny kąt θ_e i ekstremalne $|w_e| = f$ występują na swobodnym końcu belki ($x = l$) i są

$$\theta_e = \frac{Pl^2}{2EJ_y}, \quad f = |w_e| = \frac{Pl^3}{3EJ_y}. \quad (5.25)$$

Przy podanych wartościach liczbowych mamy $(M_g)_{\text{ekstr}} = 10 \text{ kN m}$. Z warunku (5.19) i $W_y = \pi d^3/32$ otrzymujemy średnicę $d = 10 \text{ cm}$, skąd $EJ_y = \pi Ed^4/64 = 0,98 \cdot 10^6 \text{ N m}^2$, a z wzorów (5.25)

$$\theta_e = \frac{10^4 \cdot 1^2}{2 \cdot 0,98 \cdot 10^6} \approx 0,51 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \approx 0,29^\circ, \quad f = \frac{10^4 \cdot 1^3}{3 \cdot 0,98 \cdot 10^6} \approx 0,34 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 0,34 \text{ cm}.$$

Jak widać, (f/l) jest tu rzędu $1/300$. W praktyce wartości (f/l) w zależności od przeznaczenia są rzędu $10^{-2} \div 10^{-5}$ (te ostatnie w urządzeniach pomiarowych).

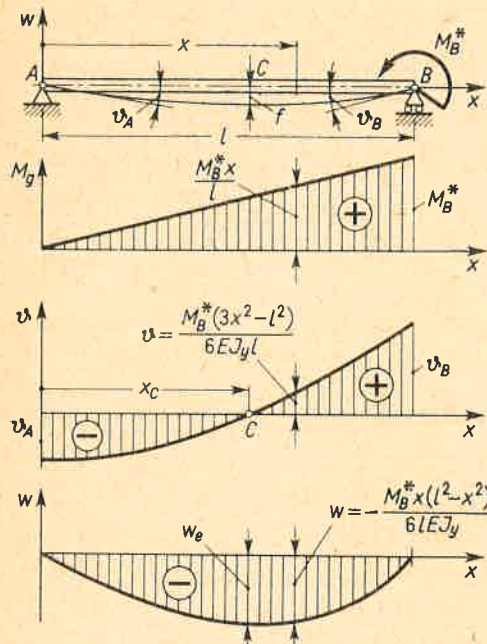
2. Wyznaczyć linię ugięcia pryzmatycznej belki (rys. 5.50) i wielkość kątów ϑ_A i ϑ_B na podporach oraz strzałkę ugięcia f .

Odp. Mamy tu znowu pierwszy wariant całkowania (5.20), gdyż

$$M_g(x) = M_B^* x/l$$

jest określony tylko jedną funkcją, a $EJ_y = \text{const}$. Po kolejnym scałkowaniu (5.20) jak poprzednio mamy

$$w' = (M_B^* x^2/2lEJ_y) + C, \quad w = (M_B^* x^3/6lEJ_y) + Cx + D.$$



Rys. 5.50.

Warunki podporowe są tym razem typu (5.23), skąd obliczamy $D = 0$ i $C = -M_B^*/6EJ_y$. W rezultacie mamy

$$\vartheta = w' = -\frac{M_B^* l}{6EJ_y} + \frac{M_B^* x^2}{2lEJ_y}, \quad w = -\frac{M_B^* x}{6lEJ_y} (l^2 - x^2). \quad (e)$$

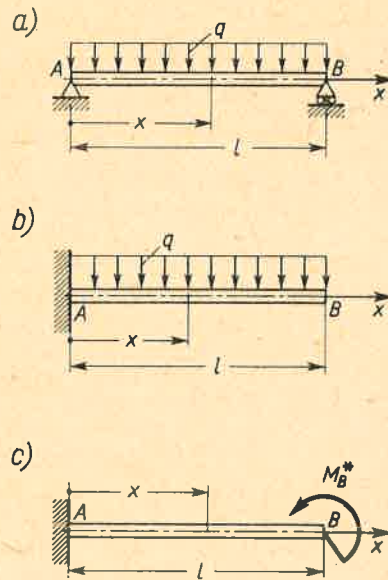
Wykresy ϑ i w podaje (w dużej skali) rysunek. Kąty ugięcia na podporach są

$$\vartheta_A = (\vartheta)_{x=0} = -\frac{M_B^* l}{6EJ_y}, \quad \vartheta_B = (\vartheta)_{x=l} = \frac{M_B^* l}{3EJ_y}, \quad (5.26)$$

przy czym $\vartheta_A < 0$ zgadza się z tym, że w obranym układzie współrzędnych mamy $(w')_{x=0} < 0$. W tymże układzie rzędne w są też ujemne. Ekstremalna wartość $|w_e|$ odpowiada przekroju C , w którym $\vartheta = w' = 0$, czyli $x_C = l/\sqrt{3}$ i jest

$$f = |w_e| = M_B^* l^2/9 \sqrt{3} EJ_y \approx M_B^* l^2/15,7 EJ_y. \quad (5.27)$$

3. Dla podanych pryzmatycznych belek (rys. 5.51) wyznaczyć linię ugięcia $w(x)$, strzałkę i ekstremalny kąt ugięcia.



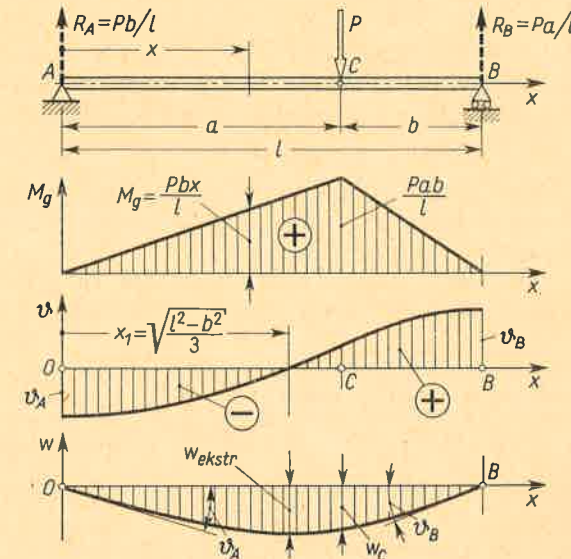
Rys. 5.51.

Odp. Przykłady odpowiadają pierwszemu wariantowi całkowania.

$$a) \quad w = -\frac{qx(l^3 - 2lx^2 + x^3)}{24EJ_y}, \quad f = |w|_{x=l/2} = \frac{5ql^4}{384EJ_y}, \quad -\vartheta_A = \vartheta_B = \frac{ql^3}{24EJ_y};$$

$$b) \quad w = -\frac{qx^2(6l^2 - 4lx + x^2)}{24EJ_y}, \quad f = |w|_{x=l} = \frac{ql^4}{8EJ_y}, \quad \vartheta_e = -\frac{ql^3}{6EJ_y};$$

$$c) \quad w = \frac{M_B^* x^2}{2EJ_y}, \quad f = (w)_{x=l} = \frac{M_B^* l^2}{2EJ_y}, \quad \vartheta_e = \frac{M_B^* l}{EJ_y}.$$



Rys. 5.52. Analiza ugięcia dwupodporowej belki wywołanego siłą skupioną

4. Wyznaczyć linię ugięcia pryzmatycznej dwupodporowej belki (rys. 5.52) obciążonej siłą skupioną. Przedyskutować wyniki.

Rozwiązanie. Mamy tu drugi wariant całkowania linii ugięcia, gdyż moment gnący określają dwie różne funkcje:

$$\begin{aligned} \text{w przedziale I } (0 \leq x \leq a) & \quad M_{gI} = Pbx/l, \\ \text{w przedziale II } (a \leq x \leq l) & \quad M_{gII} = (Pbx/l) - P(x-a). \end{aligned}$$

Oznaczając odpowiednio w_I i w_{II} ugięcia w tych przedziałach mamy z równania (5.20)

$$EJ_y w''_I = Pbx/l, \quad EJ_y w''_{II} = (Pbx/l) - Px + Pa,$$

a po kolejnych całkowaniach przy $EJ_y = \text{const}$

$$EJ_y w'_I = (Pbx^2/2l) + C_1, \quad EJ_y w'_{II} = (Pbx^2/2l) - (Px^2/2) + Pax + C_2,$$

$$EJ_y w_I = (Pbx^3/6l) + C_1 x + D_1, \quad EJ_y w_{II} = (Pbx^3/6l) - (Px^3/6) + (Pax^2/2) + C_2 x + D_2.$$

Wykorzystując warunki ciągłości w przekroju C ($x = a$), tzn.

$$(w'_I)_{x=a} = (w'_{II})_{x=a}, \quad (w_I)_{x=a} = (w_{II})_{x=a},$$

oraz warunki podporowe $(w_I)_{x=0} = 0$ i $(w_{II})_{x=l} = 0$ mamy w wyniku cztery równania

$$C_1 - C_2 = Pa^2/2, \quad (C_1 - C_2)a + D_1 - D_2 = Pa^3/3, \quad D_1 = 0, \quad C_2 l + D_2 = -Pal^2/3.$$

Rozwiązanie tych równań daje poszukiwane wartości stałych

$$C_1 = -Pab(l+b)/6l, \quad C_2 = -Pa(2l^2+a^2)/6l, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = Pa^3/6,$$

dzięki czemu można wykreślić przebieg kąta $\vartheta(x)$ i ugięcia $w(x)$, jak to podaje rysunek (w dużej skali). Kąty ugięcia ϑ_A i ϑ_B na podporach otrzymujemy wstawiając $x = 0$ do wzoru na $\vartheta_l = w'_l$ oraz $x = l$ do wzoru na $\vartheta_{ll} = w'_{ll}$. W wyniku mamy

$$\vartheta_A = -Pab(l+b)/6lEJ_y, \quad \vartheta_B = Pab(l+a)/6lEJ_y, \quad (5.28)$$

przy czym ϑ_A jest ujemne, gdyż w obranym układzie współrzędnych $(w'_l)_{x=0} < 0$. Ujemne są też rzędne $w(x)$, jak w przekroju C

$$w_C = (w_l)_{x=a} = (w_{ll})_{x=a} = -Pa^2b^2/3EJ_y l. \quad (5.29)$$

Dla pełności obrazu obliczmy też strzałkę ugięcia $f = |w_e|$. Gdy $a > l/2$, wówczas w_e występuje w przedziale I, tam gdzie $w'_l = 0$. Odpowiadająca temu odcięta $x_1 = \sqrt{(l^2-b^2)/3}$, a wartość $|w_e|$

$$f = |w_e| = Pb(l^2-b^2)^{3/2}/9EJ_y l \sqrt{3}. \quad (f)$$

Łatwo się przekonać, że odcięta x_1 niewiele różni się od $l/2$. Nawet gdy $b \rightarrow 0$, wówczas $x_1 \rightarrow l/\sqrt{3}$ i $x_1 - (l/2) \approx 0,08l$. To powoduje, że różnica $w_e - (w)_{x=l/2}$ jest też niewielka i nawet w granicznym przypadku⁽¹⁾, gdy $b \rightarrow 0$, wówczas $|w_e - (w)_{x=l/2}| < 2,5\% |w_e|$.

Spostrzeżenie to wykorzystujemy i w innych przypadkach belek dwupodporowych. Jeśli mianowicie $M_g(x)$ nie zmienia znaku na całej długości belki, to z techniczną dokładnością

$$w_e \approx w_{x=l/2}. \quad (g)$$

W przypadku szczególnym, gdy $a = b = l/2$, mamy

$$-\vartheta_A = \vartheta_B = Pl^2/16EJ_y, \quad f = |w_e| = Pl^3/48EJ_y. \quad (5.30)$$

5. Po belce (rys. 5.52) przesuwają się ciężary P. Jakiemu położeniu P odpowiada: a) ekstremalna strzałka, b) ekstremalny kąt ϑ ?

Odp. a) obliczając z wzoru (f) df/db , z warunku $df/db = 0$ mamy $b = l/2$ i $f_{max} = Pl^3/48EJ_y$; b) z rys. 5.52 widać, że ekstremalne ϑ jest na podporze B. Z warunku $d\vartheta_B/db = 0$, przy czym $a = l - b$, mamy $b = l/(1+\sqrt{3})$ i ostatecznie $(\vartheta_B)_{max} = Pl^2/9\sqrt{3}EJ_y$.

6. Dobrac średnicę d stalowego wałka, którego schemat statyczny odpowiada rys. 5.52, aby ugięcie w przekroju C nie przekraczało 0,5 mm i aby naprężenia były mniejsze od $k_r = 100$ MPa. Dane liczbowe: $P = 10$ kN, $l = 1$ m, $a = 0,6$ m, $E = 2,0 \cdot 10^5$ MPa.

Odp. Mamy tu niezależne warunki $|w_C| < 0,5$ mm i $|\sigma_c| < k_r$. Z pierwszego przy wykorzystaniu (5.29) mamy $J_y = 192$ cm⁴, skąd $d' \approx 7,9$ cm, z drugiego $W_y = 24$ cm³, skąd $d'' \approx 6,2$ cm. Widać, że postulat sztywności jest tu ostrzejszy i $d = d' = 7,9$ cm.

7. Podporami wałka z zadania 6 są w rzeczywistości łożyska kulkowe jednorzędowe (rys. 5.3a): których luz kątowy $\vartheta_0 = 0,1^\circ$. Czy takie rozwiązanie jest prawidłowe?

Odp. Tak, bo obliczone z wzorów (5.28) przy $J_y = 192$ cm⁴ kąty $\vartheta_A = 1,46 \cdot 10^{-3}$ rad oraz $\vartheta_B = 1,66 \cdot 10^{-3}$ rad są mniejsze niż ϑ_0 .

8. W belce (rys. 5.52) nie zmieniając przekroju zwiększono dwukrotnie wymiary a, b i jednocześnie zmniejszono dwukrotnie siłę P. Jak zmieniają się naprężenia σ , ugięcia i kąty ugięcia w odpowiadających sobie punktach belki pierwotnej i wydłużonej?

Odp. Naprężenia σ te same, ugięcia wzrosną 4 razy, kąty - 2 razy.

9. Wykorzystując wyniki zadania 4 obliczyć ugięcie przekroju C i kąty ugięcia na podporach belki (rys. 5.53).

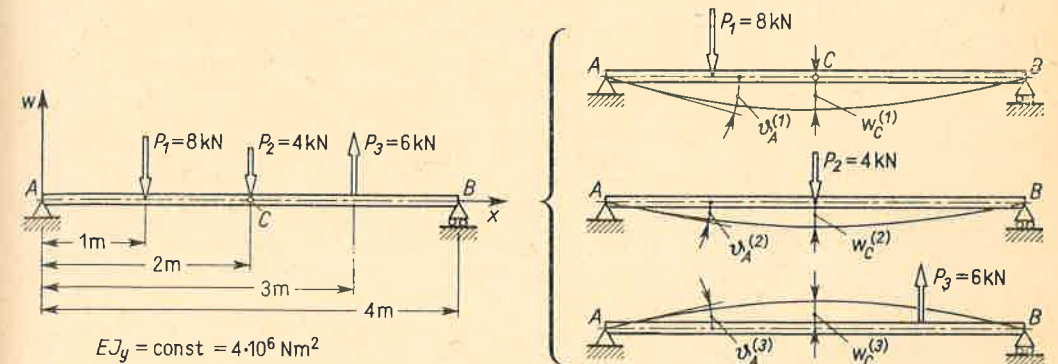
⁽¹⁾ Gdy $b \rightarrow 0$, wówczas $(w)_{x=l/2} = -Pl^2b/16EJ_y$, $w_e \rightarrow -Pl^2b/9\sqrt{3}EJ_y$.

Odp. Stosując zasadę superpozycji⁽¹⁾ rozkładamy zadanie na trzy będące kopią zadania 4. Z wzorów (5.28) obliczamy kolejno

$$\vartheta_A^{(1)} = -1,75 \cdot 10^{-3} \text{ rad}, \quad \vartheta_A^{(2)} = -1,00 \cdot 10^{-3} \text{ rad}, \quad \vartheta_A^{(3)} = 0,94 \cdot 10^{-3} \text{ rad},$$

a całkowity kąt $\vartheta_A = \vartheta_A^{(1)} + \vartheta_A^{(2)} + \vartheta_A^{(3)} = -1,81 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx -0,104^\circ$. Podobnie wyznaczamy $\vartheta_B = 0,94 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,054^\circ$. Przy obliczeniu $w_C^{(1)}$ stosujemy wzór dla $(w_{ll})_{x=l/2}$, gdyż przekrój C leży na prawo od siły P_1 . Po przekształceniach otrzymujemy

$$w_C^{(1)} = -P_1 a_1(3l^2 - 4a_1^2)/48EJ_y = -1,83 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -1,83 \text{ mm},$$



Rys. 5.53. Przykład zastosowania zasady superpozycji

gdzie $a_1 = 1$ m - odcięta odpowiadająca sile P_1 . Przy obliczeniu $w_C^{(2)}$ wykorzystujemy wzór (5.30), a przy określeniu $w_C^{(3)}$ bierzemy

$$w_C^{(3)} = (w_l)_{x=l/2} = -P_3 b_3(3l^2 - 4b_3^2)/48EJ_y = 1,37 \text{ mm},$$

gdź $x_C = l/2$, $a_3 = 3$ m oraz $P_3 = -6$ kN. W wyniku

$$w_C = w_C^{(1)} + w_C^{(2)} + w_C^{(3)} = -1,83 - 1,33 + 1,37 = -1,79 \text{ mm},$$

a więc wypadkowe ugięcie w_C jest do dołu.

10. Wykorzystując wyniki poprzednich zadań wyznaczyć kąty ugięcia ϑ_A i ϑ_C oraz ugięcie w_C belki (rys. 5.54).

Rozwiązanie. Po wprowadzeniu dwóch przeciwnych momentów $M_B^* = ql^2/2$ sprowadzamy zadanie do superpozycji trzech prostszych. W pierwszym z nich część AB zostaje nieodkształcona, bo $M_g^{(1)} \equiv 0$, sytuacja zaś części BC jest identyczna jak belki (rys. 5.51b), wobec czego z zadania 3 mamy

$$\vartheta_A^{(1)} = 0, \quad \vartheta_C^{(1)} = ql^3/6EJ_y, \quad w_C^{(1)} = ql^4/8EJ_y.$$

Podobnie w drugim przypadku, tj. działania $M_B^* = ql^2/2$, wykorzystujemy wyniki zadania 2. Zważywszy, że część BC, w której $M_g^{(2)} \equiv 0$, obraca się jako sztywna całość o kąt ϑ_B , mamy

$$\vartheta_A^{(2)} = ql^2 l_1/12EJ_y, \quad \vartheta_C^{(2)} = \vartheta_B = ql^2 l_1/6EJ_y, \quad w_C^{(2)} = \vartheta_B l = ql^3 l_1/6EJ_y.$$

Na koniec w trzecim przypadku, identycznym z podanym na rys. 5.51a, otrzymujemy

$$\vartheta_A^{(3)} = ql_1^3/24EJ_y, \quad \vartheta_C^{(3)} = \vartheta_B = ql_1^3/24EJ_y, \quad w_C = \vartheta_B l = ql_1^3 l/24EJ_y,$$

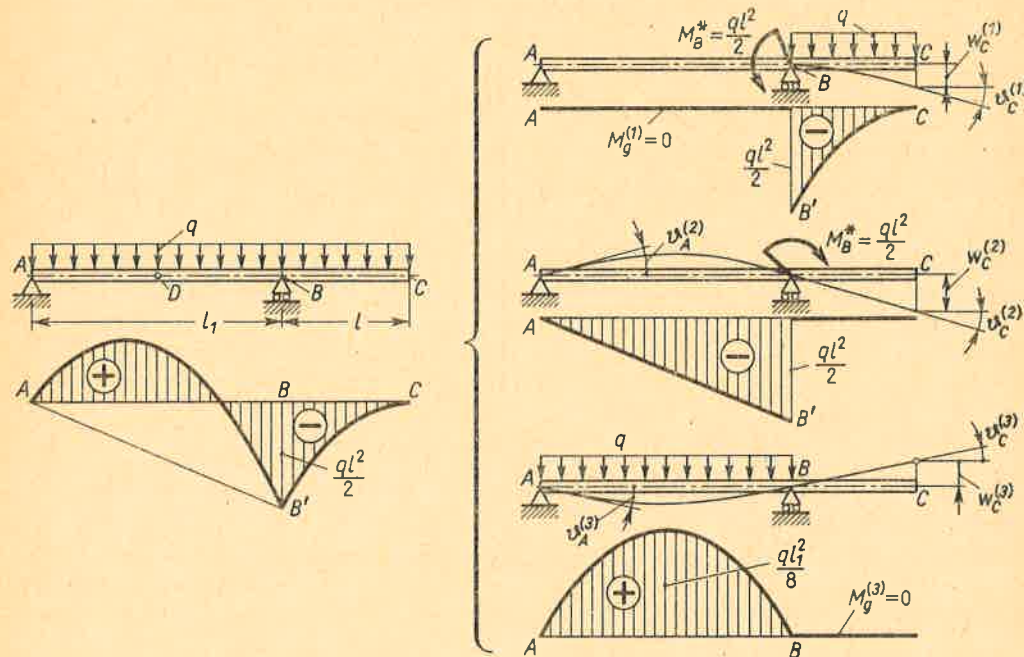
⁽¹⁾ Równanie (5.20) jest liniowe i ma postać $w'' = f(x)$, gdzie $f(x) = M_g(x)/EJ_y$. Jeśli na belkę działają kolejno obciążenia $f_1(x)$ i $f_2(x)$, którym odpowiadają ugięcia w_1 i w_2 , to ich łączne działanie $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ daje ugięcie $w = w_1 + w_2$, a to jest właśnie zasada superpozycji.

a ostateczny wynik po uwzględnieniu zwrotów jak na rysunkach

$$\vartheta_A = \vartheta_A^{(1)} + \vartheta_A^{(2)} - \vartheta_A^{(3)} = (ql^2l_1/12EJ_y) - (ql_1^3/24EJ_y),$$

$$\vartheta_C = (ql_1^3/24EJ_y)(4\xi^3 + 4\xi^2 - 1), \quad w_C = (ql_1^4/24EJ_y)(3\xi^4 + 4\xi^3 - \xi),$$

gdzie $\xi = l/l_1$. Jak widać, w takich zadaniach celowe jest posługiwanie się szkicami odkształceń belki odpowiadających poszczególnym obciążeniom składowym.



Rys. 5.54. Przykład wykorzystania zasady superpozycji

11. W belce (rys. 5.20a) $c_1 = c_2$ oraz $EJ_y = \text{const}$. Przy jakiej wartości stosunku $c_1/l_1 = \xi$ kąty ugięcia ϑ_C i ϑ_D są równe zero?

Odp. Kąt $|\vartheta_C| = |\vartheta_D| = (ql_1^3/24EJ_y)(4\xi^3 + 6\xi^2 - 1)$ i z warunku $\vartheta_C = 0$ otrzymujemy $\xi = c_1/l_1 \approx 0,366$. Wynik ma praktyczne znaczenie w konstrukcji ław przyrządów pomiarowych.

5.9. Wykreślna metoda wyznaczania linii ugięcia

Istota tej metody polega na wykorzystaniu podobieństwa równania (5.20), opisującego linię ugięcia w przypadku tzw. małych ugięć, do równania (5.4) określającego kształt linii sznurowej (rys. 5.55), a mianowicie

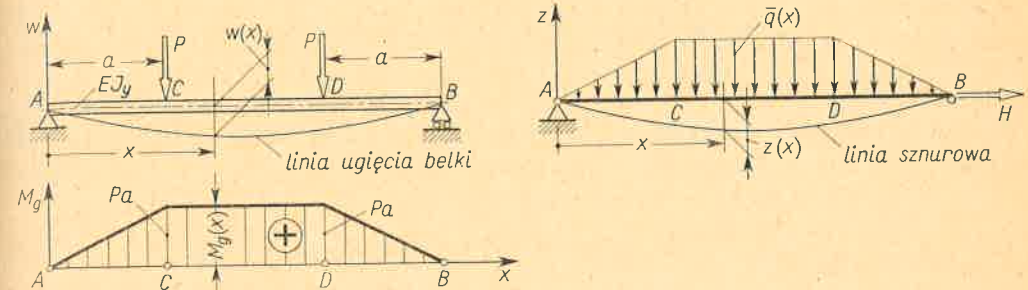
$$\text{równanie (5.20): } w''(x) = \frac{M_g(x)}{EJ_y}, \quad \text{równanie (5.4): } \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\bar{q}(x)}{H},$$

gdzie $\bar{q}(x)$ jest obciążeniem ciągłym sznura odniesionym do jednostki długości na osi

odciętych. Jak widać, obydwie te równania staną się identyczne, gdy uczynimy

$$\bar{q}(x) \equiv M_g(x), \quad EJ_y = H. \quad (5.31)$$

Spełnienie warunków (5.31) nie oznacza jeszcze, że wielkości $z(x)$ i $w(x)$ są identyczne.

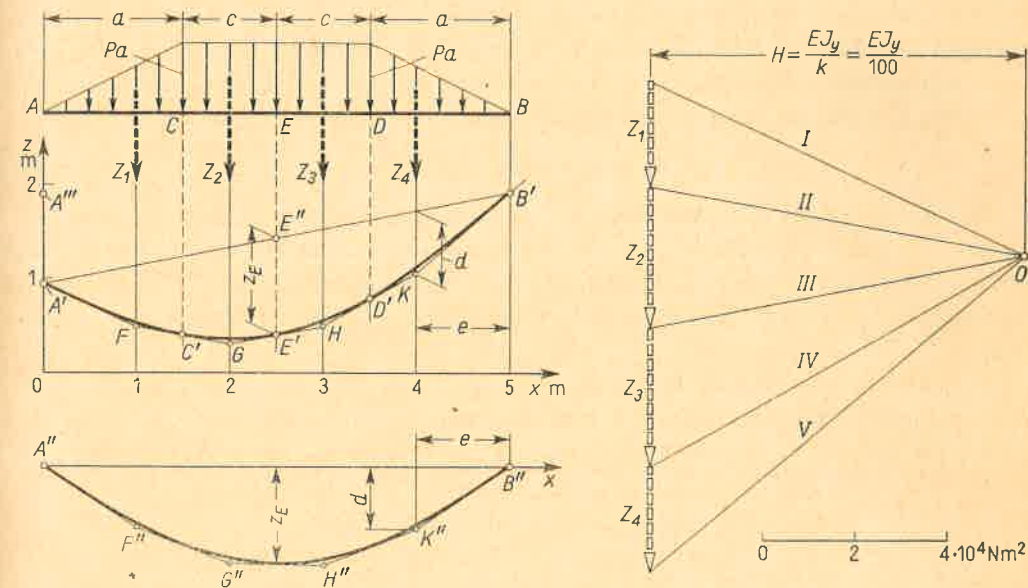


Rys. 5.55. Analogia linii ugięcia belki i linii sznurowej

Aby to osiągnąć, tj. aby

$$w(x) \equiv z(x),$$

potrzeba dodatkowo (art. 5.4), aby te *dwie wielkości lub ich pochodne były sobie równe dla dwóch dowolnie wybranych odciętych x_1 i x_2* . Wtedy poszukiwanie analitycznego rozwiązania równania (5.20) możemy zastąpić wykreśleniem odpowiedniej linii sznurowej.



Rys. 5.56. Wykreślnie wyznaczenie linii ugięcia belki

Kolejne etapy metody wykreślnej prześledzimy na przykładzie belki (rys. 5.55) o stałej sztywności $EJ_y = 8 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$, w której $P = 20 \text{ kN}$, $a = 1,5 \text{ m}$, a długość $\overline{AB} = l = 5 \text{ m}$. Odpowiedni wykres $M_g(x)$ utożsamiamy z „obciążeniem” ciągłym $\bar{q}(x)$. Umawiamy się

przy tym, że $M_g(x) > 0$ odpowiada $\bar{q}(x)$ skierowane do dołu (rys. 5.56). Aby wyznaczyć kształt linii sznurowej, dzielimy belkę na przedziały AC, \dots, DB i w każdym z nich wyznaczamy wartość wypadkowej „siły” Z_1, \dots, Z_4 oraz jej położenie. Tak na przykład „siły” Z_1 i Z_2 są

$$Z_1 = Pa^2/2 = 20 \cdot 10^3 \cdot 1,5^2/2 = 2,25 \cdot 10^4 \text{ Nm}^2,$$

$$Z_2 = Pac = 20 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 1 = 3,00 \cdot 10^4 \text{ Nm}^2$$

i działają odpowiednio w odległościach $2a/3$ od punktu A i $c/2$ od punktu C . Dla zwiększenia dokładności wyników bierzemy przy rysowaniu wieloboku „sił” Z_1, \dots, Z_4 odległość H równa pewnej *podwielokrotności* sztywności EJ_y , np.

$$H = EJ_y/100 = 8 \cdot 10^4 \text{ Nm}^2, \quad (\text{a})$$

w rezultacie czego otrzymujemy boki I, \dots, V . Przenosząc równolegle te boki na rysunek sznura AB otrzymujemy wielobok sznurowy $A'FGHKB'$, w którym $A'F \parallel I, FG \parallel II$ itd. Na koniec wpisujemy ciągłą linię sznurową $A'C'E'D'B'$ styczną do wieloboku w punktach A', C', \dots, B' , odpowiadających podziałowi belki na przedziały (art. 5.4, rys. 5.24). Rzędne z tej linii sznurowej mierzone są w tej samej skali co i skala belki.

Aby z obrazu linii sznurowej przejść do określenia linii ugięcia, musimy jeszcze zapewnić zgodność rzędnych obydwóch linii w dwóch przekrojach. W belce (rys. 5.55) ugięcia $w(x)$ na podporach A i B są równe zero, w tych więc punktach rzędne $z(x)$ też muszą być zerowe. Oznacza to, że rzędne $z(x)$ należy mierzyć nie od osi x , lecz od prostej $A'B'$ i na przykład w przekroju E rzędna $z_E = E''E' = -1,02$ m. Rzędna ta jest ugięciem belki o sztywności, jak obraliśmy, 100 razy mniejszej od rzeczywistej. Gdy wracamy do belki rzeczywistej, wówczas otrzymane ugięcia musimy tyleż razy zmniejszyć i w rezultacie

$$w_E = z_E/100 = -1,02 \text{ cm}. \quad (\text{b})$$

Na skutek dowolności w obiorze bieguna O (w kierunku pionowym) linia odniesienia $A'B$, nie jest na ogół równoległa do linii AB . Aby i ten warunek spełnić, możemy otrzymany obraz przekształcić odmierzając znalezione rzędne od poziomej linii $A''B''$. Ta dodatkowa czynność nie jest na ogół potrzebna, o ile tylko utożsamiamy myślowo linię $A'B'$ z poziomą linią $A''B''$ lub AB .

Z podanego obrazu linii sznurowej możemy odczytać również kąty ugięcia belki. Tak na przykład tangens kąta nachylenia linii sznurowej w punkcie B' jest równy stosunkowi odcinków $d/e \approx 0,66$. W belce rzeczywistej tangens ten będzie 100 razy mniejszy, skąd

$$\vartheta_B = 0,01d/e = 6,6 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,376^\circ. \quad (\text{c})$$

Jako drugi przykład wyznaczmy linię ugięcia wspornikowej belki o przekroju skokowo zmiennym (rys. 5.57a), w której

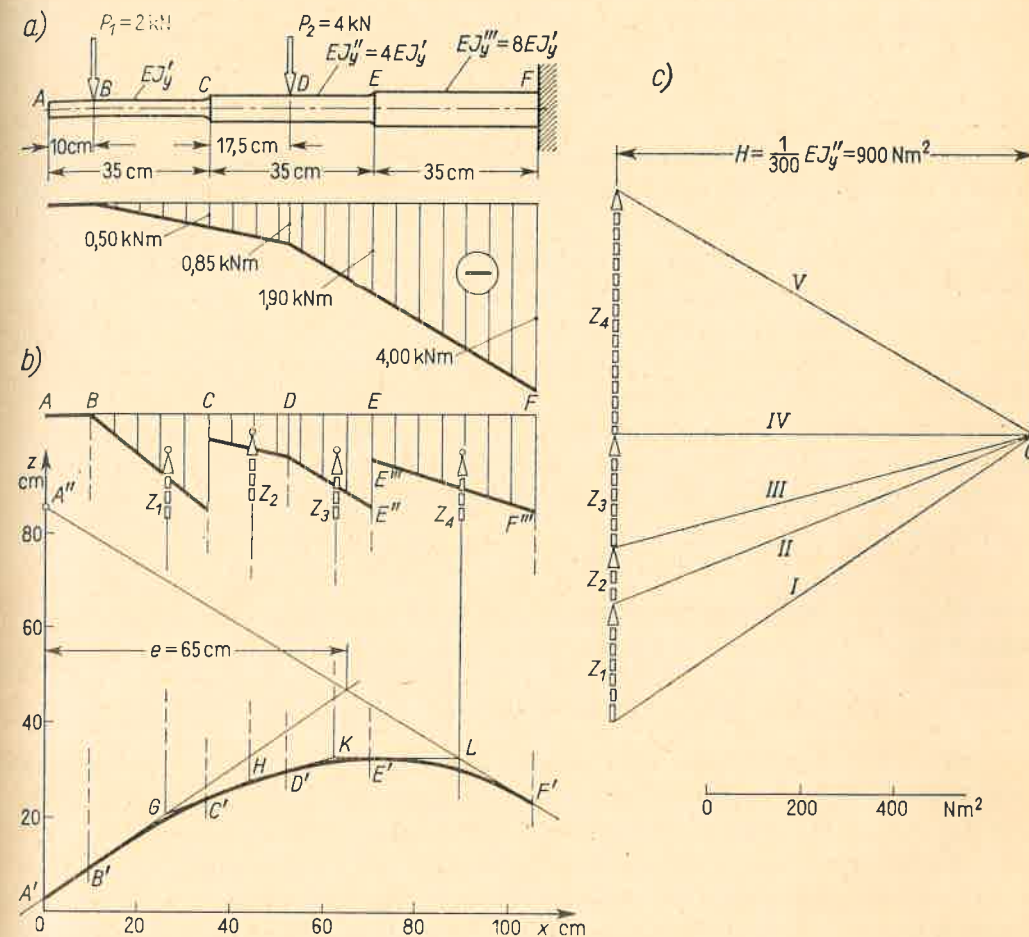
$$EJ'_y = 6,75 \cdot 10^4 \text{ Nm}^2, \quad EJ''_y = 2,70 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2, \quad EJ'''_y = 5,40 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2.$$

Postawione zadanie polega na scałkowaniu równania (5.20), tj. $w'' = M_g(x)/EJ_y(x)$, w którym i licznik, i mianownik prawej strony są funkcjami x . Aby zastosować metodę

opisaną poprzednio, przekształćmy to równanie, jak następuje:

$$w'' = \frac{M_g(x)}{EJ_y(x)} \frac{EJ}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[M_g(x) \frac{EJ}{EJ_y(x)} \right], \quad (5.32)$$

gdzie EJ — dowolnie obrana *stała* na całej belce sztywność. Dzięki takiemu chwytowi wyznaczenie linii ugięcia belki o zmiennym przekroju sprowadza się do zbadania linii



Rys. 5.57. Wykreślnie określenie linii ugięcia belki wspornikowej

ugięcia belki o stałej sztywności, w której rzędne wykresu $\bar{M}_g(x)$ są zmienione w stosunku $EJ/EJ_y(x)$, tj.

$$\bar{M}_g(x) = M_g(x) \frac{EJ}{EJ_y(x)}. \quad (\text{d})$$

W omawianym przykładzie obierzmy $EJ = EJ''_y = 2,70 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2$. Stosując wzór (d) otrzymujemy, że na odcinku BC rzędne $\bar{M}_g(x)$ są $EJ/EJ'_y = 4$ razy większe niż rzędne $M_g(x)$,

na odcinku CE jest $\bar{M}_g = \bar{M}_g(x)$ i wreszcie na odcinku EF jest $\bar{M}_g(x) = 0,5 M_g(x)$. W wyniku takiego przekształcenia zmodyfikowany wykres $\bar{M}_g(x)$ jest nieciągły (rys. 5.57b). Tak na przykład rzędna EE''' wykresu $\bar{M}_g(x)$ na odcinku EF jest

$$EE''' = 1,90 \text{ kNm} \cdot \frac{2,70 \cdot 10^5}{5,40 \cdot 10^5} = 0,95 \text{ kNm},$$

a dla odcinka CF rzędna EE'' zostaje nie zmieniona. Po tej modyfikacji zagadnienie można już rozwiązać jak poprzednio. I tak obliczamy najpierw „siły” Z_1, \dots, Z_4 , np.

$$Z_4 = \frac{0,95 + 2,00}{2} \text{ kNm} \cdot 0,35 \text{ m} = 0,517 \text{ kNm}^2 = 517 \text{ N m}^2,$$

które umiejscawiamy w środkach ciężkości odpowiednich figur. „Siły” te działają w kierunku do góry, albowiem $M_g(x) < 0$. Kolejno rysujemy wielobok „sił” (rys. 5.57c), w którym dla zwiększenia dokładności przyjęto $H = EJ/300 = 900 \text{ N m}^2$, a następnie wielobok $B'GHKLF'$. Na koniec wpisujemy, jak poprzednio, ciągłą linię sznurową $A'B'C'D'E'F'$. Aby linia ta przedstawiała ugięcia belki, musimy jeszcze uzgodnić rzędne lub pochodne obydwóch linii. O linii ugięcia belki wiemy, że w przekroju F ma rzędną $w_F = 0$ oraz kąt ugięcia $\vartheta_F \approx (dw/dx)_F = 0$. Na obrazie linii sznurowej oznacza to, że jej rzędne musimy odczytywać nie od osi x , lecz od prostej $A''LF'$, przechodzącej przez punkt F' ($z_F = 0$) i stycznej w tym punkcie do linii sznurowej. Tak na przykład ugięcie w przekroju A jest równe odcinkowi $A'A''$ mierzonemu w skali belki, tj. $z_A = \overline{A'A''} = -83 \text{ cm}$. Wynik powyższy odpowiada ugięciu belki o 300-krotnie zmniejszonej sztywności, w belce zatem rzeczywistej

$$w_A = z_A/300 = -0,278 \text{ cm}.$$

Podobnie możemy wyznaczyć kąty ugięcia belki, np. tangens kąta ugięcia swobodnego końca A jest $\overline{A'A''}/e = 83/65 = 1,28$. W belce rzeczywistej jest on 300-krotnie mniejszy i wynosi

$$\vartheta_A \approx \text{tg } \vartheta_A = 1,28/300 = 4,25 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,24^\circ.$$

Z przytoczonych przykładów widać od razu zalety metody wykreślnej w porównaniu z analityczną. Tak na przykład w belce (rys. 5.57) mamy pięć przedziałów wynikających ze zmiany funkcji $M_g(x)$ lub zmiany sztywności. Przy całkowaniu równania (5.20) otrzymamy 10 stałych całkowania. Wyznaczenie tych stałych jest żmudne, a otrzymane wyrażenia złożone i nieprzejrzyste. Tych kłopotów unikamy w metodzie wykreślnej. Dokładność tej metody przy umiarkowanej liczbie ($4 \div 8$) „sił” Z jest rzędu $\pm 2\%$, co wystarcza w większości zadań. Nie ulega ona zwiększeniu przy wprowadzeniu większej liczby „sił” Z , gdyż powiększa się wtedy liczba boków wieloboku sznurowego, przy których kreśleniu popełniamy też błędy.

Zadania

1. Wyznaczyć metodą wykreślną linię ugięcia belki (rys. 5.50) przyjmując $M_B^* = 5 \text{ kNm}$, $l = 2 \text{ m}$, $EJ_y = 6,75 \cdot 10^5 \text{ N m}^2$. Określić $(w)_{x=l/2}$ oraz kąt ϑ_B i porównać z wynikami analitycznymi.

2. Wyznaczyć metodą wykreślną linię ugięcia belki (rys. 5.54), jeśli $l_1 = 4 \text{ m}$, $l = 1 \text{ m}$, $q = 2 \text{ kN/m}$, $EJ_y = 2 \cdot 10^6 \text{ N m}^2$.

Wskazówka. Z uwagi na charakter wykresu $M_g(x)$ podzielić belkę na 8 odcinków, a wykres $M_g(x)$ zastąpić łamaną. „Siły” Z umieścić w środkach ciężkości zastępczych figur (trapezów lub trójkątów). Obracć $H = EJ_y/1000$, a skalę belki 1:25.

3. W belce (rys. 5.55) podporę A zastąpiono podporą podatną ($K = 2 \cdot 10^6 \text{ N/m}$). Jak zmieni się linia ugięcia belki?

Odp. Wykres $M_g(x)$ nie zmienia się, więc linia sznurowa $A'CED'B'$ (rys. 5.56) zostaje ta sama. Inna będzie linia odniesienia, bo na podporze A mamy przesunięcie do dołu $w_A = R_A/K = 1 \text{ cm}$. Dla rozpatrywanej belki o 100-krotnie mniejszej sztywności rzędna $(z)_{x=0}$ będzie $100w_A = -1 \text{ m}$ i nowa linia odniesienia przechodzi przez punkty A''' i B' .

4. Belkę (rys. 5.57) podparto na przegubowych podporach w przekrojach C i F przykładając jednocześnie w przekroju F moment $M_F^* = -4 \text{ kNm}$. Jak zmieni się linia ugięcia belki?

Odp. Wykres $M_g(x)$ zostanie bez zmian, bo reakcja podpory C jest $R_C = 0$. Linia sznurowa $A'B' \dots F'$ zostaje bez zmian. Nową linią odniesienia będzie prosta $C'F'$.

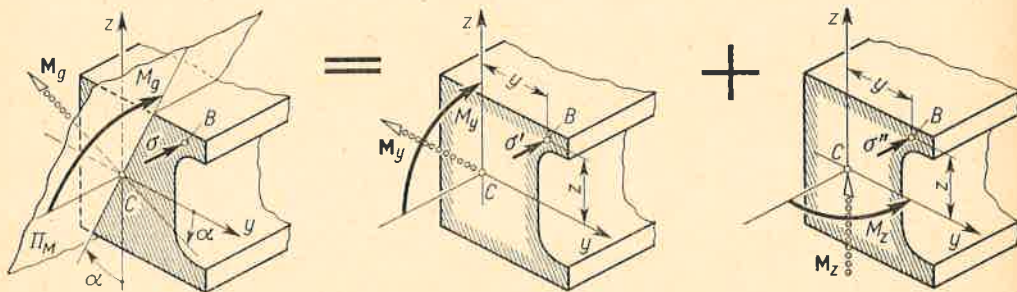
6 ZŁOŻONE ZAGADNIENIA ZGINANIA

6.1. Zginanie ukośne

Z artykułu 5.5 wiemy, że zgięciem ukośnym jest przypadek, gdy płaszczyzna Π_M działania momentu M_g nie pokrywa się z żadną z dwóch głównych centralnych osi y i z przekroju (rys. 6.1). Przypadek taki sprowadzamy do superpozycji dwóch zgięć prostych, rozkładając wypadkowy wektor M_g na składowe momenty

$$M_y = M_g \cos \alpha, \quad M_z = M_g \sin \alpha, \quad (a)$$

których wektory pokrywają się z osiami y i z . Każdy z tych momentów wywołuje zginanie proste, z tym że przy działaniu M_y śladem warstwy obojętnej jest oś y , a przy działaniu



Rys. 6.1. Rozkład zginania ukośnego na dwa proste

M_z — oś z . Uwzględniając to, możemy z wzoru (5.14) określić dla każdego z tych przypadków naprężenia normalne σ' i σ'' działające na ten sam element B przekroju. Dostosowując wzór (5.14) do oznaczeń z rys. 6.1 mamy

$$\sigma' = -M_y z / J_y, \quad \sigma'' = -M_z y / J_z. \quad (b)$$

Przy jednoczesnym działaniu M_y i M_z naprężenie σ w elemencie B jest, zgodnie z zasadą superpozycji,

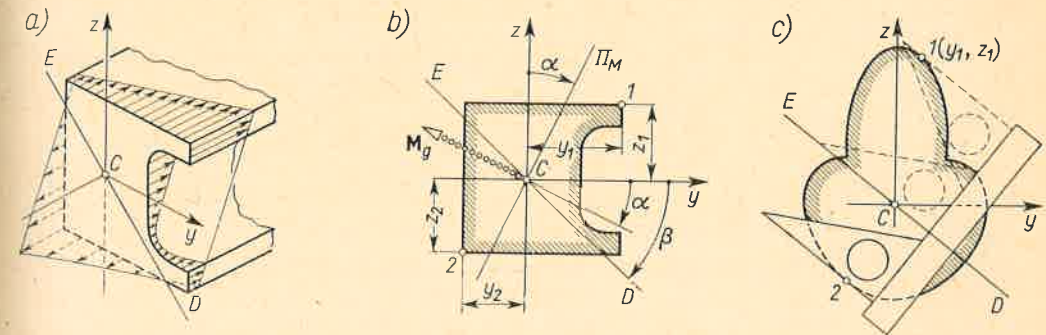
$$\sigma = -\frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z} \quad (6.1a)$$

i odpowiada działaniu wypadkowego momentu M_g . Uwzględniając ponadto wzór (a)

możemy zamiast (6.1a) napisać

$$\sigma = -\frac{M_g z \cos \alpha}{J_y} - \frac{M_g y \sin \alpha}{J_z}. \quad (6.1b)$$

Tak więc przy zginaniu ukośnym naprężenie σ jest liniową funkcją współrzędnych y i z badanego punktu przekroju. Jeśli z każdego punktu przekroju wystawić prostopadły



Rys. 6.2. Obraz naprężeń przy zginaniu ukośnym i określeniu punktów o ekstremalnych naprężeniach

wektor σ , to końce tych wektorów utworzą płaszczyznę (rys. 6.2a) przecinającą płaszczyznę przekroju wzdłuż prostej ECD . Prosta ta jest śladem warstwy obojętnej, czyli *osią obojętną*. Jej równanie otrzymujemy wstawiając $\sigma = 0$ do wzoru (6.1b), tj.

$$z = -y \frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \alpha. \quad (6.2)$$

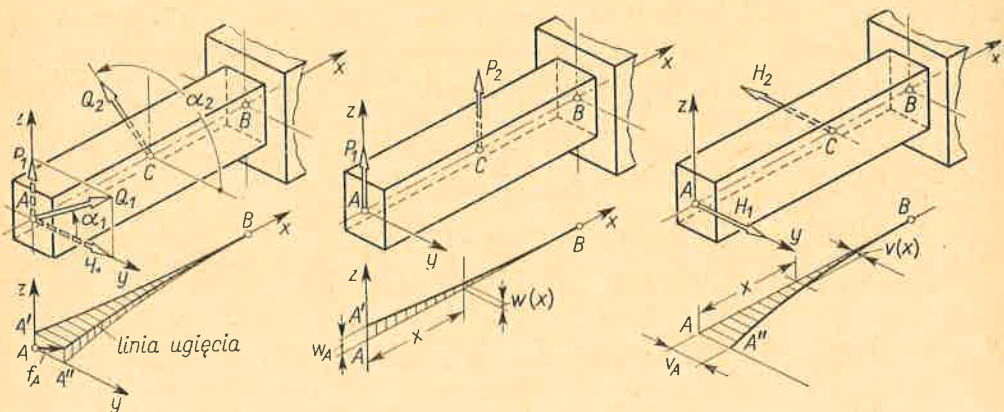
Jak widać, oś obojętna przechodzi przez początek układu, tj. środek ciężkości przekroju. Jeśli $J_y \neq J_z$, to jej kierunek *nie pokrywa się* z kierunkiem wektora M_g i warstwa obojętna nie jest prostopadła do płaszczyzny Π_M działania momentu M_g , lecz jest obrócona w stronę osi głównej odpowiadającej najmniejszemu momentowi bezwładności⁽¹⁾ (rys. 6.2b). W przypadku $J_y = J_z$ warstwa obojętna zostaje prostopadła do płaszczyzny Π_M . Dla takiego przekroju każda oś centralna jest główna (art. 4.4) i zgięcie zawsze jest proste.

Znając położenie osi obojętnej możemy łatwo określić ekstremalne wartości naprężeń σ_e . Skoro końce wektorów σ tworzą płaszczyznę (rys. 6.2a), to warstwie tej płaszczyzny, a więc linie $\sigma = \text{const}$, są równoległe do osi obojętnej ECD . Im rzędna warstwy jest większa, tym ta warstwa leży dalej od linii ECD . Wynika stąd, że punktami przekroju (rys. 6.2b), w których działają σ_e , są punkty 1 i 2, których odległość od osi obojętnej jest największa. Wartości σ_e otrzymamy wstawiając do (6.1b) ich współrzędne y_1, z_1 oraz y_2, z_2 , przy czym współrzędne te są wielkościami algebraicznymi i na przykład $y_1 > 0, z_1 > 0$, ale $y_2 < 0$ i $z_2 < 0$.

W przekrojach bardziej złożonych dla wyznaczenia współrzędnych punktów najbardziej odległych od osi obojętnej ECD stosujemy z reguły sposób wykreślny, którego istotę wyjaśnia rys. 6.2c.

⁽¹⁾ Jeśli $J_y > J_z$, to $\operatorname{tg} \beta = (J_y/J_z) \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \alpha$, skąd $\beta > \alpha$.

Linie ugięcia belki ukośnie zginanej najłatwiej jest wyznaczyć stosując, jak poprzednio, zasadę superpozycji. Biorąc przykładowo wspornikową belkę (rys. 6.3), w której główne centralne osie y i z są znane, i rozdzielając obciążenia Q_1 i Q_2 na działające w płaszczyźnie



Rys. 6.3. Określenie linii ugięcia przez superpozycję

xz , tj. P_1 i P_2 , i yz , tj. H_1 i H_2 , mamy w każdym z tych dwóch przypadków do czynienia ze zgięciem prostym w odpowiedniej płaszczyźnie, a więc z powtórzeniem znanych już z art. 5.8 i 5.9 zagadnień. Wypadkowe ugięcie f_x w przekroju określonym odciętą x jest równe geometrycznej sumie ugięć $w(x)$ i $v(x)$, a jego wartość

$$f_x = \sqrt{v^2(x) + w^2(x)}. \quad (c)$$

Przy zginaniu ukośnym linia ugięcia belki jest na ogół krzywą przestrzenną i staje się płaską tylko wtedy, gdy stosunek ugięć $v(x)/w(x)$ jest niezależny od x . W belkach pryzmatycznych i przy jednakowych warunkach podparcia w obydwóch płaszczyznach xz i yz zachodzi to wtedy, gdy wszystkie siły obciążające działają w jednej płaszczyźnie. W omawianym przykładzie (rys. 6.3) warunek ten sprowadza się do równości $\alpha_1 = \alpha_2$.

W przeprowadzonej analizie przyjęto, że usytuowanie głównych centralnych osi jest znane. Dla belek o przekroju niesymetrycznym pociąga to konieczność całej procedury opisanej w art. 4.4. Powstaje pytanie, czy tej operacji wyznaczania głównych centralnych osi nie można ominąć. Innymi słowy, chcemy określić naprężenia σ w danym przekroju belki (rys. 6.4a) znając J_y , J_z oraz J_{yz} względem centralnych, lecz niegłównych osi y , z i momenty M_y , M_z . Aby rozwiązać to zadanie, wykorzystajmy znany już fakt, że końce wektorów σ tworzą płaszczyznę przechodzącą przez początek układu. Równanie tej płaszczyzny jest więc

$$\sigma = B_z z + B_y y, \quad (d)$$

gdzie B_z , B_y nie znane na razie współczynniki. Aby je określić, wykorzystajmy to, że moment względem osi y wszystkich elementarnych sił σdA musi być równy wypadkowemu momentowi M_y , a względem osi z momentowi M_z . Wynikają stąd dwie zależności

$$-\int_A \sigma dA z = M_y, \quad -\int_A \sigma dA y = M_z. \quad (e)$$

Podstawiając do zależności (e) σ według wzoru (d)

$$B_z \int_A z^2 dA + B_y \int_A yz dA = -M_y, \quad B_z \int_A yz dA + B_y \int_A y^2 dA = -M_z$$

po uwzględnieniu znanych z rozdz. 4 definicji

$$J_y = \int_A z^2 dA, \quad J_{yz} = \int_A yz dA, \quad J_z = \int_A y^2 dA$$

otrzymujemy następujące dwa równania:

$$B_z J_y + B_y J_{yz} = -M_y, \quad B_y J_{yz} + B_z J_z = -M_z,$$

których rozwiązanie względem B_z i B_y daje wynik

$$B_z = -\frac{M_y - (M_z J_{yz}/J_z)}{J_y [1 - (J_{yz}^2/J_y J_z)]}, \quad B_y = -\frac{M_z - (M_y J_{yz}/J_y)}{J_z [1 - (J_{yz}^2/J_y J_z)]}. \quad (f)$$

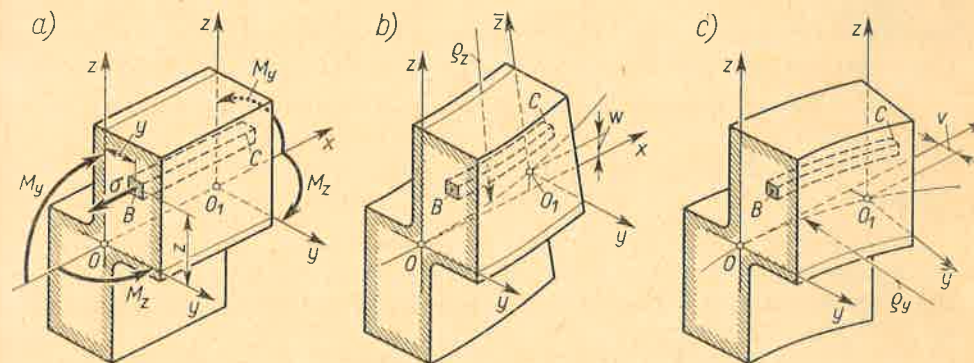
Aby uprościć te wyrażenia, wprowadzamy pomocnicze wielkości

$$\mathfrak{M}_y = \kappa \left(M_y - M_z \frac{J_{yz}}{J_z} \right), \quad \mathfrak{M}_z = \kappa \left(M_z - M_y \frac{J_{yz}}{J_y} \right), \quad \frac{1}{\kappa} = 1 - \frac{J_{yz}^2}{J_y J_z}. \quad (6.3)$$

Dzięki temu równanie (d) przyjmuje postać

$$\sigma = -\frac{\mathfrak{M}_y z}{J_y} - \frac{\mathfrak{M}_z y}{J_z}, \quad (6.4)$$

przypominającą wzór (6.1a) i przechodzącą w niego, gdy osie y , z są główne, czyli $J_{yz} = 0$. W tym ujęciu wzór (6.1a) można traktować jako szczególny przypadek zależności (6.4). Dalsze etapy badania naprężeń, a więc wyznaczenie osi obojętnej i ekstremalnych wartości σ przebiegają identycznie jak poprzednio.



Rys. 6.4. Analiza ukośnego zginania w układzie osi niegłównych

Aby określić ugięcia belki w układzie niegłównych osi y i z , wyznaczmy najpierw względne odkształcenia ε^* pewnego włókna BC przy wymuszonym zgięciu w płaszczyźnie xz (rys. 6.4b). Obraz odkształceń jest identyczny z pokazanym na rys. 5.29, wobec czego z wzoru (5.7) mamy

$$\varepsilon^* = -z/\rho_z,$$

gdzie ρ_z — promień krzywizny osi OO_1 w płaszczyźnie xz . Podobnie przy zgięciu w płaszczyźnie xy (rys. 6.4c) otrzymamy dla badanego włókna

$$\varepsilon^{**} = -y/\rho_y.$$

Przy jednoczesnym zgięciu w obydwóch płaszczyznach całkowite wydłużenie $\varepsilon = \varepsilon^* + \varepsilon^{**}$. Uwzględniając ponadto, że ugięcia belki są małe, możemy podobnie jak w art. 5.8 napisać

$$1/\rho_z \approx w'', \quad 1/\rho_y \approx v'',$$

gdzie w i v są odpowiednio przemieszczeniami punktu osi w płaszczyznach xz i xy . W rezultacie mamy

$$\varepsilon = -zw'' - yv''. \tag{g}$$

Odpowiadające temu odkształceniu naprężenie

$$\sigma = E\varepsilon = -Ew''z - Ev''y \tag{h}$$

musi być dla wszystkich możliwych wartości y i z tożsamościowo równe wartości σ określonej wzorem (6.4), skąd wynikają zależności

$$w''(x) = \frac{M_y}{EJ_y}, \quad v''(x) = \frac{M_z}{EJ_z}, \tag{6.5}$$

wyrażające drugie pochodne wielkości v i w w funkcji pomocniczych wielkości M_y , M_z i x określonych poprzednio i związanych z obciążeniem i geometrycznymi własnościami przekroju. Tak więc określenie linii ugięcia w układzie osi niegłównych sprowadza się do identycznych równań jak w przypadku zgięcia prostego, z tym tylko, że zamiast rzeczywistych momentów gnących M_y i M_z wchodzi wielkości pomocnicze M_y i M_z mające ten sam wymiar, tj. Nm, co i momenty gnące. Jeśli więc określimy przebieg $M_y(x)$ i $M_z(x)$, to linię ugięcia można wyznaczyć analitycznie lub wykreślić wykorzystując wszystkie nabyte poprzednio wiadomości.

Podany powyżej drugi wariant analizy zginania ukośnego jest lepszy od pierwszego wtedy, gdy układ niegłównych osi y, z jest w jakiś szczególny sposób wyróżniony spośród innych. Taką sytuację mamy na przykład w profilu zetowym, kątowniku itp.

Zadania

1. Na wspornikową belkę o przekroju skrzynkowym działa prostopadła do csi siła $P = 4$ kN (rys. 6.5) o zmiennym kierunku ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$). Obliczyć maksymalne naprężenie w niebezpiecznym przekroju belki. Wyznaczyć tor punktu A , gdy α zmienia się od 0 do 2π .

Od p. Niebezpieczny jest przekrój B , albowiem i M_y , i M_z są tam ekstremalne. Z kolei w tym przekroju niebezpieczny jest punkt I o współrzędnych $y_1 = 5$ cm i $z_1 = 7,5$ cm. Podstawiając do (6.1a) $M_y = 4000 \cdot 1,5 \cos \alpha$, $M_z = 4000 \cdot 1,5 \sin \alpha$, $J_y = 753$ cm⁴, $J_z = 399$ cm⁴ oraz y_1 i z_1 mamy w wyniku

$$\sigma_e = -59,8 \cos \alpha - 75,3 \sin \alpha = -96,1 \sin(\alpha + 38,5^\circ) \text{ MPa}.$$

Tak więc maksymalne σ_e są $\pm 96,1$ MPa i występują, gdy $\alpha = 51,5^\circ$ lub $\alpha = 231,5^\circ$. Te same maksymalne naprężenia, tylko przesunięte w fazie, wystąpią w narożach 2, 3 i 4 przekroju B .

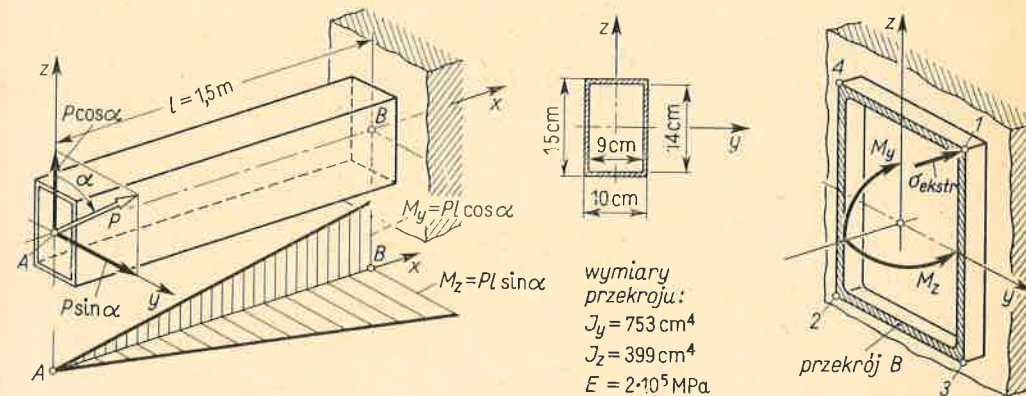
Ugięcia w_A i v_A (rys. 6.3) według wzoru (5.25) są (w mm)

$$w_A = P \cos \alpha l^3 / 3EJ_y = 3,00 \cos \alpha, \quad v_A = P \sin \alpha l^3 / 3EJ_z = 5,65 \sin \alpha.$$

Po wyrugowaniu kąta α otrzymujemy stąd

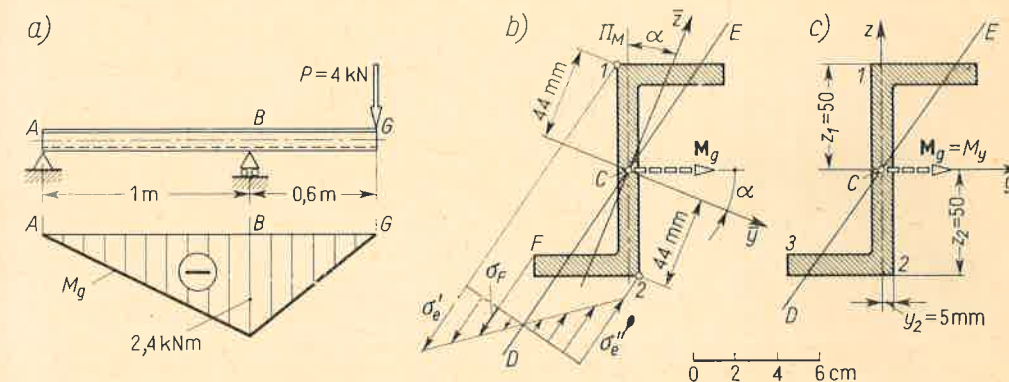
$$(w_A/3,00)^2 + (v_A/5,65)^2 = 1,$$

a więc tor punktu A jest elipsą o półosiach 5,65 mm i 3,00 mm.



Rys. 6.5. Przykład analizy zgięcia ukośnego w układzie osi głównych

2. Wyznaczyć σ_e w niebezpiecznym przekroju belki (rys. 6.6). Dane główne centralne momenty $J_y = 283$ cm⁴, $J_z = 25$ cm⁴ oraz $\alpha = 22,2^\circ$.



Rys. 6.6. Konfrontacja metod analizy zgięcia ukośnego

a) szkic belki; b) układ głównych, centralnych osi \bar{y}, \bar{z} ; c) układ osi y, z centralnych, lecz niegłównych.

Rozwiązanie. Ekstremalny moment gnący (M_g) = 2400 N m działa w przekroju B , jego wektor jest do płaszczyzny rysunku prostopadły. Po narysowaniu tego przekroju, umiejscowieniu głównych osi \bar{y} i \bar{z} oraz wektora M_g (rys. 6.6b) określamy z (6.2) położenie osi obojętnej ECD , a mianowicie⁽¹⁾

$$\bar{z} = -\bar{y} (283/25) \operatorname{tg}(-22,2^\circ) = 4,61\bar{y},$$

a więc oś ta biegnie w I i III ćwiartce układu osi \bar{y}, \bar{z} . W porównaniu z M_g jest ona obrócona w stronę osi \bar{z} , bo $J_z < J_y$. Widać, że najbardziej odległe od osi ECD są punkty 1 i 2, których współrzędne odczytane z rysunku są $\bar{y}_1 = -\bar{y}_2 = -2,4$ cm, $\bar{z}_1 = -\bar{z}_2 = 4,4$ cm. Podstawiając te dane do wzoru (6.1b) przy uwzględnieniu, że $M_g < 0$ (przeciwnie niż na rys. 6.1), mamy

$$\sigma'_e = 122 \text{ MPa}, \quad \sigma''_e = -122 \text{ MPa}$$

⁽¹⁾ Kąt $\alpha = -22,2^\circ < 0$, gdyż jest przeciwny do podanego na rys. 6.1.

odpowiadające punktom 1 i 2. Dla innych punktów, np. punktu F , wartość σ_F odczytujemy z wykresu podającego rozkład naprężeń w kierunku prostopadłym do osi obojętnej.

Przerobiony przykład unaocznia nieodzowne w zagadnieniach zginania ukośnego operowanie rysunkiem przekroju. Szczególnie ważne jest prawidłowe naniesienie kierunków głównych centralnych osi i wektora momentu M_g .

3. Powtórzyć zadanie 2, stosując układ osi y, z , centralnych niegłównych (rys. 6.6c). Dane $J_y = 246 \text{ cm}^4$, $J_z = 61,5 \text{ cm}^4$, $J_{yz} = 90 \text{ cm}^4$.

Rozwiązanie. W takim układzie osi: $M_y = -2400 \text{ N m}$, $M_z = 0$ (rys. 6.4a). Wielkości pomocnicze obliczone z (6.3) są

$$\alpha = 2,15, \quad \mathfrak{M}_y = -5,16 \text{ kNm}, \quad \mathfrak{M}_z = 1,89 \text{ kNm},$$

i po podstawieniu ich do wzoru (6.4) mamy

$$\sigma = 2100z - 3070y \quad (\text{MPa, gdy } y \text{ i } z \text{ w m}).$$

Równanie osi obojętnej ECD otrzymamy biorąc $\sigma = 0$, skąd

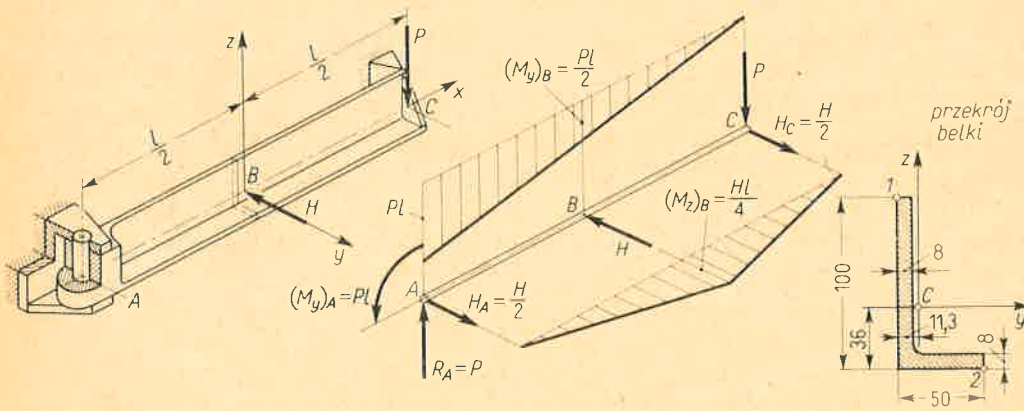
$$z = 1,46y,$$

której przebieg jest taki sam jak na rys. 6.6b. Naprężenie σ_e w punkcie 1 ($y_1 = -0,5 \text{ cm}$, $z_1 = 5,0 \text{ cm}$) jest

$$\sigma_e = 2100 \cdot 5 \cdot 10^{-2} + 3070 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} \approx 121 \text{ MPa}$$

i w granicach błędów rachunkowych pokrywa się z wynikiem poprzednim.

4. Udowodnić (bez rachunków), że przy ukośnym zginaniu pryzmatycznej belki obciążonej tylko siłami skupionymi bądź momentami (rys. 6.7) niebezpieczny jest jeden z przekrojów A, B, C , a nie żaden pośredni.



Rys. 6.7. Przykład liczbowy; określenie reakcji i M_y oraz M_z .

Dane: $P = 2 \text{ kN}$, $H = 2 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$, $J_y = 116 \text{ cm}^4$, $J_z = 19,5 \text{ cm}^4$, $J_{yz} = -26,7 \text{ cm}^4$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

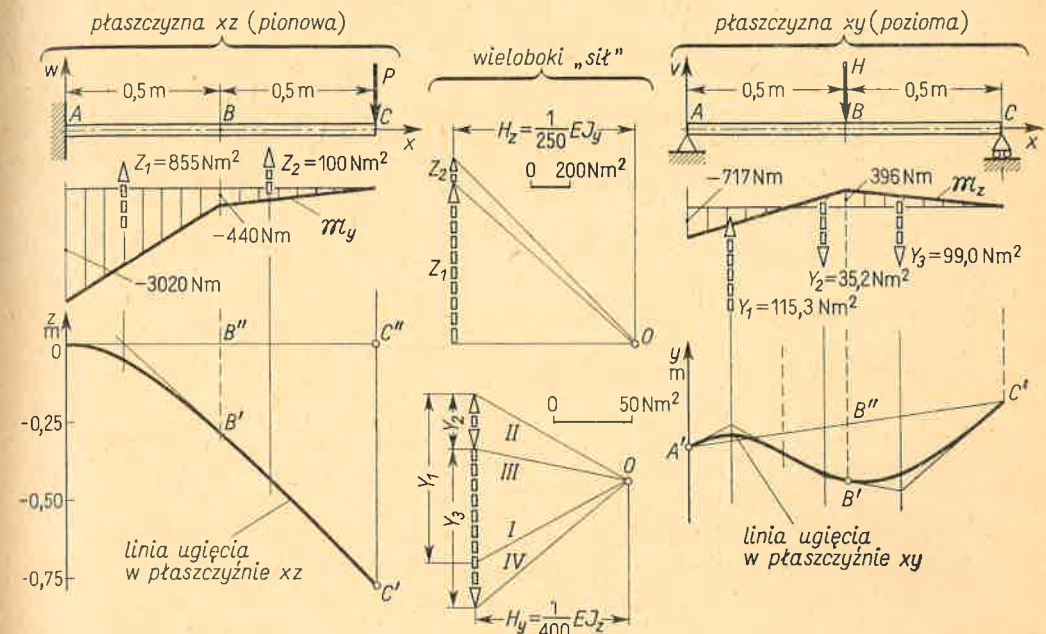
Rozwiązanie. Przy takim obciążeniu na kolejnych odcinkach belki momenty M_y i M_z oraz utworzone z nich \mathfrak{M}_y i \mathfrak{M}_z są liniowymi funkcjami x . Naprężenie σ w pewnym włóknie ($y = \text{const}$, $z = \text{const}$) na danym odcinku jest też liniową funkcją x , a więc mającą ekstremum na końcu lub początku tego odcinka, czyli w przekroju przyłożenia obciążenia, c.b.d.d. Spostrzeżenie to ogranicza liczbę koniecznych do zbadania przekrojów belki.

5. Obliczyć σ_e w przekroju B belki z rys. 6.7.

Odp. $M_y = -1 \text{ kN m} < 0$, $M_z = 0,5 \text{ kN m} > 0$ (porównaj rys. 6.4a); wielkości pomocnicze $\alpha = 1,510$, $\mathfrak{M}_y = -440 \text{ N m}$, $\mathfrak{M}_z = 396 \text{ N m}$; z wzoru (6.4) $\sigma = 379z - 2030y$ (MPa, gdy y i z w m); równanie osi obojętnej $z = 5,35y$, niebezpieczny jest punkt 2 ($y = 3,87 \text{ cm}$, $z = -3,6 \text{ cm}$), w którym $\sigma_e = 92,3 \text{ MPa}$.

6. Wyznaczyć linię ugięcia belki (rys. 6.7). W płaszczyźnie xz belka ta jest wspornikowa utwierdzona w A , w płaszczyźnie yz jest ona belką na podporach A i C .

Rozwiązanie. Warunki podparcia wyróżniają tu szczególnie układ osi niegłównych y, z i dlatego wykorzystamy metodę wykreślną opierając się na wzorach (6.5). Wykresy \mathfrak{M}_y i \mathfrak{M}_z są złożone z odcinków prostych (zadanie 4) i do ich określenia wystarczy znać rzędne w przekrojach A, B, C . W przekroju C jest $(\mathfrak{M}_y)_C = (\mathfrak{M}_z)_C = 0$. W przekroju B jest $(\mathfrak{M}_y)_B = -440 \text{ N m}$, $(\mathfrak{M}_z)_B = 396 \text{ N m}$ (zadanie 5), wreszcie w przekroju A jest $(\mathfrak{M}_y)_A = -3020 \text{ N m}$ i $(\mathfrak{M}_z)_A = -717 \text{ N m}$, gdyż $M_y = -2 \text{ kN m}$, a $M_z = 0$. Mając te dane budujemy wykresy $\mathfrak{M}_y(x)$ i $\mathfrak{M}_z(x)$ (rys. 6.8) i znaną już metodą



Rys. 6.8. Przykład liczbowy: wykreślnie wyznaczenie linii ugięcia

wykreślną wyznaczamy linie ugięcia w obydwóch płaszczyznach, przy czym przyjęto zamiast rzeczywistych $EJ_y = 2,32 \cdot 10^5 \text{ N m}^2$ i $EJ_z = 0,39 \cdot 10^5 \text{ N m}^2$ odpowiednie sztywności 250 i 400 razy mniejsze. Dla przykładu przeliczmy ugięcie w przekroju B . W płaszczyźnie xz odcinek $B''B'$ w skali rysunku belki jest $27,5 \text{ cm}$, a w płaszczyźnie xy jest 18 cm , skąd otrzymujemy

$$w_B = 27,5/250 = 1,10 \text{ mm}, \quad v_B = 18/400 = 0,45 \text{ mm},$$

a wypadkowe przemieszczenie

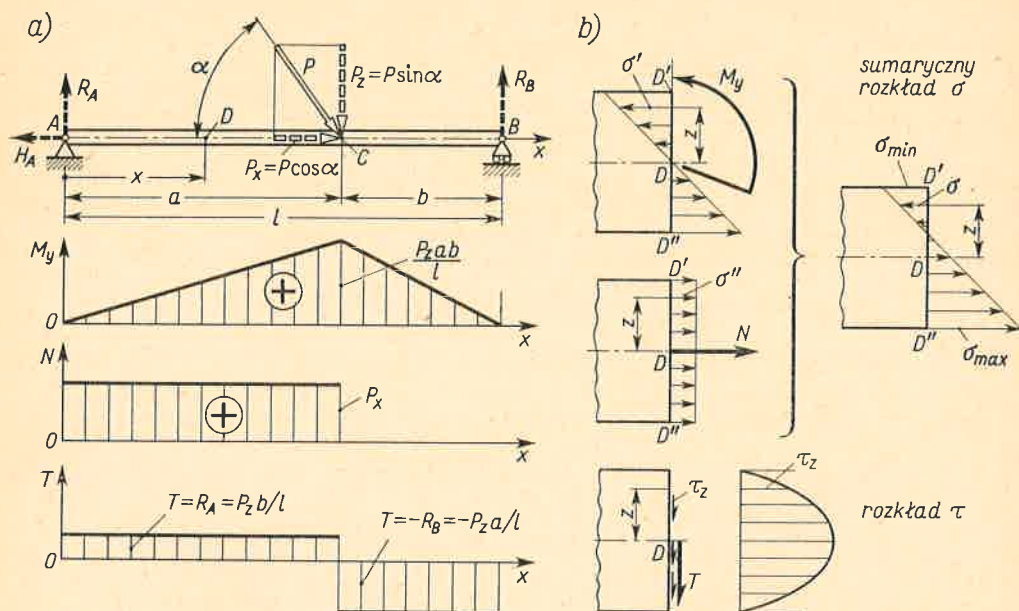
$$f_B = \sqrt{v_B^2 + w_B^2} = 1,19 \text{ mm}.$$

Konfrontując rys. 6.7 i 6.8 widzimy, że punkt B przesuwa się pionowo do dołu i poziomo⁽¹⁾ w kierunku siły H .

⁽¹⁾ Układ osi xv na rys. 6.8 przyjęto tak, że zwroty osi v i y są zgodne. Odcinek $B''B'$ odpowiada $v < 0$, czyli w kierunku siły H .

6.2. Zginanie prętów krępych przy istnieniu sił wzdłużnych

Zginanie z jednoczesnym ściskaniem lub rozciąganiem występuje, gdy siły obciążające są nachylone do osi pręta (rys. 6.9a). Przypadek taki sprowadzamy do superpozycji rozpatrzonych już przypadków. Widzimy bowiem, że P_z wraz z reakcjami R_A i R_B przedstawia



Rys. 6.9. Analiza jednoczesnego zginania i rozciągania

poprzeczne zginanie, w którym wysiłek przekroju stanowią podane wykresami: siła tnąca T i moment gnący M_y . Siła P_x wraz z reakcją $H_A = P_x$ przedstawia znany z rozdz. 2 przypadek rozciągania, w którym wysiłek przekroju stanowi siła wzdłużna N o przebiegu podanym na wykresie. Rozkłady naprężeń odpowiadające tym przypadkom składowym (rys. 6.9b) określamy ze znanych już zależności. Jeśli zgięcie jest proste, to w obranym przekroju D naprężenia σ' i τ_z odpowiadające zginaniu wyznaczamy z wzorów (5.14) i (5.18), tj.

$$[\sigma' = -M_y z / J_y, \quad \tau_z = T S_y^{(z)} / J_y b_z,$$

podczas gdy odpowiadające rozciąganiu naprężenia σ'' są

$$\sigma'' = N / A.$$

Zgodnie z zasadą superpozycji, przy jednoczesnym zginaniu i rozciąganiu mamy w obranym włóknie naprężenia normalne

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = (N/A) - (M_y z / J_y), \tag{6.6}$$

a naprężenia τ_z zostają jak powyżej. Ekstremalne naprężenia normalne występują w skraj-

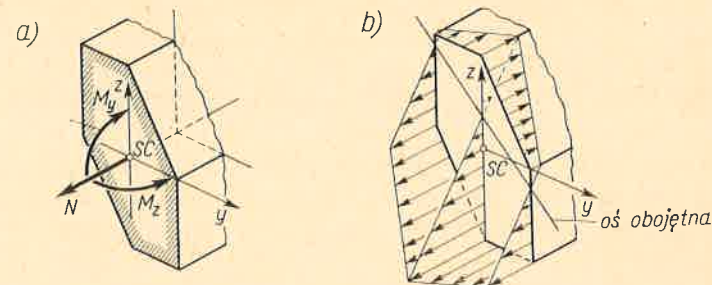
nych włóknach D' i D'' i przy wykorzystaniu pojęcia wskaźników wytrzymałości W_y' i W_y'' są

$$\sigma_{\min} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y'}, \quad \sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y''}. \tag{6.7}$$

W przypadku ukośnego zginania i jednoczesnego rozciągania lub ściskania (rys. 6.10) naprężenia od zginania określamy z wzorów (6.1a) lub (6.4), zależnie od tego, czy centralne osie y, z są główne, czy też nie. W wyniku mamy odpowiednio

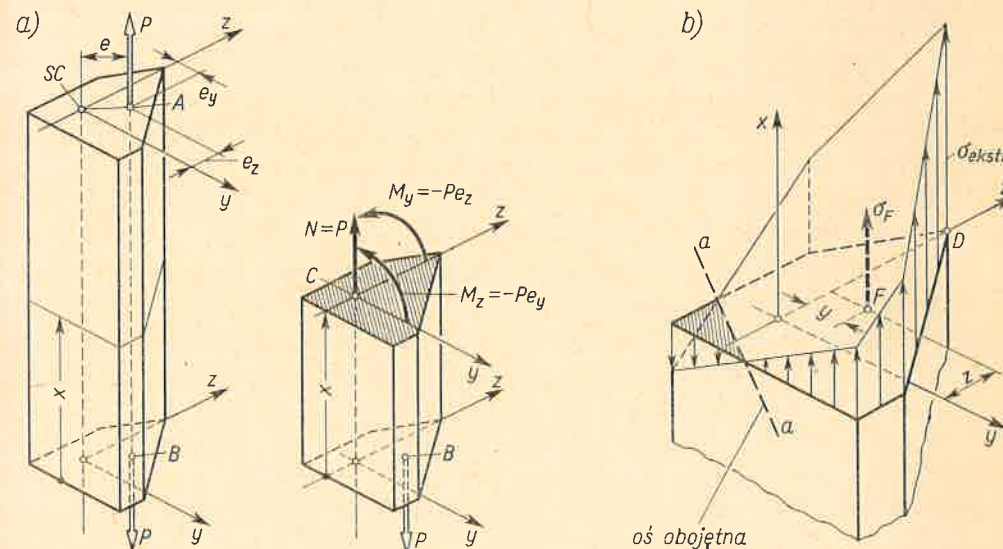
$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z} \quad \text{lub} \quad \sigma = \frac{N}{A} - \frac{\mathfrak{M}_y z}{J_y} - \frac{\mathfrak{M}_z y}{J_z}, \tag{6.8}$$

gdzie wielkości \mathfrak{M}_y i \mathfrak{M}_z określone są wzorami (6.3).



Rys. 6.10. Jednoczesne zginanie ukośne i rozciąganie

Szczególnym przypadkiem zginania i jednoczesnego rozciągania lub ściskania jest *mimośrodowe rozciąganie lub ściskanie*, gdy obciążenie pręta stanowią siły wzdłużne równoległe do jego osi (rys. 6.11a). Odległość e między linią działania siły a osią nazywamy



Rys. 6.11. Analiza mimośrodowego rozciągania

mimośrodowo sily. Prowadząc myślowy przekrój i badając równowagę odciętej części otrzymujemy następujące składowe wysiłki tego przekroju:

$$N = P, \quad M_y = -Pe_z, \quad M_z = -Pe_y, \quad (a)$$

przy czym ujemne wartości M_y i M_z wynikają z konfrontacji rys. 6.11 i 6.10. Zakładając, że osie y i z są centralne główne, mamy z wzoru (6.8) dla pewnego punktu F przekroju wartość σ_F

$$\sigma_F = \frac{P}{A} + \frac{Pe_z z}{J_y} + \frac{Pe_y y}{J_z}, \quad (b)$$

skąd wynika, że końce wektorów σ_F tworzą płaszczyznę. Aby wyznaczyć ekstremalne naprężenie σ_e , celowe jest znaleźć naprzód oś obojętną $a-a$, dla której $\sigma_F = 0$, tj.

$$(1/A) + (ze_z/J_y) + (ye_y/J_z) = 0, \quad (c)$$

a następnie określić taki punkt D , którego odległość od prostej $a-a$ jest ekstremalna (porównaj rozumowanie w art. 6.1, rys. 6.2b).

Z zależności (c) wynika, że oś obojętna nie przechodzi przez środek ciężkości przekroju. Zależności tej nadajemy inną postać wprowadzając nowe pojęcie *promieni bezwładności* i_y, i_z względem centralnych głównych osi y i z

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}. \quad (6.9)$$

Dzięki czemu zamiast (c) możemy napisać

$$\frac{e_z z}{i_y^2} + \frac{e_y y}{i_z^2} + 1 = 0. \quad (6.10)$$

Z zależności tej widać, że przy dostatecznie małych mimośrodkach e_y i e_z oś obojętna jest przesunięta poza obręb materialnego przekroju pręta. To oznacza, że na całym przekroju działają jednoimienne naprężenia. Przypadek taki ma duże znaczenie w konstrukcjach inżynierskich, w których stosowane są materiały, jak cegła lub beton, mające małą wytrzymałość na rozciąganie i wielokrotnie większą wytrzymałość na ściskanie. W konstrukcjach takich pożądane jest, aby przy mimośrodkowym ściskaniu pręta naprężenia na całym polu przekroju były ściskające. Spełnienie tego warunku jest możliwe, gdy mimośrodek siły nie wykracza poza pewne granice. W konstrukcjach maszynowych zagadnienie to nie ma dużego znaczenia.

Ekstremalne naprężenia σ_e , określone z wzorów (6.7) lub (6.8), umożliwiają ocenę bezpieczeństwa ustroju. Jak wiemy bowiem z rozdz. 5, punkty przekroju, w których występują σ_e , są wolne od naprężeń stycznych.⁽¹⁾ Właściwości tej nie zmienia istnienie siły wzdłużnej i kryterium bezpieczeństwa, tj. $\sigma_e \leq k_r$ lub $\sigma_e \leq k_c$ zostaje bez zmiany. Jest rzeczą oczywistą, że kryterium to musi być spełnione we wszystkich przekrojach, z czym, podobnie jak i w zginaniu belek, wiąże się poszukiwanie tzw. przekrojów niebezpiecznych.

⁽¹⁾ Z wyłączeniem przekrojów cienkościennych (rozd. 13).

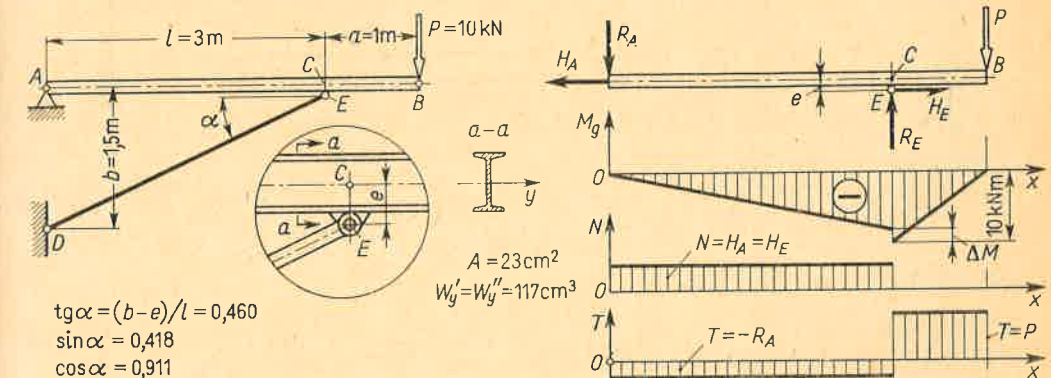
Zadania

1. W belce (rys. 6.9) $P = 10$ kN, $l = 3$ m, $a = 2$ m, $\alpha = 30^\circ$. Wyznaczyć naprężenia σ_e w niebezpiecznym przekroju, jeśli belka jest rurą o wymiarach $d_w = 14$ cm, $d_z = 16$ cm.

Odp. $P_x \approx 8,7$ kN, $P_z = 5$ kN, $W_y' = W_y'' = \pi(d_z^4 - d_w^4)/32d_z = 167$ cm³, $A = 47$ cm²; niebezpieczny przekrój tuż z lewej strony punktu C , gdzie $N = 8,7$ kN, $M_y = 3,33$ kNm; z wzoru (6.7)

$$\sigma_e = (8,7 \cdot 10^3 / 47 \cdot 10^{-4}) + (3,33 \cdot 10^3 / 167 \cdot 10^{-6}) = 21,8 \text{ MPa}.$$

2. Nieważka dwuteowa belka ACB (rys. 6.12) podparta jest prętem DE , przy czym przegub E jest umocowany na belce mimośrodkowo ($e = 12$ cm). Wyznaczyć σ_e w niebezpiecznym przekroju belki.

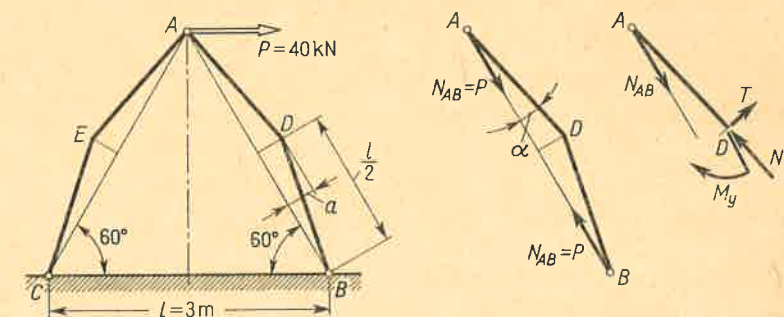


Rys. 6.12. Przykład liczbowy

Rozwiązanie. Istotne w tym zadaniu jest zbadanie roli mimośrodu e . Z warunku równowagi momentów względem A mamy ściskającą siłę w przecie DE : $N' = P(l+a)/b \cos \alpha = 29,4$ kN. Na belkę w punkcie E działają składowe $R_E = N' \sin \alpha = 12,3$ kN i $H_E = N' \cos \alpha = 26,7$ kN. Wykres M_g ma w punkcie C przeskok ΔM , albowiem dla przekroju tuż na prawo od punktu C jest $M_g = Pa = 10$ kNm, natomiast w przekroju tuż na lewo od tego punktu jest $M_g' = Pa - H_E e = 6,8$ kNm. Badając σ_e w pierwszym przypadku mamy $\sigma_e = 10 \cdot 10^3 / 117 \cdot 10^{-6} = 85$ MPa, natomiast w przekroju drugim $\sigma_e = (H_E/A) + [(Pa - H_E e)/W_y] \approx 70$ MPa. Niebezpieczny jest więc przekrój tuż z prawej strony C .

3. W dwuprętowej kratownicy (rys. 6.13) ze względów konstrukcyjnych pręty nie są proste, lecz załamane, tj. AEC i ADB ($a = 20$ cm). Jaki wzrost naprężeń spowoduje taka modyfikacja? W obliczeniach przyjąć $A = 23$ cm², $W_y' = W_y'' = 117$ cm³.

Odp. Pierwotnie pręt AB był ściskany, pręt AC rozciągany, przy czym $N_{AC} = -N_{AB} = P = 40$ kN,

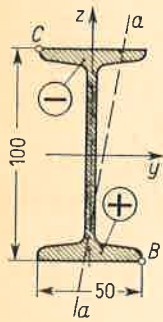


Rys. 6.13. Przykład liczbowy

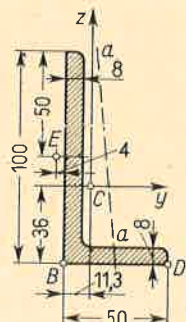
a naprężenia $\sigma = P/A = 17,4$ MPa. Po modyfikacji każdy z prętów jest zginany i jednocześnie ściskany lub rozciągany, przy czym siły obciążające zostają bez zmian. W niebezpiecznym przekroju tuż obok wierzchołka D (lub E)

$$M_y = N_{AB} a = 8,0 \text{ kNm}, \quad N = N_{AB} \cos \alpha = 39,6 \text{ kN},$$

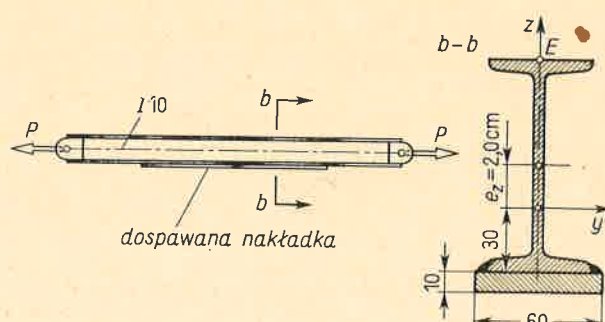
a ekstremalne naprężenia $\sigma_e = -(N/A) - (M_y/W_y) = -85,5$ MPa są prawie 5-krotnie większe od pierwotnych. Stwierdzenie to dobitnie ilustruje ujemne skutki tego rodzaju modyfikacji.



Rys. 6.14.



Rys. 6.15.



Rys. 6.16.

4. Dwuteówka (rys. 6.14), dla której $J_y = 117 \text{ cm}^4$, $J_z = 12,2 \text{ cm}^4$, $A = 10,6 \text{ cm}^2$, ściskana jest siłą $P = 20 \text{ kN}$ przyłożoną w punkcie C . Wyznaczyć położenie osi obojętnej oraz ekstremalne naprężenia ściskające i rozciągające.

Odp. Równanie osi obojętnej $a-a$: $0,31z - 2,24y + 1 = 0$. Ekstremalne ściskające naprężenia -151 MPa w punkcie C , ekstremalne rozciągające 113 MPa w punkcie B .

5. Nierównoramienny kątownik ($J_y = 116 \text{ cm}^4$, $J_z = 19,5 \text{ cm}^4$, $J_{yz} = -27,6 \text{ cm}^4$, $A = 11,5 \text{ cm}^2$) rozciągany jest siłą P przyłożoną w punkcie E (rys. 6.15). Jaka może być ta siła, aby było $|\sigma_e| < 140$ MPa.

Rozwiązanie. Musimy tu stosować drugi z wzorów (6.8), gdyż centralne osie y , z nie są główne. Biorąc z rysunku $e_y = -1,53 \text{ cm}$, $e_z = 1,4 \text{ cm}$ i zakładając $P_0 = 1 \text{ kN}$ mamy z wzorów (a): $N = 1 \text{ kN}$, $M_y = -14 \text{ Nm}$, $M_z = 15,3 \text{ Nm}$, a z wzorów (6.3)

$$\alpha = 1,510, \quad \mathfrak{M}_y = 11,6 \text{ Nm}, \quad \mathfrak{M}_z = 18,1 \text{ Nm}.$$

Podstawiając te dane do drugiego wzoru (6.8) mamy

$$\sigma = 0,87 - 10,0z - 92,9y \quad (\text{MPa, gdy } y \text{ i } z \text{ w m}).$$

Z obrazu osi obojętnej $a-a$ na rysunku przekroju wynika, że niebezpieczny jest punkt D ($y = 3,87 \text{ cm}$, $z = -3,6 \text{ cm}$), w którym $\sigma_D = 0,87 + 0,36 - 3,59 = -2,37$ MPa. Aby spełnić warunek $\sigma_c = 140$ MPa, musimy P_0 zwiększyć w stosunku $140/2,37 = 42,1$, skąd szukana wartość $P \approx 42 \text{ kN}$.

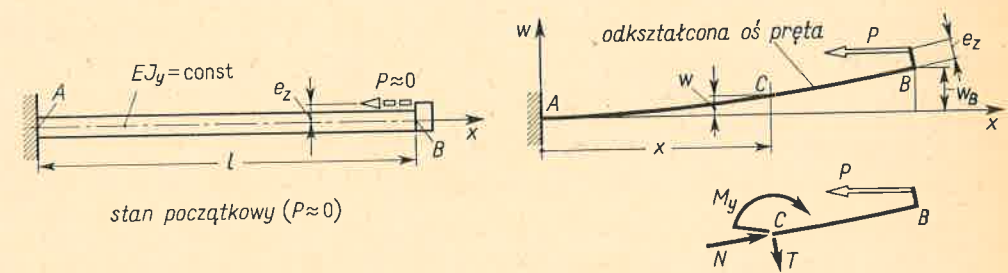
6. W celu zmniejszenia naprężeń w rozciąganej dwuteówce (wymiary jak w zadaniu 4) dospawano jednostronnie nakładkę (rys. 6.16). Czy takie rozwiązanie odpowiada zamierzeniom?

Odp. Nie. W konstrukcji pierwotnej $\sigma_0 = P/A$; w zmodyfikowanej środek ciężkości przekroju $b-b$ ulega przesunięciu, a mimośród $e_z = 2,0 \text{ cm}$. Dla przekroju $b-b$ jest $J'_y = 287 \text{ cm}^4$, $A' = 16,6 \text{ cm}^2$ i z wzoru (b) dla punktu E mamy $\sigma_E = 1,15(P/A) = 1,15\sigma_0$.

6.3. Mimośrodowe ściskanie prętów smukłych

Rozważania art. 6.2 oparte były na założeniu, że przy zginaniu z udziałem sił wzdłużnych można stosować zasadę superpozycji. Jak udowodnimy poniżej, założenie to jest słuszne, jeśli odkształcenia wywołane tym obciążeniem są pomijalne, czyli że można stosować

regułę wymiarów początkowych (art. 1.3). Inna jest sytuacja przy mimośrodowym ściskaniu pręta smukłego (rys. 6.17), gdyż ugięcie w , aczkolwiek małe, może być rzędu mimośrodu e_z . W tym przypadku musimy rozwiązać zagadnienie uwzględniając ugięcie pręta. Dla od-



Rys. 6.17. Analiza mimośrodowego ściskania pręta smukłego

dzielonego myślowo odcinka BC z równania równowagi momentów otrzymujemy⁽¹⁾

$$M_y = P(e_z + w_B - w). \quad (a)$$

Jak widać, moment ten jest funkcją e_z i nie znanego na razie ugięcia $w(x)$, oraz nie znanego też $w_B = (w)_{x=l}$. Z drugiej strony wiemy, że w stanie równowagi, w którym przecięz pręt się znajduje, dla każdej współrzędnej x jest spełniona zależność (5.20)

$$w'' = M_y/EJ_y, \quad (b)$$

która po podstawieniu wyrażenia (a) przybiera postać

$$w'' + k_y^2 w = k_y^2 (e_z + w_B), \quad (6.11)$$

gdzie czynnik k_y (miano cm^{-1}) określony jest jako

$$k_y = \sqrt{\frac{P}{EJ_y}}. \quad (6.12)$$

Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie równania różniczkowego (6.11) jest

$$w = C_1 \sin k_y x + C_2 \cos k_y x + e_z + w_B \quad (c)$$

i zawiera stałe całkowania C_1 i C_2 oraz nie znaną wartość w_B . Wszystkie te wielkości wyznaczymy z trzech warunków brzegowych

$$w_{x=0} = 0, \quad (dw/dx)_{x=0} = 0, \quad (w)_{x=l} = w_B.$$

I tak z dwóch pierwszych wynika

$$C_2 = -(e_z + w_B), \quad C_1 = 0,$$

a z trzeciego po podstawieniu powyższych wartości

$$w_B = (e_z / \cos k_y l) - e_z. \quad (d)$$

⁽¹⁾ Ramię siły P względem punktu B jest $e_z \cos \vartheta_B$. Gdy ugięcia są małe, wówczas $\cos \vartheta_B$ różni się od jedności o małą wyższego rzędu i dlatego w równaniu (a) zamiast $e_z \cos \vartheta_B$ jest e_z .

Wstawiając wielkości C_1, C_2 i w_B do równania (c) mamy

$$w = \frac{e_z}{\cos k_y l} (1 - \cos k_y x) \quad (e)$$

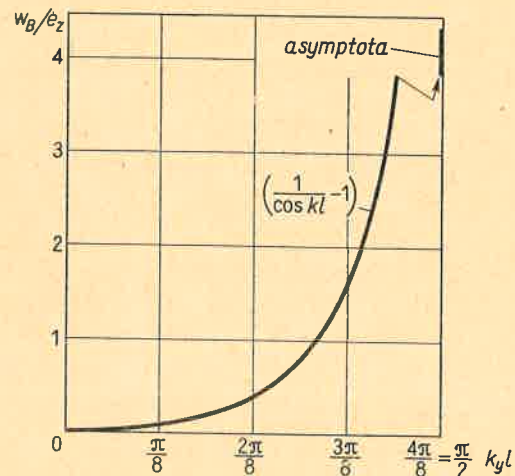
jako szukaną postać linii ugięcia. Wykorzystując wyniki (d) i (e) obliczamy z równania (a) moment gnący

$$M_y = Pe_z \cos k_y x / \cos k_y l, \quad (f)$$

osiągający ekstremum w utwierdzonym przekroju ($x = 0$)

$$(M_y)_{\max} = Pe_z / \cos k_y l. \quad (g)$$

Przeanalizujmy otrzymane rezultaty. Z równań (d) i (e) widać od razu, że ugięcie w zależy liniowo od mimośrodów e_z , a nieliniowo od siły P , ukrytej w argumentach⁽¹⁾ $k_y x$ i $k_y l$ funkcji cosinus. Z właściwości tej funkcji wynika, że ugięcie rośnie szybciej niż wzrost P . Fakt ten jest zrozumiały, gdyż wzrostowi siły towarzyszy wzrost rzędnych linii ugięcia. W rezultacie moment gnący jako iloczyn siły P przez odpowiednie ramię, a więc i krzywizna belki narastają szybciej niż sama siła. Całość zjawiska opisuje wykres (rys. 6.18). Odciętą jest tu $k_y l$, tj. wielkość związana z siłą P , a rzędną bezwymiarowa



Rys. 6.18. Bezwymiarowa strzałka ugięcia pręta z rys. 6.17

strzałką ugięcia, tj. w_B/e_z . Widać, że dla $k_y l \rightarrow \pi/2$ strzałka w_B staje się wielokrotnie większa od e_z . Szczególną wartość $P = P_{kr}$ odpowiadającą $k_y l = \pi/2$ nazywamy *siłą krytyczną* lub *eulerowską* i wyznaczamy ją z (6.12), a mianowicie

$$k_y l = l \sqrt{P/EJ_y} = \pi/2,$$

skąd

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_y}{4l^2}. \quad (6.13)$$

⁽¹⁾ Wartości argumentu $k_y l$ i $k_y x$ są w radianach, albowiem iloczyn k (miano cm^{-1}) i l lub x (miano cm) daje liczbę oderwaną.

Fizyczny sens P_{kr} można zinterpretować jako tę siłę P , przy której ścispany⁽¹⁾ (bez mimośrodu) pręt może mieć dwie różne postacie równowagi: pierwotną, tj. gdy oś pręta zostaje prosta, i nową, tj. o osi wygiętej. To zjawisko nosi nazwę *utruty stateczności* lub inaczej *wyboczenia pręta* i będzie później omówione.

W podobny sposób możemy określić ekstremalne naprężenie σ_e w niebezpiecznym przekroju A . Z wzoru (g) i (6.6) wynika

$$\sigma_e = |\sigma_{\min}| = (P/A) + (Pe_z/W_y \cos k_y l). \quad (h)$$

Jeśli $k_y l \rightarrow \pi/2$, tj. $P \rightarrow P_{kr}$, to nawet przy najmniejszym mimośrodku $e_z \neq 0$ naprężenie σ_e osiągnie granicę plastyczności materiału, co wywoła trwałe odkształcenia i uczyni konstrukcję niezdatną do użytku. Ponieważ w realnych warunkach mimośród zawsze istnieje, wynika stąd, że w przypadku pojedynczego pręta krytyczna siła jest jednocześnie niszcząca.

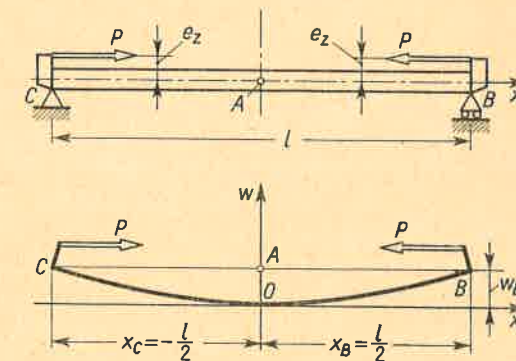
Na zakończenie analizy prześledzimy przypadek, gdy $P \ll P_{kr}$. Argumenty $k_y l$ i $k_y x$ są małe i wtedy możemy przyjąć

$$1 - \cos k_y x \approx (k_y x)^2/2 = Px^2/2EJ_y, \quad 1 - \cos k_y l \approx Pl^2/2EJ_y,$$

w rezultacie czego zamiast wzorów (d) i (e) otrzymamy

$$w \approx Pe_z x^2/2EJ_y, \quad w_B \approx Pe_z l^2/2EJ_y.$$

Powyższe wyniki są identyczne z przypadkiem wspornikowej belki (rys. 5.51c), gdy moment $M_B^* = Pe_z$. Oznacza to, że $M_y(x) = Pe_z = \text{const}$, a więc jest obliczony z pominięciem wpływu ugięcia lub, innymi słowy, przy założeniu słuszności zasady superpozycji. Podsumowując to powiemy, że przy jednoczesnym zginaniu i ścisaniu prętów można stosować superpozycję, jeśli siła wzdłużna jest znacznie mniejsza od krytycznej.



Rys. 6.19. Analiza pręta dwupodporowego ściskanego mimośrodowo

Otrzymane wyniki można wykorzystać w przypadku pręta podpartego przegubowo na końcach i ściskanego mimośrodowymi siłami P (rys. 6.19). Reakcje podpór są tu równe zeru, linia ugięcia symetryczna, a każda połówka OB i OC jest w takich warunkach jak pręt z rys. 6.17. Wynika stąd, że wszystkie poprzednie wyniki można stosować w tym

⁽¹⁾ Gdy $k_y l = \pi/2$ i $e_z = 0$, wówczas $w_B = 0/0$ staje się nieoznaczone. Ponieważ k_y i e_z są od siebie niezależne, zatem reguły de'Hospitala nie można tu stosować i w_B może mieć pewną wartość skończoną, choćby e_z było nieskończenie małą dowolnego rzędu.

drugim zagadnieniu, jeśli tylko zamiast l wstawić $l/2$, a początek układu x umieścić w środku O pręta odkształconego. W szczególności zamiast wzorów (d), (g) i (h) mamy odpowiednio

$$w_B = w_C = [e_z / \cos(k_y l/2)] - e_z, \quad (i)$$

$$(M_y)_{\max} = P e_z / \cos(k_y l/2), \quad (j)$$

$$\sigma_e = |\sigma_{\min}| = (P/A) + [P e_z / W_y \cos(k_y l/2)], \quad (k)$$

a w zamian wzoru (6.13) inną wartość siły krytycznej

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E J_y}{l^2}. \quad (6.14)$$

Podobnie można wykorzystać wykres (rys. 6.18) wstawiając jedynie zamiast $k_y l$ argument $k_y l/2$.

W powyższych rozważaniach milcząco założono, że zgięcie pręta zachodzi w płaszczyźnie działania momentu zginającego, a więc że jest ono proste, a oś y jest główną centralną osią przekroju. Jeśli siła lub siły ściskające są w dowolnej płaszczyźnie (rys. 6.11), to moment Pe rozkładamy na składowe Pe_z i Pe_y , działające w płaszczyznach zawierających osie główne. Analizę zginania w każdej z tych dwóch płaszczyzn prowadzimy oddzielnie dochodząc w wyniku do dwóch niezależnych równań typu (6.11), których rozwiązanie i dyskusja jest podobna do opisanej poprzednio. Postępowanie takie jest dozwolone (błąd rzędu 1°), gdy przekrój pręta jest zwarty lub cienkościenny rurowy. Dla prętów cienkościennych otwartych, jak ceówka, zagadnienie jest bardziej złożone.

Zadania

1. Pręt (rys. 6.17) o średnicy $d = 2$ cm i długości $l = 50$ cm obciążono siłą ściskającą $P = 5$ kN. Jaki może być mimośród e_z , aby naprężenie $|\sigma_c|$ nie przekroczyło $\sigma_0 = 100$ MPa? $E = 2 \cdot 10^5$ MPa

Odp. $J_y = 0,785$ cm⁴, $EJ_y = 1,57 \cdot 10^3$ N m², $k_y = \sqrt{P/EJ_y} = 1,782$ m⁻¹, $k_y l = 0,891$ rad = $51,1^\circ$, $\cos k_y l = 0,629$ i z wzoru (h)

$$e_z = W_y \cos k_y l [\sigma_0 - (P/A)]/P = 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 8,3 \text{ mm}.$$

2. Jaka jest rzeczywista strzałka ugięcia w pręcie z zadania 1, a jaką otrzymalibyśmy zaniedbując wpływ ugięcia na momenty gnące?

Odp. Z wzoru (d) $w_B = 8,3[(1/0,629) - 1] = 4,9$ mm, natomiast wartość przybliżona wynosi $w_B \approx e_z(k_y l)^2/2 \approx 3,3$ mm, czyli błąd jest 33%.

3. Pręt (rys. 6.19) o pełnym kwadratowym przekroju $a \times a$ zastąpiono kwadratową rurą o tej samej długości z tego samego materiału i otworze $a \times a$. Jaka ma być grubość δ ścianki rury, aby siła P_{kr} została ta sama? Jaki jest stosunek mas obydwóch prętów?

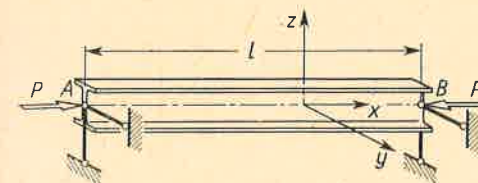
Odp. J_y ma zostać to samo, skąd $(a + 2\delta)^4 - a^4 = a^4$ i $\delta = 0,094a$. Stosunek mas $Q_2/Q_1 = [(a + 2\delta)^2 - a^2]/a^2 = \sqrt{2} - 1 = 0,414$. Dla tej samej wartości P_{kr} rura jest około 2,4 razy lżejsza. W tych zatem przypadkach, gdy konstrukcja ma być lekka, a jednocześnie wartość P_{kr} duża, celowe jest stosowanie przekrojów rurowych. Fakt ten obserwujemy w przyrodzie, jak w słomie, bambusie itp.

4. W pręcie (rys. 6.17) powiększono dwukrotnie *wszystkie* wymiary. Jak zmieni się wartość siły P_{kr} ? Odp. Wzrośnie czterokrotnie.

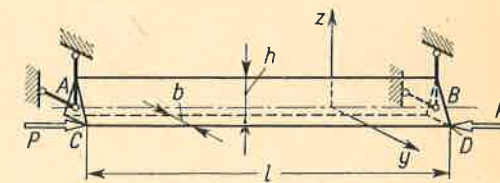
5. Stalowa dwuteówka ($J_y = 117$ cm⁴, $J_z = 12,2$ cm⁴, $A = 10,6$ cm², $E = 2 \cdot 10^5$ MPa) o długości

ci $l = 2,5$ m ściskana jest siłami P (rys. 6.20). Wyznaczyć najmniejszą wartość siły krytycznej $(P_{kr})_{\min}$ i odpowiadającą jej wartość naprężeń ściskających.

Odp. $(P_{kr})_{\min}$ odpowiada wygięciu w płaszczyźnie xy i $(P_{kr})_{\min} = \pi^2 E J_z / l^2 \approx 39$ kN oraz $|\sigma| = (P_{kr})_{\min} / A = 37,4$ MPa.



Rys. 6.20.



Rys. 6.21.

6. Duralowy ($E = 7 \cdot 10^4$ MPa) pręt o przekroju równoramiennego trójkąta ($b = 6$ cm, $h = 12$ cm) i długości $l = 2$ m obciążono w punktach C i D mimośrodowymi siłami $P = 40$ kN (rys. 6.21). Wyznaczyć ekstremalne naprężenia ściskające i rozciągające.

Odp. $J_y = bh^3/36 = 288$ cm⁴, $J_z = b^3h/48 = 54$ cm⁴, $k_y l/2 = 0,444$ rad, $k_z l/2 = (l/2) \sqrt{P/EJ_z} = 1,028$ rad. Momenty gnące w niebezpiecznym przekroju (w środku rozpiętości) są według wzoru:

$$(M_y)_{\max} = -P e_z / \cos(k_y l/2) = -Ph/3 \cos(k_y l/2) = -1810 \text{ N m},$$

$$(M_z)_{\max} = P e_y / \cos(k_z l/2) = Pb/2 \cos(k_z l/2) = 2330 \text{ N m}.$$

Ekstremalne naprężenia ściskające σ'' występują we włóknie CD

$$\sigma'' = -(P/A) - [(M_y)_{\max} / J_y] (-h/3) - [(M_z)_{\max} / J_z] (b/2) = -165,4 \text{ MPa},$$

a maksymalne rozciągające σ' we włóknie symetrycznie położonym

$$\sigma' = -(P/A) - [(M_y)_{\max} / J_y] (-h/3) - [(M_z)_{\max} / J_z] (b/2) = 93,0 \text{ MPa}.$$

6.4. Naprężenia krytyczne i smukłość pręta

Pojęcie siły krytycznej P_{kr} , jako obciążenia niszczącego pręt ściskany, stanowi punkt wyjścia do oceny bezpieczeństwa tego pręta. Zagadnienie to prześledzimy na przykładzie pręta podpartego przegubowo na końcach (rys. 6.19), dla którego

$$P_{kr} = \pi^2 E J_y / l^2. \quad (a)$$

Bezwzględną wartość naprężenia normalnego odpowiadającego P_{kr} , gdy mimośród $e = 0$, nazywamy *naprężeniem krytycznym* σ_{kr} , tj.

$$\sigma_{kr} = P_{kr} / A, \quad (6.15)$$

Wstawiając do (6.15) wyrażenie (a) i wykorzystując pojęcie promienia bezwładności i_y (wzór 6.9) otrzymujemy

$$\sigma_{kr} = \pi^2 E J_y / A l^2 = \pi^2 E i_y^2 / l^2 = \pi^2 E / (l/i_y)^2. \quad (b)$$

Występujący tu bezwymiarowy stosunek l/i_y , zależny tylko od geometrii pręta, nazywamy *smukłością* pręta i oznaczamy

$$\lambda = l/i_y. \quad (6.16a)$$

Wprowadzając to oznaczenie do (b) mamy ostatecznie

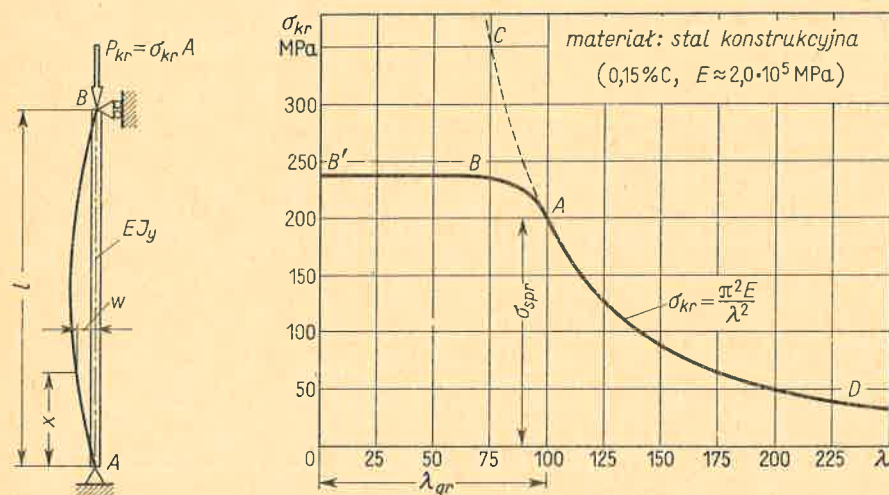
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (6.17)$$

Podane zależności odpowiadają utracie stateczności lub inaczej wyoboczeniu, gdy główna centralna oś y przekroju jest obojętna. Podobnie możemy zbadać przypadek, gdy osią obojętną przy wyoboczeniu jest oś z . W wyniku otrzymamy ten sam wzór (6.17), z tym tylko, że smukłość pręta określona jest teraz jako

$$\lambda = l/i_z. \quad (6.16b)$$

Jak widzimy, do jednoznacznego określenia smukłości pręta konieczne jest dodatkowo podanie płaszczyzny, w której zachodzi wyoboczenie. Bez tej informacji pojęcie smukłości jest wieloznaczne.

Zależność (6.17) przedstawiamy zazwyczaj w postaci wykresu $\sigma_{kr} = f(\lambda)$. Otrzymana w wyniku (rys. 6.22) krzywa CAD, tzw. *hiperbola Eulera*, wykazuje jasno, że σ_{kr} dla prętów



Rys. 6.22. Analiza naprężenia krytycznego w funkcji smukłości

o dużej smukłości może być znacznie mniejsze od granicy sprężystości σ_{spr} materiału pręta. Uświadamiając sobie, że wartości σ_{kr} towarzyszy zniszczenie pręta, wnioskujemy, że zjawisko wyoboczenia jest dodatkowym czynnikiem limitującym bezpieczeństwo konstrukcji. Biorąc przykładowo stalowy pręt o smukłości $\lambda = 200$, odczytujemy z wykresu $\sigma_{kr} \approx 50$ MPa niezależnie od tego, czy stal⁽¹⁾ jest pospolita ($\sigma_{spr} \approx 220$ MPa), czy szlachetna stopowa i obrobiona cieplnie ($\sigma_{spr} \approx 1000$ MPa). W obydwóch przypadkach wykorzystanie materiału jest niedostateczne, stanowi bowiem odpowiednio 23% i 5% tego, co można by osiągnąć z uwagi na właściwości materiału. Sytuację można poprawić tylko przez zmniejszenie smukłości λ , co przy ustalonej długości l pręta sprowadza się do

⁽¹⁾ Jest faktem, że niewielkie domieszki stopowe, obróbka cieplna itp. nie wpływają w sposób istotny na wartość E .

zwiększenia J_y (lub J_z) i zwiększenia i_y (lub i_z). Efekt ten można osiągnąć bez zwiększania pola przekroju, a więc ciężaru pręta, przez rozłożenie materiału daleko od osi (zadanie 3 art. 6.3).

Gdy smukłość $\lambda \rightarrow 0$, wówczas, jak widać z wykresu, naprężenie $\sigma_{kr} \rightarrow \infty$. W rzeczywistości tak nie jest. Stosowalność hiperboli Eulera jest ograniczona założeniem, że materiał pręta podlega prawu Hooke'a. Określając bowiem P_{kr} korzystaliśmy z równania linii ugięcia (5.20), u którego podstaw leży właśnie to założenie. Z tego powodu krzywa CAD daje prawidłowe wyniki tylko wtedy, gdy $\sigma_{kr} < \sigma_{prop}$. Podstawiając we wzorze (6.17) $\sigma_{kr} = \sigma_{prop}$ otrzymujemy tę *graniczną smukłość* λ_{gr}

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{E/\sigma_{prop}}, \quad (6.18)$$

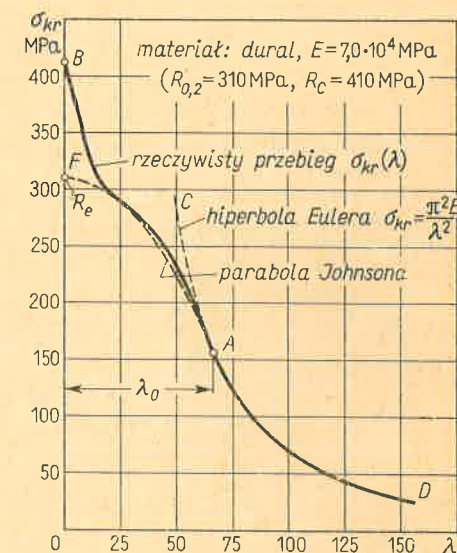
poniżej której *nie wolno* używać wzoru (6.17). Tak na przykład dla stali o $\sigma_{prop} \approx 200$ MPa, mamy $\lambda_{gr} \approx 100$ i stosowalność wzoru (6.17) ograniczoną do części AD hiperboli Eulera (rys. 6.22).

Zjawisko wyoboczenia zachodzi także, gdy smukłość $\lambda < \lambda_{gr}$, wtedy jednak występują odkształcenia trwałe. Przy takim wyoboczeniu *nie sprężystym*, tj. gdy $0 < \lambda < \lambda_{gr}$, zasadniczą cechą jest to, że *postać wykresu* $\sigma_{kr}(\lambda)$ *zależy od postaci wykresu ściskania* $\sigma(\epsilon)$ *analogicznego do wykresu rozciągania* (rys. 1.16). I tak jeśli materiał pręta ma wyraźną granicę plastyczności R_e (rys. 1.16a), to wykres $\sigma_{kr}(\lambda)$ ma przebieg według linii ABB' (rys. 6.22). Rzędna poziomego odcinka BB' jest $\sigma_{kr} = R_e$, a odcinek AB odpowiada złagodzonemu (nieostremu) przejściu na wykresie $\sigma = f(\epsilon)$ między⁽¹⁾ σ_{prop} a R_e . Nieco inny jest przebieg σ_{kr} , gdy materiał nie ma wyraźnej granicy plastyczności (rys. 1.16b). Dla materiałów tych (stale stopowe, wysokowęglowe lub stopy lekkie) rzeczywisty wykres σ_{kr} (rys. 6.23) wykazuje brak zaakcentowanego poprzednio poziomego odcinka BB' . Ponadto dla bardzo małych smukłości wartość σ_{kr} bliska jest doraźnej wytrzymałości R_c na ściskanie, a nie R_e , jak poprzednio.

W praktyce nie zawsze dysponujemy wspomnianymi wykresami i wtedy posługujemy się zależnościami przybliżonymi. Jedną z nich stosowaną dla materiałów bez wyraźnej granicy plastyczności jest tzw. *parabola Johnsona* (rys. 6.23). Jej wierzchołek F ma odciętą $\lambda = 0$, rzędną $(\sigma_{kr})_{\lambda=0} = R_{0,2}$, tj. umownej granicy plastyczności. Ponadto parabola ta jest styczna do hiperboli Eulera $\sigma_{kr} = \pi^2 E/\lambda^2$, a punkt styczności A ma współrzędne

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{2E/R_{0,2}}, \quad (\sigma_{kr})_A = R_{0,2}/2. \quad (6.19)$$

⁽¹⁾ Patrz rys. 1.16a, na którym σ_{prop} odpowiada punktowi A , a R_e odpowiada punktowi B .



Rys. 6.23. Typowy wykres $\sigma_{kr}(\lambda)$ dla materiału bez wyraźnej granicy plastyczności

Samo równanie⁽¹⁾ paraboli FA jest

$$\sigma_{kr} = R_{0,2} [1 - (\lambda^2 / 2\lambda_0^2)]. \quad (6.20)$$

Jak widać z wykresu (rys. 6.23), poważniejsze różnice między rzeczywistym przebiegiem $\sigma_{kr}(\lambda)$ a rzędnymi paraboli (6.20) występują dla prętów bardzo krępych ($\lambda < 20$). W przedziale średnich smukłości ($20 < \lambda < \lambda_0$), mającym największe znaczenie techniczne, zgodność ta jest bardzo dobra. To właśnie powoduje, że wzorem (6.20) posługujemy się często w praktyce. W literaturze, zwłaszcza dotyczącej części maszyn, stosuje się również inne formuły, jak wzór Tetmajera, zastępujący rzeczywisty przebieg $\sigma_{kr}(\lambda)$ zależnością liniową

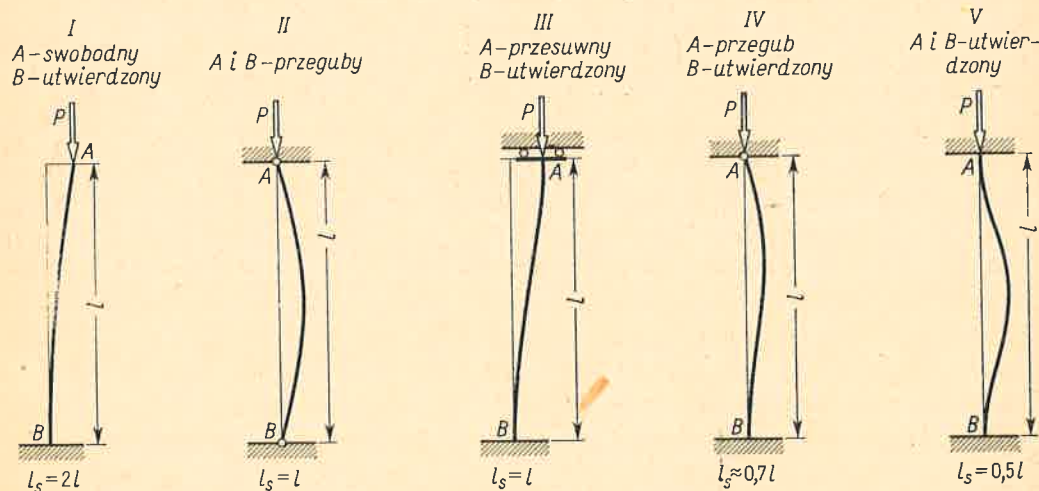
$$\sigma_{kr} = B_1 + B_2 \lambda,$$

w której stałe B_1 i B_2 są każdorazowo ustalane w zależności od gatunku materiału.

Omówiony przypadek ściskania pręta zakończonego przegubami (rys. 6.19) nazywa się *podstawowym*, gdyż występuje najczęściej w praktyce. Dla innych przypadków, jak podany na rys. 6.17, można przeprowadzić podobną analizę. Jest to jednak zbędne, albowiem dla pręta tego siła P_{kr} (wzór 6.13) da się przedstawić jako

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_y}{4l^2} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ_y}{l_s^2},$$

gdzie $l_s = 2l$. Pręt ten zachowuje się więc jak pręt w przypadku podstawowym o długości l_s , tzw. *długości swobodnej*, i wszystkie wyniki analizy przypadku podstawowego (w zakresie



Rys. 6.24. Określenie l_s w typowych przypadkach podparcia pręta

sprężystym i niesprężystym) mogą być od razu wykorzystane. Podobnie postępujemy i w innych przypadkach podparcia pręta (rys. 6.24), wprowadzając za każdym razem odpowiednią długość swobodną l_s , której określenie szczegółowo omówione jest w rozdz. 15.

⁽¹⁾ Biorąc ogólnie, równanie (6.20) ma postać: $\sigma_{kr} = B_1 - B_2 \lambda^2$, ze stałymi B_1 i B_2 . Z warunku $(\sigma_{kr})_{\lambda=0} = R_{0,2}$ mamy $B_1 = R_{0,2}$. W punkcie A zachodzi równość rzędnych oraz równość pochodnych, czyli $B_1 - B_2 \lambda_0^2 = \pi^2 E / \lambda_0^2$ oraz $-2B_2 \lambda_0 = -2\pi^2 E / \lambda_0^3$, skąd otrzymujemy B_2 i λ_0 , a następnie zależność (6.20).

Zadania

1. Zakończona przegubami ściskana rura ze stali o 0,15% C ma wymiary $d_z = 8$ cm, $d_w = 7$ cm i długość $l = 6$ m. Ilorotnie zwiększy się naprężenie krytyczne, jeśli utwierdzimy: a) jeden koniec rury, b) obydwa końce?

Od p. Pierwotnie $\lambda = 228$, po modyfikacji (a) $\lambda' \approx 0,7\lambda = 160$, po modyfikacji (b) $\lambda'' = 0,5\lambda = 114$. Wzór (6.17) można więc stosować. W wyniku modyfikacja (a) daje około 2-krotny, a modyfikacja (b) – 4-krotny wzrost σ_{kr} .

2. Jak zmieniają się wyniki zadania 1, gdy długość $l = 3$ m?

Od p. Pierwotne $\lambda = 114$, po modyfikacji (a) $\lambda' = 80$, po (b) $\lambda'' = 52$. Po modyfikacjach wyobczenie jest niesprężyste. Z rysunku 6.22 odczytujemy: $(\sigma_{kr})_{\lambda=114} = 154$ MPa, $(\sigma_{kr})_{\lambda=80} = 232$ MPa, $(\sigma_{kr})_{\lambda=52} = 237$ MPa. Modyfikacja (a) daje 1,5-krotny, a (b) 1,54-krotny wzrost σ_{kr} , a więc znacznie mniej niż poprzednio.

3. Wyznaczyć σ_{kr} dla zakończonego przegubami duralowego ($E = 7,0 \cdot 10^4$ MPa, $R_{0,2} = 280$ MPa, $\sigma_{prop} \approx 180$ MPa) pręta o smukłości $\lambda = 50$.

Od p. $\lambda < \lambda_{gr}$, z (6.19) jest $\lambda_0 \approx 70$; z (6.20) jest $\sigma_{kr} \approx 210$ MPa.

4. W poprzednim zadaniu $\lambda_{gr} = 62$, a $\lambda_0 = 70$. Gdy $\lambda_{gr} < \lambda < \lambda_0$, wówczas z wzorów (6.17) i (6.20) otrzymujemy różne wyniki. Któremu z nich wierzyć?

Od p. Prawidłowy jest wzór (6.17), bo (6.20) jest tylko przybliżeniem. Różnice są jednak małe i bez praktycznego znaczenia.

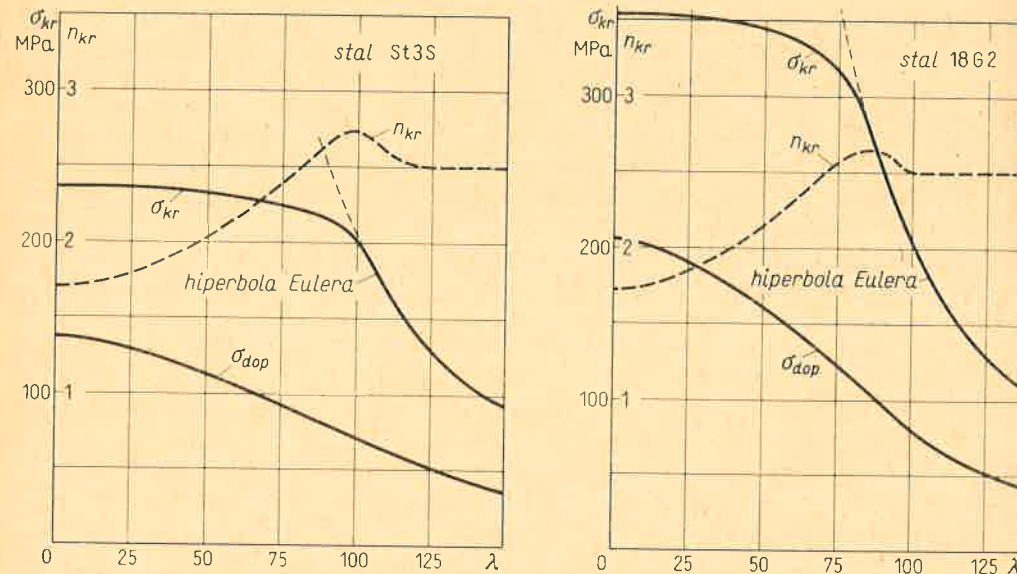
6.5. Wymiarowanie prętów ściskanych

Omówione w art. 6.1 ÷ 6.4 przypadki należą do tych zagadnień wytrzymałości złożonej, w których kryterium bezpieczeństwa jest identyczne, jak przy prostym rozciąganiu lub ściskaniu i sprowadza się do porównania ekstremalnego naprężenia normalnego z wartością dopuszczalną. Ten prosty schemat oceny bezpieczeństwa komplikuje jednak zjawisko wyboczenia. Zjawisko to, zademonstrowane tu jako graniczny przypadek mimośrodowego ściskania, stanowi pod względem poznawczym wyłom, jest bowiem przypadkiem, gdy nie obowiązuje reguła wymiarów początkowych. Wartość siły krytycznej stanowiąc wielkość charakterystyczną danego ustroju steruje jednocześnie metodą analizy. Jeśli mianowicie obciążenie wzdłużne jest małe w stosunku do siły krytycznej, np. 10 ÷ 15%, to z techniczną dokładnością stosujemy zasadę superpozycji jak w art. 6.2. Jeśli ten stosunek jest większy, to w analizie należy uwzględnić odkształcenia pręta, jak to zrobiono w art. 6.3.

W odróżnieniu od poprzednich zagadnień ocena bezpieczeństwa prętów ściskanych różni się tym, że pewna istotna grupa obciążeń, a mianowicie momenty gnące wywołane nieuniknionymi błędami wykonania, nie jest określona jednoznacznie, lecz jest zmienną losową. Innymi słowy zagadnienia z rys. 6.19 i 6.22 różnią się tym, że w pierwszym z nich wielkość e_z jest z pewną dokładnością zdeterminowana, w drugim natomiast nieokreślona. W tej sytuacji jest naturalne, że bezpieczeństwo ściskanego pręta oceniamy konfrontując tę część obciążenia, którą znamy, tj. siłę ściskającą, z tą siłą P_{kr} , która na pewno wywoła zniszczenie pręta.

W zagadnieniach *kontroli* punktem wyjścia jest wykres $\sigma_{kr}(\lambda)$ dla danego materiału. Mając ten wykres, jak na rys. 6.22 lub 6.23, i znając smukłość pręta odpowiadającą najmniejszemu promieniowi bezwładności możemy wyznaczyć σ_{kr} , a więc i siłę niszczącą

$P_{kr} = \sigma_{kr} A$. Z kolei można określić siłę dopuszczalną P_{dop} dzieląc P_{kr} przez wymagany współczynnik bezpieczeństwa n_{kr} . Przy doborze tego współczynnika należy uwzględnić, że ze wzrostem smukłości pręta rośnie wpływ niedokładności wykonania⁽¹⁾. Z tego powodu racjonalne jest przyjąć zmienne n_{kr} , a mianowicie rosnące dla prętów bardziej smukłych. Przykładem tego są wykresy (rys. 6.25) dla dwóch stali (St 3S i 18 G2) często



Rys. 6.25. Typowe wykresy σ_{kr} , n_{kr} , σ_{dop} dla stali konstrukcyjnych
Stal St 3 S (0,22% C, 0,65% Mn, 0,07 Si, $R_e = 235$ MPa, $R_m = 370 \div 460$ MPa).
Stal 18 G 2 (0,18% C, 1,3% Mn, $R_e = 350$ MPa, $R_m = 510 \div 630$ MPa).

stosowanych w praktyce. Jak widzimy, współczynnik n_{kr} rośnie stopniowo od wartości 1,71 dla $\lambda = 0$ do wartości 2,5 stałej dla $\lambda > \lambda_{gr}$. Określone stąd wartości naprężeń dopuszczalnych σ_{dop} można wykorzystać w zagadnieniach kontroli, tj. gdy dana jest siła P i wymiary pręta, a mamy stwierdzić czy $\sigma = P/A$ są mniejsze lub równe σ_{dop} .

Drugi rodzaj zagadnień, tj. *kształtowania* (doboru wymiarów), prętów ściskanych, rozwiązujemy zazwyczaj metodą kolejnych prób. I tak mając dany rodzaj materiału, a więc i wykres $\sigma_{kr}(\lambda)$, oraz wartość siły P dobieramy wstępnie wymiary przekroju, skąd określamy kolejno A oraz i_y lub i_z , smukłość λ , wartość σ_{kr} i $P_{kr} = \sigma_{kr} A$ oraz wartość współczynnika $n_{kr} = P_{kr}/P$. Jeśli ta ostatnia jest równa lub niewiele większa od wymaganej, to uważamy, że dobór jest prawidłowy. W przypadku przeciwnym dobór należy powtórzyć.

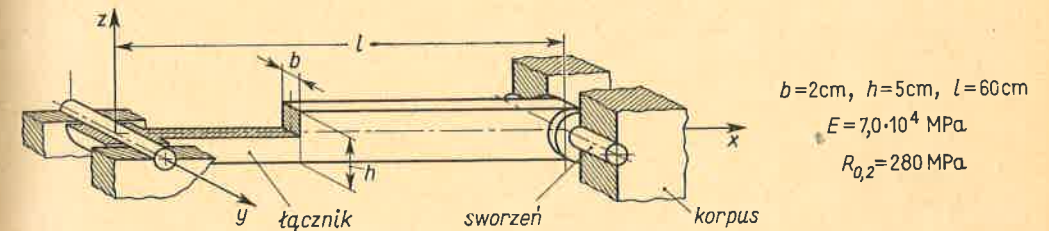
Na zakończenie warto przypomnieć, że rola P_{kr} jako siły niszczącej odnosi się do pojedynczego pręta, którego obciążenie nie zależy od współpracy innych elementów. Tak

⁽¹⁾ Weźmy dwa pręty (rys. 6.19) o jednakowym przekroju i długościach l i $2l$. Mimośród e_z jako zmienna losowa jest ten sam, zależy bowiem od tolerancji wykonania, ta zaś zależy od poprzecznych wymiarów pręta, np. dokładność umieszczenia okuć. Przy tej samej sile P naprężenia będą większe w pręcie smuklejszym (wzór h art. 6.3), gdyż $\cos 2k_y l < \cos k_y l$.

jest na przykład w kratownicach statycznie wyznaczalnych (rys. 2.9), w których siły wzdłużne zależą tylko od konfiguracji i obciążenia węzłów. W innych sytuacjach, gdy obciążenie pręta zależy od odkształceń, wyoboczenie jego nie musi być równoznaczne ze zniszczeniem ustroju.

Zadania

- Dwuteówka (rys. 6.20) ze stali St 3S ma długość $l = 1$ m. Biorąc $J_y = 117$ cm⁴, $J_z = 12,2$ cm⁴, $A = 10$ cm² oraz wykres $\sigma_{dop}(\lambda)$ z rys. 6.25 orzec, czy może ona przenosić siłę $P = 70$ kN?
Odp. Tak, bo $\lambda = l/i_z = 93$ i $\sigma_{dop} = 79$ MPa, $P_{dop} = 84$ kN $> P$.
- Orzec, czy duralowy łącznik o prostokątnym przekroju (rys. 6.26) może być obciążony siłą ściskającą $P = 80$ kN, jeśli wymagany współczynnik bezpieczeństwa $n_{kr} = 2,5$?



Rys. 6.26.

Odp. Tak. Decyduje możliwość wyoboczenia w płaszczyźnie xy , gdyż $i_z = b/\sqrt{12} = 0,58$ cm, $i_y = h/\sqrt{12} = 1,44$ cm, $i_x = l/i_z = 103,4$ cm, $i_y = l/i_y = 41,7$ cm. Postępując się parabolą Johnsona (zadanie 3 art. 6.4) dla $\lambda = 41,7$ mamy $\sigma_{kr} = 243$ MPa, $\sigma_{dop} = 97$ MPa i $P_{dop} = 97$ kN $> P = 80$ kN, c.b.d.d.

3. Dobrac średnicę d stalowego pręta utwierdzonego na jednym końcu, a przegubowo podpartego na drugim, aby przy długości $l = 2$ m i sile ściskającej $P = 75$ kN miał on współczynnik $n_{kr} = 5$. Dane: $E = 2,03 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 280$ MPa.

Odp. Zakładamy, że smukłość pręta $\lambda > \lambda_{gr} \approx 85$. Biorąc z rys. 6.24 $i_x \approx 0,7l = 1,4$ m, mamy $J_y = n_{kr} P l^2 / \pi^2 E = 29,4$ cm⁴, skąd $d = \sqrt[4]{64 J_y / \pi} = 4,95$ cm, a $i_y = d/4 \approx 1,24$ cm. Smukłość $\lambda = l/i_y = 112 > \lambda_{gr}$, a więc założenie początkowe jest prawidłowe i $d \approx 5$ cm.

4. Zakończona przegubami kwadratowa rura ze stali St 3S o grubości ścianki $\delta = 5$ mm i długości $l = 5$ m ma przenosić siłę $P = 400$ kN. Biorąc $\sigma_{dop}(\lambda)$ z rys. 6.25, wyznaczyć wymiar zewnętrzny a przekroju rury.

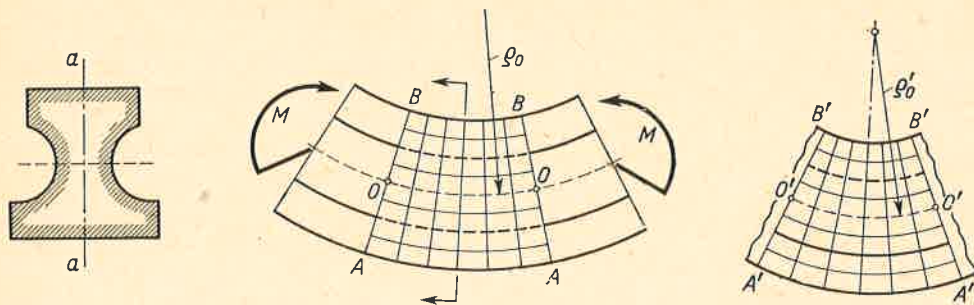
Rozwiązanie. Ponieważ $i_y = i_z = \sqrt{[a^2 + (a-2\delta)^2]/12}$, zatem $a = \delta + \sqrt{6i_y^2 - \delta^2}$. Aby określić przedział, w którym znajduje się szukane λ , weźmy $\lambda = \lambda_{gr} \approx 100$, wtedy $i_y = l/\lambda = 5$ cm i $a = 12,7$ cm. Obliczając $A = a^2 - (a-2\delta)^2 = 24,4$ cm² i $\sigma = P/A \approx 164$ MPa widzimy z rys. 6.25, że $\sigma > (\sigma_{dop})_{\lambda=100}$, a różnica $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_{dop} = 74$ MPa. Wynika stąd, że szukane λ jest w przedziale smukłości (0,100). Weźmy wartość pośrednią $\lambda = 50$, dla której obliczone jak poprzednio $i_y = 10$ cm, $a \approx 25,0$ cm, $A = 49$ cm², $\sigma = 81,5$ MPa, $(\sigma_{dop})_{\lambda=50} = 113$ MPa, a różnica $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_{dop} = -32,5$ MPa. Z liniowej interpolacji $\Delta\sigma$ między $\lambda = 100$ i $\lambda = 50$ mamy dla $\Delta\sigma = 0$ w pierwszym przybliżeniu $\lambda = 65$,

⁽¹⁾ Umocowanie sworzni w korpusie wyklucza obrót końców łącznika, i schemat odkształceń jest według wariantu V (rys. 6.24).

dla której analogicznie określamy $a = 19,4$ cm, $\sigma = 106$ MPa i $\sigma - \sigma_{\text{dop}} = 4$ MPa. Powtórna interpolacja liniowa między $\lambda = 50$ i $\lambda = 65$ daje nową wartość $\lambda = 63$, dla której z techniczną dokładnością mamy $\sigma \approx \sigma_{\text{dop}}$ i $a = 19,9$ cm jako ostateczną odpowiedź.

6.6. Naprężenia przy zginaniu prętów płasko zakrzywionych

Metody przedstawione w art. 5.6 możemy uogólnić dla zbadania rozkładu naprężeń przy czystym zginaniu pręta płasko zakrzywionego (rys. 6.27). Ograniczymy się tu do przypadku pręta o przekroju zwartym i symetrycznym względem płaszczyzny $a-a$ działania momentów M . Przy takim ukształtowaniu i obciążeniu pręt odkształca się symetrycznie



Rys. 6.27. Obraz odkształceń przy czystym zginaniu pręta zakrzywionego

względem płaszczyzny $a-a$. Niektóre włókna, jak BB , ulegają skróceniu, niektóre, jak AA , wydłużeniu. Leżąca gdzieś między nimi warstwa obojętna OO nie doznaje żadnego wydłużenia, jednakże jej pierwotny promień krzywizny ϱ_0 ulega zmianie na ϱ'_0 . Promienie ϱ_0 i ϱ'_0 mogą być przy tym różne w różnych punktach pręta i tylko gdy pręt jest łukiem koła, wówczas ϱ_0 i ϱ'_0 są stałe.

Podobnie jak w belkach prostych, tak i tu ustalimy najpierw zależności dla wydłużeń względnych i naprężeń w poszczególnych włóknach. Rozumowanie oprzemy na następujących założeniach upraszczających⁽¹⁾:

a) tzw. hipotezie płaskich przekrojów, głoszącej, że przekroje, jak AOB , płaskie i prostopadłe do osi pręta przed odkształceniem zostają, jak $A'O'B'$, płaskie i prostopadłe do osi odkształconej po zgięciu;

b) założeniu, że odległości włókien w kierunku promieniowym nie ulegają przy odkształceniu zmianie;

c) założeniu, że ewentualne naciski w kierunku poprzecznym do włókien są pomijalne.

Rozpatrzmy teraz elementarny plasterzek pręta (rys. 6.28) przyjmując na razie, że położenia warstwy obojętnej przed i po odkształceniu są znane, przy czym $\widehat{OO} = \widehat{O'O'} =$

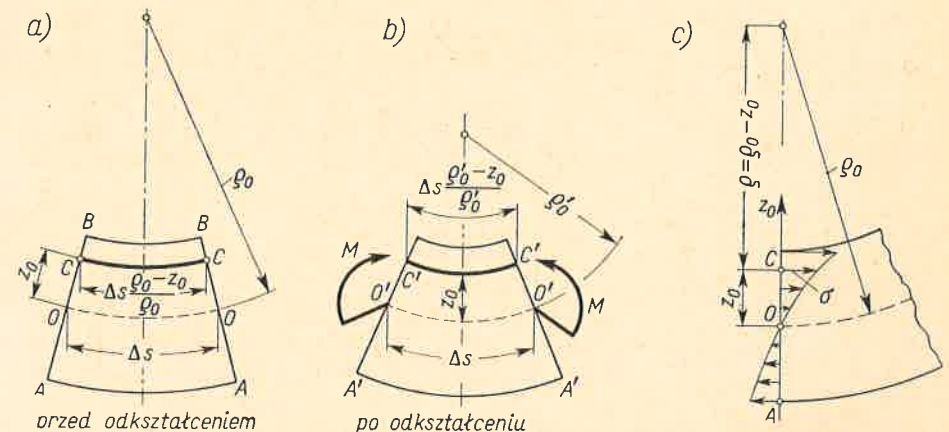
⁽¹⁾ Zwraca się uwagę, że założenia b) i c) są słuszne dla prętów o przekroju zwartym. Dla prętów o przekrojach cienkościennych nie wolno ich stosować.

$= \Delta s$. Z założeń a) i b) wynika, że długości pewnego włókna CC przed i po odkształceniu są

$$\widehat{CC} = \Delta s \left(\frac{\varrho_0 - z_0}{\varrho_0} \right), \quad \widehat{C'C'} = \Delta s \left(\frac{\varrho'_0 - z_0}{\varrho'_0} \right),$$

gdzie z_0 — odległość włókna od warstwy obojętnej, dodatnia w kierunku do środka krzywizny. Względne wydłużenie ε tego włókna jest

$$\varepsilon = \frac{\widehat{C'C'} - \widehat{CC}}{\widehat{CC}} = - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho'_0} - 1 \right) \frac{z_0}{\varrho_0 - z_0}. \quad (a)$$



Rys. 6.28. Określenie względnych odkształceń i rozkładu σ

Uwzględniając na koniec założenie c), możemy powiedzieć, że każde włókno pracuje jak elementarny pręt na ściskanie lub rozciąganie, a wartość naprężenia σ jest

$$\sigma = E\varepsilon = -E \left(\frac{\varrho_0}{\varrho'_0} - 1 \right) \frac{z_0}{\varrho_0 - z_0}. \quad (b)$$

Zależności (a) i (b) dają poszukiwaną w tym etapie odpowiedź. Gdy pręt jest pierwotnie prosty ($\varrho_0 = \infty$), wówczas wzory te przechodzą we wzory (5.7) i (5.8) i w tym sensie stanowią ich uogólnienie. Gdy promień ϱ_0 ma wartość skończoną, wówczas rozkład $\sigma(z_0)$ nie jest liniowy, jak poprzednio, lecz hiperboliczny (rys. 6.28c). Gdy $\varrho_0 > \varrho'_0$ i $z_0 > 0$, naprężenia są ścisające i mają większe bezwzględne wartości niż w analogicznych włóknach na zewnątrz warstwy obojętnej, tj. gdy $z_0 < 0$.

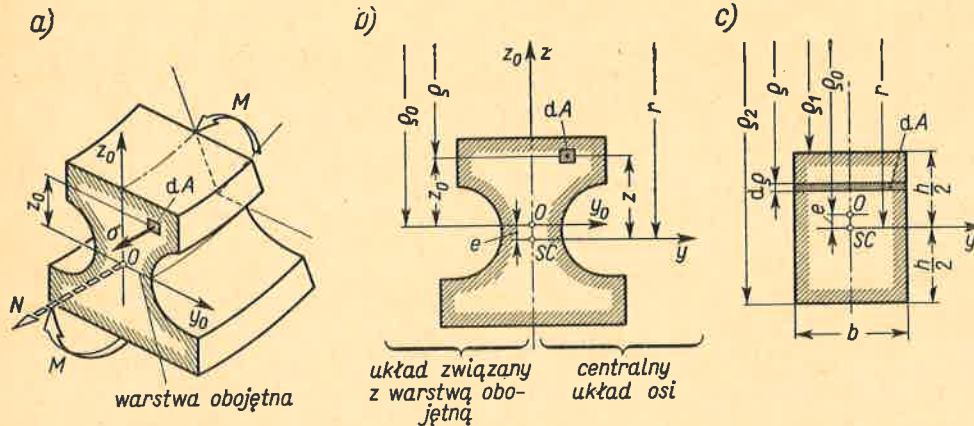
Aby określić nie znane jeszcze wielkości ϱ_0 i ϱ'_0 , zauważmy, że przy czystym zginaniu odpowiadająca znalezionej rozkładowi $\sigma(z_0)$ wypadkowa siła wzdłużna $N = 0$, a wypadkowy moment $M_y = M$, tj. momentowi gnącemu. Biorąc dodatnie zwroty N i M_y , jak na rys. 6.29, mamy więc

$$N = \int_A \sigma dA = -E \left(\frac{\varrho_0}{\varrho'_0} - 1 \right) \int_A \frac{z_0 dA}{\varrho_0 - z_0} = 0, \quad (c)$$

$$M_y = - \int_A \sigma dA z_0 = +E \left(\frac{\rho_0}{\rho'_0} - 1 \right) \int_A \frac{z_0^2 dA}{\rho_0 - z_0} = M, \quad (d)$$

gdzie symbol \int_A oznacza sumowanie elementarnych sił σdA bądź elementarnych momentów $\sigma dA z_0$ po całym polu A przekroju. Ponieważ czynnik stojący przed całką, tj. $E[(\rho_0/\rho'_0) - 1]$, nie jest równy zeru, zatem z równania (c) otrzymujemy zależność

$$\int_A \frac{z_0 dA}{\rho_0 - z_0} = 0, \quad (e)$$



Rys. 6.29. Ustalenie zależności między momentem a naprężeniami σ

z której możemy wyznaczyć ρ_0 , a tym samym określić położenie warstwy obojętnej. Uwzględniając z kolei, że

$$\frac{z_0^2}{\rho_0 - z_0} = \frac{z_0^2 - z_0 \rho_0 + z_0 \rho_0}{\rho_0 - z_0} = -z_0 + \frac{\rho_0 z_0}{\rho_0 - z_0},$$

mamy z równania (d) zależność

$$M = E \left(\frac{\rho_0}{\rho'_0} - 1 \right) \left[- \int_A z_0 dA + \rho_0 \int_A \frac{z_0 dA}{\rho_0 - z_0} \right],$$

w której na mocy wzoru (e) druga całka jest równa zeru, pierwsza zaś przedstawia moment statyczny S pola przekroju względem warstwy obojętnej. Jeśli środek ciężkości leży na zewnątrz warstwy obojętnej w odległości e od niej (rys. 6.29b), to $S = -Ae$ i

$$M = E \left(\frac{\rho_0}{\rho'_0} - 1 \right) Ae. \quad (f)$$

Wstawiając stąd do (b) wielkość $E[(\rho_0/\rho'_0) - 1]$ mamy ostatecznie

$$\sigma = - \frac{M}{Ae} \frac{z_0}{\rho_0 - z_0}. \quad (6.21)$$

Z wzorów (e) i (6.21) wynika, że położenie warstwy obojętnej i rozkład naprężeń nie zależą

od materiału, byleby był on sprężysty. Jak widać natomiast z wzoru (f), od rodzaju materiału (moduł E) zależą odkształcenia określone zmianą promienia ρ_0 na ρ'_0 .

Wartość ρ_0 można obliczyć z zależności (e) kilkoma sposobami. Najlepszym z nich jest ten, w którym posługujemy się centralnym układem osi yz (rys. 6.29b). Odczytując z rysunku, że $z_0 = z - e$, $\rho_0 - z_0 = r - z$, przekształcamy zależność (e)

$$\int_A \frac{z - e}{r - z} dA = \frac{1}{r} \left[\int_A \frac{z dA}{1 - (z/r)} - e \int_A \frac{dA}{1 - (z/r)} \right] = 0 \quad (g)$$

oraz rozwijamy w szereg wyrażenie

$$\frac{1}{1 - (z/r)} = 1 + \frac{z}{r} + \left(\frac{z}{r} \right)^2 + \left(\frac{z}{r} \right)^3 + \dots \quad (h)$$

W wyniku otrzymujemy z równania (g)

$$e \int_A \left(1 + \frac{z}{r} + \frac{z^2}{r^2} + \dots \right) dA - \int_A z \left(1 + \frac{z}{r} + \frac{z^2}{r^2} + \dots \right) dA = 0. \quad (i)$$

Okazuje się, że w większości zagadnień istotne są tylko dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia (h). Ponieważ osie y, z są centralne, zatem

$$\int_A dA = A, \quad \int_A z dA = 0, \quad \int_A z^2 dA = J_y,$$

i wtedy z równania (i) mamy

$$e \approx \frac{J_y}{Ar}. \quad (6.22)$$

Jak wynika z licznych rachunków, wzór (6.22) daje dostateczną dla praktyki dokładność (błąd mniejszy od 2%), gdy

$$r/h > 2,$$

gdzie h — gabarytowy wymiar przekroju w płaszczyźnie zgięcia, a r — promień krzywizny osi pręta. W prętach bardzo silnie zakrzywionych, gdy $r/h \leq 1$, stosujemy inną metodę obliczenia (zadanie 2).

Wykorzystując przybliżony wynik (6.22) i stosując centralny układ osi yz możemy wynik (6.21) przepisać w postaci

$$\sigma \approx - \frac{M}{J_y} \frac{z - e}{1 - (z/r)}. \quad (6.23)$$

Zależność ta przechodzi w znany wzór (5.10), gdy pręt jest pierwotnie prosty ($r = \infty$). W prętach słabo zakrzywionych ($r/h > 10$) różnice między wynikami obliczonymi z wzoru (6.23) i (5.10) są małe i z dokładnością rzędu $\pm 5\%$ można dla takich prętów stosować wzór (5.10).

Wynik (6.23) słuszny jest w zasadzie tylko przy czystym zginaniu. Podobnie jednak jak w prętach prostych (art. 5.6) stosujemy go również, gdy w zakrzywionym pręcie moment gnący jest zmienny, wstawiając we wzorze (6.23) wartość momentu gnącego

odpowiadającą danemu przekrojowi. Dopuszczalność takiego postępowania zweryfikowano doświadczalnie oraz przez porównanie z wynikami teorii sprężystości.

Zmiennemu momentowi gnącemu towarzyszy istnienie sił poprzecznych wywołujących w przekroju pręta naprężenia styczne τ . Ich wartości, podobnie jak w prętach prostych, są na ogół znacznie mniejsze od naprężeń normalnych. Z tego powodu przy ocenie w prętach zakrzywionych zadowalamy się przybliżeniem, stosując identyczne wzory jak dla prętów prostych (art. 5.6).

Zadania

1. Udowodnić, że ścisła wartość $\varrho_0 = A/\int (dA/\varrho)$, gdzie ϱ odległość badanego włókna od środka krzywizny.

Odp. Z rysunku 6.29b mamy $\varrho_0 - z_0 = \varrho$, $z_0 = \varrho_0 - \varrho$ i po podstawieniu do (e) otrzymujemy $\varrho_0 \int (dA/\varrho) - \int dA = 0$, skąd $\varrho_0 = A/\int (dA/\varrho)$, c.b.d.d.

2. Dla pręta o przekroju prostokątnym (rys. 6.29c) obliczyć ścisłą wartość e i porównać z wynikami według (6.22), gdy $r/h = 1$ i $r/h = 2$.

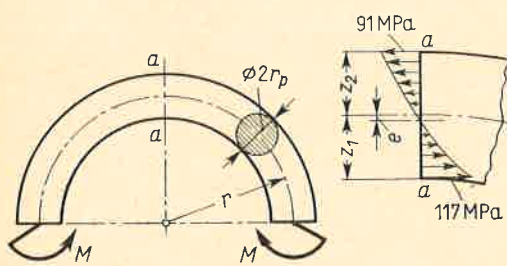
Odp. Podstawiając w wyniku poprzednim $dA = b d\varrho$ mamy

$$\varrho_0 = bh \int_{e_1}^{e_2} (b/\varrho) d\varrho = \frac{h}{\ln(\varrho_2/\varrho_1)} = \frac{h}{\ln[(2r+h)/(2r-h)]}$$

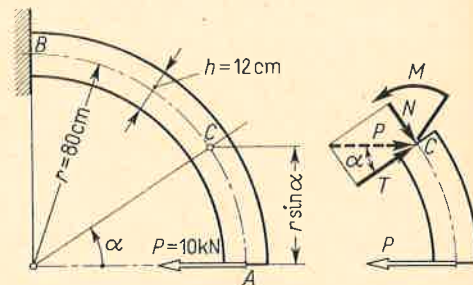
i gdy $r/h = 1$, wówczas $\varrho_0 = 0,9103r$, skąd $e_1 = r - \varrho_0 = 0,0897r$; gdy $r/h = 2$, wówczas $\varrho_0 = 0,9788r$ i $e_2 = 0,0212r$. Z wzoru (6.22) mamy $e_1 = 0,0833r$ i $e_2 = 0,0209r$, a więc błąd jest odpowiednio 7,2% i 1,5%.

3. Wyznaczyć ekstremalne naprężenia w przekroju $a-a$ pręta (rys. 6.30), jeśli $r = 30$ cm, $r_p = 5$ cm, $M = 10$ kNm.

Odp. Z wzoru (6.22): $e \approx r_p^2/4r = 0,208$ cm; z wzoru (6.23) dla $z_1 = 5$ cm jest $\sigma_{\min} = -117$ MPa, dla $z_2 = -5$ cm jest $\sigma_{\max} = 91$ MPa.



Rys. 6.30.



Rys. 6.31.

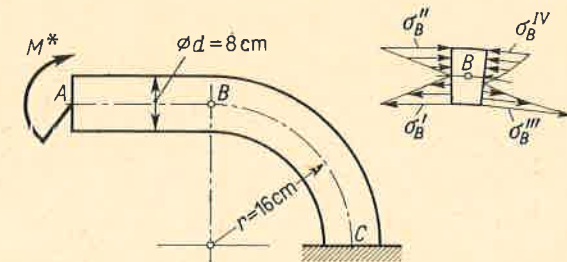
4. W pręcie (rys. 6.30) zwiększono 1,5 raza wymiary przekroju: a) tylko w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku; b) wszystkie wymiary. Jak zmieniają się wartości σ_{\max} i σ_{\min} ?

Odp. a) zmniejszą 1,5-krotnie; b) nowe wartości $e' = 2,25e \approx 0,47$ cm, $z_1 = |z_2| = 7,5$ cm i nowe $\sigma_{\min} \approx -37,7$ MPa, $\sigma_{\max} = 26,5$ MPa. Zmiana wartości σ_{\max} i σ_{\min} nie jest więc jednakowa (wpływ czynnika z/r w mianowniku wzoru 6.23).

5. Dobrac szerokość b prostokątnego przekroju pręta (rys. 6.31), aby współczynnik bezpieczeństwa był $n_e = 2$. $R_e = 240$ MPa.

Odp. W niebezpiecznym przekroju B jest $M_y = 8$ kNm i $N = -10$ kN (ściskająca). Ponieważ $r/h > 2$, stosujemy zatem wzory (6.22) i (6.23). Z pierwszego $e = h^2/12r = 0,15$ cm, a z drugiego, biorąc $b_0 = 1$ cm, mamy dla włókna wewnętrznego ($z = 6$ cm) $\sigma_{\min} = -351$ MPa. Od siły N naprężenie $\sigma_s = N/A \approx -8$ MPa, skąd całkowite ekstremalne $|\sigma| = |\sigma_{\min} + \sigma_s| = 359$ MPa. Aby zmniejszyć te naprężenia do wartości dopuszczalnej $k_c = R_e/n_e = 120$ MPa, należy b zwiększyć w stosunku $|\sigma|/k_c \approx 3,00$, skąd $b = 3b_0 = 3$ cm.

6. Pręt o przekroju kołowym składa się z prostego odcinka AB i zakrzywionego BC (rys. 6.32). Jakie są ekstremalne naprężenia σ w przekroju B, jeśli $M^* = 6$ kNm?



Rys. 6.32.

Odp. Na to pytanie nauka o wytrzymałości materiałów nie daje ścisłej odpowiedzi. W przekroju tuż na lewo od punktu B mamy z wzoru (5.11): $\sigma'_B = |\sigma'_B| = 120$ MPa, a tuż na prawo od punktu B z wzoru (6.23): $\sigma''_B = 149$ MPa, $\sigma'''_B = -102$ MPa. Między tymi przekrojami nastąpi pewne stopniowe przejście od prostoliniowego do hiperbolicznego rozkładu σ . Zadanie to jest pokrewne do przedstawionego na rys. 5.45b.

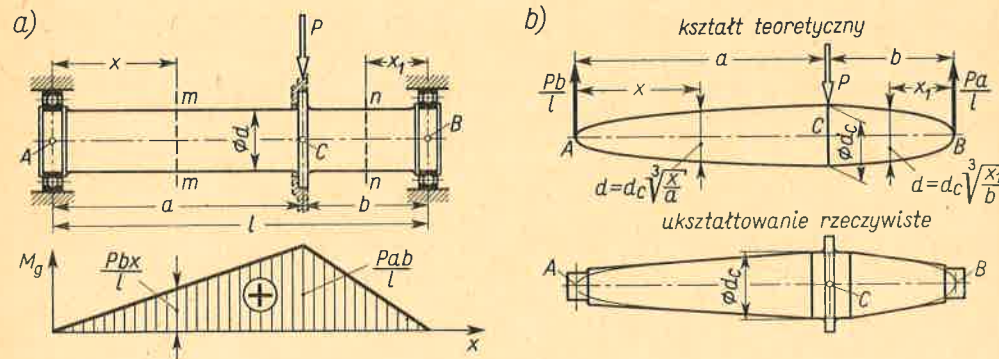
6.7. Optymalizacja kształtu belek

W dotychczasowych rozważaniach badaliśmy głównie belki pryzmatyczne. Dla takich belek ocena bezpieczeństwa bądź zagadnienie doboru wymiarów sprowadzały się do sprawdzenia postulatu (5.19) w niebezpiecznym przekroju. Tak na przykład w belce (rys. 6.33a) średnicę d dobieramy z warunku (5.19) dla przekroju C, w którym $M_g = M_{g\text{ekstr}}$. W innych przekrojach, jak $m-m$, w których $M_g < M_{g\text{ekstr}}$, naprężenia w skrajnych włóknach są odpowiednio mniejsze. Oznacza to niepełne wykorzystanie właściwości materiału lub — innymi słowy — przewymiarowanie wszystkich przekrojów poza niebezpiecznym. Jest rzeczą jasną, że w przekrojach tych część materiału można usunąć. Naturalną granicą tego jest osiągnięcie naprężeń dopuszczalnych w skrajnych włóknach każdego przekroju. Jeśli więc moment gnący $M_g(x)$ jest dany, to z powyższego warunku otrzymujemy niezbędny wskaźnik $W_y(x)$:

$$W_y(x) = \frac{M_g(x)}{k_r} \quad (a)$$

Jeśli ukształtować belkę według warunku (a), to belka ta, tzw. *równej wytrzymałości*, jest

rozwiązaniem optymalnym, albowiem w każdym jej przekroju materiał jest w pełni wykorzystany. Należy jednak zauważyć, że warunek (a) nie określa jeszcze kształtu belki, gdyż tę samą wartość W_y mogą mieć różne przekroje. Odpowiedź będzie jednoznaczna, gdy kształt przekroju ustalono z pozostawieniem jednego tylko swobodnego parametru⁽¹⁾.



Rys. 6.33. Kształtowanie belki równej wytrzymałości

Kształtowanie belek równej wytrzymałości prześledzimy na przykładzie wałka (rys. 6.33). W przekrojach $m-m$ i $n-n$ momenty gnące są odpowiednio

$$M_g(x) = Pbx/l, \quad M_g(x_1) = Pax_1/l.$$

Spełnienie warunku (a) dla przekroju kołowego, w którym $W_y = \pi d^3/32$, daje średnice

$$d(x) = \sqrt[3]{32Pbx/\pi lk_r}, \quad d(x_1) = \sqrt[3]{32Pax_1/\pi lk_r}. \quad (b)$$

Tak więc na odcinku AC średnica zmienia się proporcjonalnie do $\sqrt[3]{x}$, a na odcinku CB proporcjonalnie do $\sqrt[3]{x_1}$. W przekroju C obydwa wzory (b) dają tę samą wartość

$$d_c = \sqrt[3]{32Pab/\pi lk_r}, \quad (c)$$

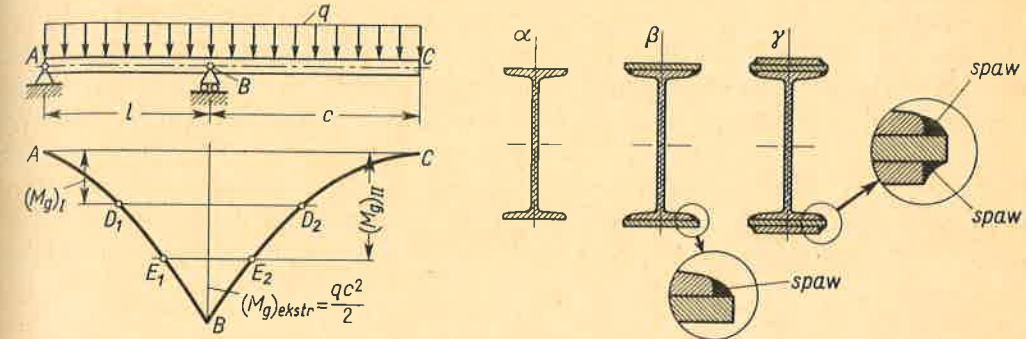
dzięki czemu poprzednie wyrażenia otrzymują prostą formę

$$d(x) = d_c \sqrt[3]{\frac{x}{a}}, \quad d(x_1) = d_c \sqrt[3]{\frac{x_1}{b}}. \quad (d)$$

Teoretyczny kształt wałka równej wytrzymałości (rys. 6.33b) nastęrcza trudności wykonawcze, a ponadto nie uwzględnia takich realiów jak łożyska, wprowadzenie sił itp. Z tych powodów rzeczywiste ukształtowanie odbiega od ideału. W zasadniczej części wałka na obrysie teoretycznym opisujemy uproszczony kontur, wygodny z uwagi na wykonanie. W miejscach wprowadzenia sił kierujemy się innymi względami, jak wymiary łożysk, dbając tylko o to, aby gabaryty rzeczywiste były większe od niezbędnych teoretycznie. W rezultacie mamy belkę (wałek), która w zasadniczej swej części cechuje się ciągłą zmianą przekroju.

⁽¹⁾ Na przykład pełny przekrój kołowy ma jeden parametr swobodny, tj. średnicę d ; przekrój prostokątny o danej wysokości h ma szerokość b jako parametr swobodny itd.

Wykonanie belek nawet o uproszczonym kształcie i ciągłej zmianie przekroju nie zawsze jest łatwe. Wtedy zadowalamy się rozwiązaniem, którego zasadę podaje rys. 6.34. Przypuścimy, że względy wykonawcze zmuszają do zastosowania walcowanej dwuteówki, którą można wzmocnić przez dospawanie co najwyżej dwóch nakładek na każdej z półek.



Rys. 6.34. Kształtowanie belki stopniowanej

Przy tych narzuconych warunkach zasadniczy profil (α) dobieramy tak, aby jego wskaźnik $(W_y)_I$ stanowił tylko część, np. jedną trzecią, wskaźnika $(W_y)_B$ dla przekroju B

$$(W_y)_B = M_{g_{ekstr}}/k_r = qc^2/2 k_r.$$

Ten zasadniczy profil zapewnia bezpieczeństwo w przekrojach belki, w których moment gnący $M_g(x)$ jest liczbowo mniejszy od rozporządzalnego momentu $(M_g)_I$

$$(M_g)_I = k_r(W_y)_I,$$

czyli na zewnątrz odcinka D_1D_2 . Dla przekrojów na odcinku D_1D_2 profil zasadniczy należy wzmocnić. Dobierając pierwszą parę nakładek tak, aby wskaźnik $(W_y)_{II}$ przekroju (β) miał wartość pośrednią między $(W_y)_I$ i $(W_y)_B$, mamy drugą rozporządzalną wartość $(M_g)_{II} = k_r(W_y)_{II}$ zapewniającą bezpieczeństwo belki na odcinkach D_1E_1 i E_2D_2 . Wreszcie na odcinku E_1E_2 belka musi mieć przekrój (γ), którego wskaźnik $(W_y)_{III} = (W_y)_B$ daje gwarancję bezpieczeństwa z uwagi na występujący tam ekstremalny moment. W rzeczywistości dla skompensowania zjawiska karbu (rys. 5.45) nakładki muszą mieć nieco większą długość od teoretycznie obliczonych. Ta sama reguła obowiązuje i w innych przypadkach.

Wyznaczenie linii ugięcia wszystkich rozpatrywanych tu belek sprowadza się do rozwiązania równania (5.20), tj.

$$w'' = M_g(x)/EJ_y,$$

w którym tym razem licznik i mianownik prawej strony są funkcjami współrzędnej x . Sam sposób rozwiązania (analityczny lub wykreslny), dobór warunków brzegowych zostają takie same, jak omówione w art. 5.8 i 5.9. Dla belek równej wytrzymałości całkowanie można uprościć. Zauważmy bowiem, że przez odpowiednie ukształtowanie naprężenie ekstremalne $\sigma_e = k_r$ w każdym przekroju. Zgodnie zatem z podstawową zależnością (5.8) mamy

$$k_r = Ez_e/\rho \quad \text{lub} \quad 1/\rho = k_r/Ez_e, \quad (e)$$

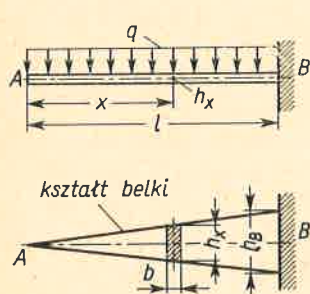
gdzie z_e — odległość skrajnego włókna w danym przekroju wyznaczona uprzednio z warunku (a). Uwzględniając, że ugięcia są małe możemy, jak w art. 5.8, napisać $w'' = 1/\rho$, skąd

$$w'' = k_r/Ez_e \quad (f)$$

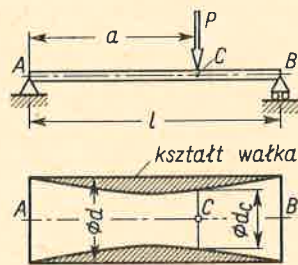
W porównaniu z pryzmatycznymi belki równej wytrzymałości bądź belki stopniowane są lżejsze. Techniczne znaczenie tego faktu może być różne. I tak, w belce (rys. 6.34) cecha ta oznacza oszczędność materiału, co może być niekiedy uzasadnione ekonomicznie. Inny sens ma lekkość toczonoego wałka (rys. 6.33b), gdzie aspekt oszczędności materiału jest iluzją, gdzie natomiast może zależeć na redukcji sił masowych. Odrębną kwestią jest sprawa ugięć, które przy zadanych z góry obciążeniach są mniejsze w belkach pryzmatycznych. Ocena tego faktu może być różna, niekiedy bowiem chcemy mieć jak najmniejsze odkształcenia (przyrządy pomiarowe), a niekiedy pożądane są odkształcenia duże (sprężyny giętne).

Zadania

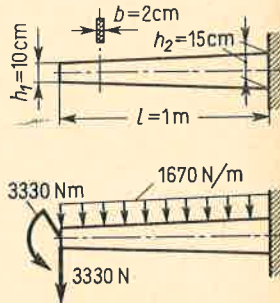
1. Wspornikowa belka o prostokątnym przekroju i $b = \text{const}$ (rys. 6.35) ma być belką równej wytrzymałości. Wyznaczyć h_x .
Odp. $h_x = h_B x/l$, gdzie $h_B = 3ql^2/bk_r$, wysokość belki w przekroju B.



Rys. 6.35.



Rys. 6.36.



Rys. 6.37.

2. Wałek (rys. 6.33a) o $d = \text{const}$ ma być drążony. Dobrać średnicę wewnętrzną d_w , aby był on belką równej wytrzymałości.

Odp. Na odcinku AC jest $d_w(x) = \sqrt[4]{d^4 - (32Pbx d/\pi l k_r)}$, a na odcinku CB jest $d_w(x_1) = \sqrt[4]{d^4 - (32Pax_1 d/\pi l k_r)}$.

3. Po drążonym wałku o stałej średnicy zewnętrznej przesuwa się siła P (rys. 6.36). Znaleźć kształt wydrążenia, aby w każdym położeniu siły istniał przekrój, w którym $\sigma_e = k_r$. Czy taki wałek jest belką równej wytrzymałości?

Odp. W obranym położeniu siły $(M_g)_{\text{ekstr}} = Pa(l-a)/l$ jest w przekroju C i $d_c = \sqrt[4]{d^4 - [32Pa(l-a)d/\pi l k_r]}$. Aby istniało rozwiązanie, dla każdego a musi być $d^3 > [32Pa(l-a)/\pi l k_r]$. Prawa strona nierówności ma ekstremum, gdy $a = l/2$, skąd wynika $d_{\text{min}}^3 > 8Pl/\pi k_r$. Oznacza to, że maksymalny rozporządzalny dla pełnego przekroju moment $(\pi d^3/32) k_r$ musi być większy niż maksymalny możliwy moment $Pl/4$, działający, gdy $a = l/2$. Wałek ten nie jest belką równej wytrzymałości.

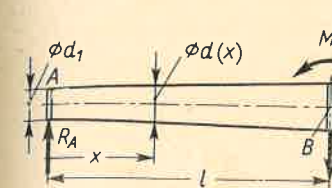
4. Dla jakiego obciążenia belka (rys. 6.37) o przekroju prostokątnym ($b = \text{const}$) jest belką równej wytrzymałości? $k_r = 100 \text{ MPa}$.

Odp. $M_g = (k_r b h_1^2/6) \{1 + [(h_2 - h_1)x/lh_1]\}^2$; z zależności $dM_g/dx = T$, $d^2M_g/dx^2 = -q(x)$ otrzymujemy wynik podany na rysunku.

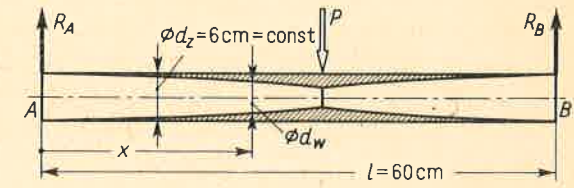
5. W belce równej wytrzymałości, np. z rys. 6.35, zmieniono: a) wartość q; b) wymiary wszystkich przekrojów w tym samym stosunku. Czy belka zostanie belką równej wytrzymałości?

Odp. Tak. Zmieniają się tylko naprężenia.

6. Stożkowy wałek podparty na końcach (rys. 6.38) obciążono momentem M_B^* . Wyznaczyć kąty ugięcia ϑ_A i ϑ_B .



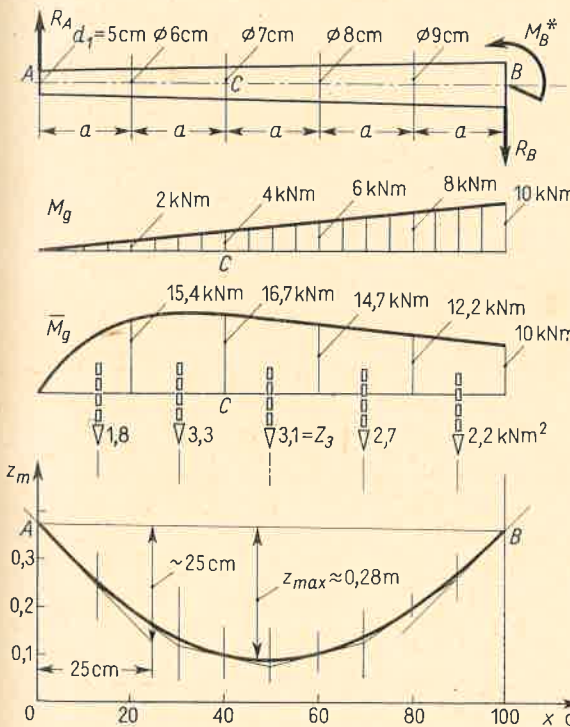
Rys. 6.38.



Rys. 6.39.

Odp. $M_g = M_B^* x/l$, $EJ_y = E(\pi d_2^4/64) [\psi + (1-\psi)(x/l)]^4$, gdzie $\psi = d_1/d_2$. Po dwukrotnym scałkowaniu (5.20), wykorzystaniu warunków brzegowych $(w)_{x=0} = 0$ i $(w)_{x=l} = 0$ mamy ostatecznie

$$\vartheta_A = -M_B^* l/[6E(\pi d_2^4/64)\psi^2], \quad \vartheta_B = M_B^* l/[3E(\pi d_2^4/64)\psi]$$



Rys. 6.40. Wyznaczenie ugięcia belki o przekroju zmiennym

7. Przez odpowiedni dobór średnicy $d_w(x)$ walek oparty na końcach A i B (rys. 6.39) jest belką równą wytrzymałości, w której $k_r = \sigma_e = 100$ MPa. Wyznaczyć linię ugięcia i strzałkę f , jeśli $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

Odp. Z wzoru (f) mamy $w'' = 2k_r/Ed_z = \text{const}$ i po scałkowaniu $w = -k_r x(l-x)/Ed_z$. Linia ugięcia jest więc parabolą, co jest pozornie sprzeczne z wzorem (e), z którego dla $z_e = d_z/2 = \text{const}$ mamy $\rho = \text{const}$, a więc łuk koła. Powodem rozbieżności jest uproszczenie, że $1/\rho = w''$ (art. 5.8). Różnice jednak są nieistotne (małe wyższego rzędu). Strzałka

$$f = |(w)_{x=l/2}| = k_r l^2/4E d_z = 0,75 \text{ mm}.$$

8. Wyznaczyć wykresnie linię ugięcia belki (rys. 6.38). Przyjąć $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $d_1 = 6$ cm, $d_2 = 10$ cm, $l = 1$ m, $M_B^* = 10$ kNm.

Odp. Po narysowaniu belki (rys. 6.40) z zaznaczeniem wymiarów szeregu przekrojów obliczamy w tych przekrojach wartości momentu M_θ oraz wartości \bar{M}_θ zmienione w stosunku $J_2/J_y(x)$, gdzie $J_2 = \pi d_2^4/64$ moment bezwładności przekroju B . Tak na przykład w przekroju C jest $J_y(x) = \pi d_1^4/64 = 118 \text{ cm}^4$, $M_\theta = 4$ kNm, skąd

$$(\bar{M}_\theta)_C = 4 \cdot 491/118 = 16,7 \text{ kNm},$$

gdzież $J_2 = \pi 10^4/64 = 491 \text{ cm}^4$. Mając wykres \bar{M}_θ postępujemy jak opisano w art. 5.9. Wobec przyjęcia $H = EJ_2/150$ rzeczywiste maksymalne ugięcie belki jest

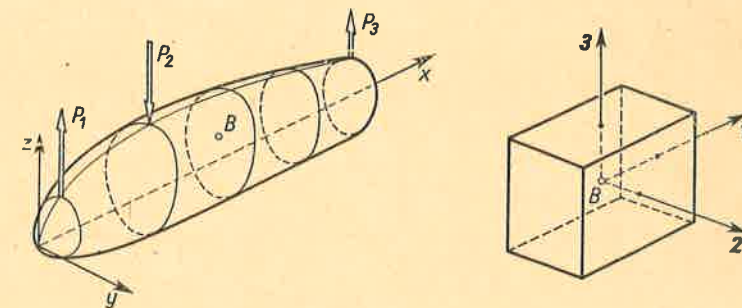
$$f = z_{\max}/150 \approx 1,9 \text{ mm},$$

gdzież $z_{\max} \approx 0,28$ m — maksymalna rzędna linii sznurowej. Dla sprawdzenia obliczmy jeszcze kąt ugięcia ϑ_A . Postępując jak w przykładzie z rys. 5.56 mamy $\vartheta_A \approx 25 \text{ cm}/25 \text{ cm} \cdot 150 \approx 6,7 \cdot 10^{-3}$ rad, podczas gdy ścisła wartość z zadania 6 jest $6,8 \cdot 10^{-3}$ rad. Tak więc błąd nie przekracza 1,5%.

Bezpieczeństwo konstrukcji

7 ANALIZA STANU NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA

W bardziej złożonych przypadkach obciążenia pręta ocena jego bezpieczeństwa wymaga głębszego, niż podane w art. 2.5 i 3.1, poznania właściwości stanu naprężenia i stanu odkształcenia w danym punkcie ciała. Pojęcia te, jak wiemy z art. 1.5 i 1.6, reprezentują całą mnogość wartości naprężeń (bądź odkształceń) odpowiadającą wszystkim możliwym przekrojom (bądź kierunkom) przeprowadzonym przez ten punkt. W artykule 2.5 na przykładzie rozciągania pokazano, że istnieją zależności, które tę całą mnogość porządkują. Naszym obecnym zadaniem jest sformułowanie podobnych zależności w bardziej ogólnych przypadkach. Dla ujednoczenia postępowania w kwestii i naprężeń, i odkształceń wprowadzamy jako obiekt badania elementarną prostopadłościenną kostkę wyciętą myślowo z ciała w otoczeniu badanego punktu B (rys. 7.1). Na ścianach tej kostki istnieją naprężenia



Rys. 7.1. Elementarna kostka — podstawowy obiekt analizy

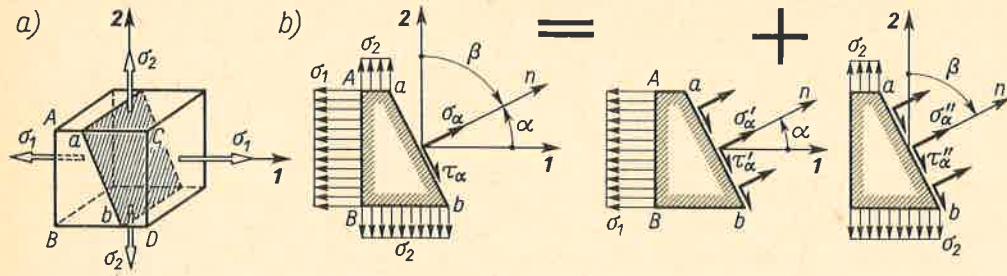
pochodzące z oddziaływania na nią całej reszty ciała. Z uwagi przy tym na bardzo małe jej wymiary możemy uważać, że naprężenia te rozłożone są równomiernie.

Poszukiwanie zależności porządkujących wartości naprężeń i odkształceń nosi nazwę *analizy stanu naprężenia i odkształcenia*. Jej zakres dobrano tu jako minimum niezbędne

w nauce wytrzymałości materiałów. Bardziej szczegółowe informacje oraz niektóre dowody są przedmiotem teorii sprężystości.

7.1. Analiza płaskiego stanu naprężenia

Jako pierwsze zagadnienie analizy naprężeń rozpatrzmy przypadek, gdy na prostopadłe do osi **1** i **2** ściany kostki działają naprężenia σ_1 i σ_2 , a ściany równoległe do płaszczyzny **1,2** są nieobciążone (rys. 7.2a). Taki stan naprężeń nazywamy *płaskim* lub *dwuwymiarowym*. Zakładamy na razie, że ukośny przekrój ab jest prostopadły do nieobciążonej ściany $ABCD$. Ustawienie tego przekroju określa⁽¹⁾ kąt α bądź kąt $\beta = \alpha - (\pi/2)$.



Rys. 7.2. Analiza płaskiego (dwuwymiarowego) stanu naprężenia

Składowe naprężenia σ_α i τ_α wyznaczmy stosując zasadę superpozycji, w rezultacie czego mamy dwa stany. Pierwszy z nich przedstawia rozciąganie w kierunku osi **1**, drugi — rozciąganie w kierunku osi **2**. Odpowiadające tym składowym stanom naprężenia σ'_α , τ'_α , σ''_α i τ''_α określamy z wzorów (2.13) i (2.14)

$$\begin{aligned} \sigma'_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha, & \tau'_\alpha &= \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \sigma''_\alpha &= \sigma_2 \cos^2 \beta = \sigma_2 \sin^2 \alpha, & \tau''_\alpha &= \sigma_2 \sin \beta \cos \beta = -\sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Po złożeniu wyników mamy ostatecznie poszukiwane zależności

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad (7.1)$$

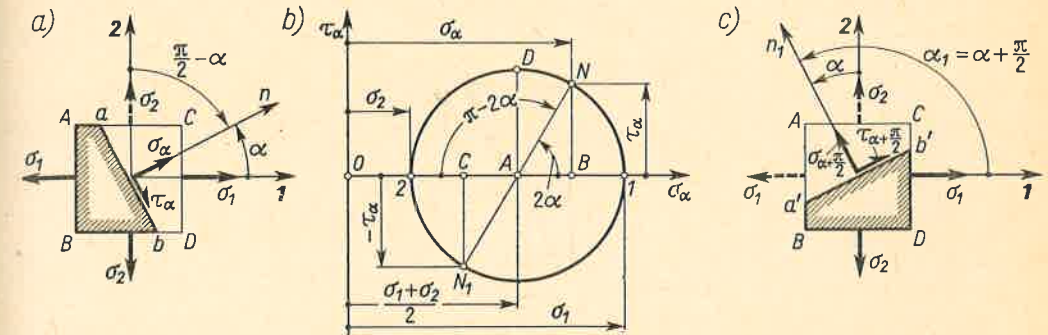
$$\tau_\alpha = \tau'_\alpha + \tau''_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (7.2)$$

Widać, że poprzednie zależności (2.13) i (2.14) są szczególnym przypadkiem wzorów (7.1) i (7.2), gdy $\sigma_1 = \sigma$ i $\sigma_2 = 0$. Podobnie widać, że σ_α oscyluje między granicznymi wartościami σ_1 ($\alpha = 0$, $\alpha = \pi$) i σ_2 ($\alpha = \pi/2$, $\alpha = 3\pi/2$), podczas gdy τ_α zmienia się w przedziale $\pm(\sigma_1 - \sigma_2)/2$. Obowiązuje przy tym ta sama co w art. 2.5 umowa o znakach σ_α i τ_α , jak również te same uwagi o prowadzeniu w rozpatrywanej kostce przekrojów wielokrotnych (rys. 2.15). W szczególności stwierdzamy, że w dwóch prostopadłych przekrojach, okre-

⁽¹⁾ Identycznie jak w art. 2.5, kąt między daną osią a zewnętrzną normalną n jest dodatni, gdy obrót od tej osi do osi n jest przeciwwzgarowy. Tak więc na rys. 7.2 mamy $\alpha > 0$, $\beta < 0$.

ślonych odpowiednio kątami α i $\alpha + (\pi/2)$ naprężenia τ_α i $\tau_{\alpha + (\pi/2)}$ mają zawsze równe wartości bezwzględne (zasada symetrii naprężeń stycznych). Jeśli naprężenia σ_1 lub σ_2 są ściskające, to, zgodnie z umową, należy we wzorach (7.1) i (7.2) wstawić ich wartości ze znakiem minus.

Wynik analizy, tj. wzory (7.1) i (7.2), można przedstawić wykreślnie w postaci tzw. *kola Mohra*. Biorąc mianowicie układ współrzędnych σ_α i τ_α (rys. 7.3b) zbudujemy koło o środku A leżącym na osi odciętych w ten sposób, aby odcięte $OA = \sigma_1$, $OB = \sigma_2$. Kreśląc następnie promień AN pod kątem 2α , tj. równym podwojonemu kątowi α na obrazie kostki⁽¹⁾



Rys. 7.3. Koło Mohra dla płaskiego stanu naprężenia

(rys. 7.3a), otrzymujemy punkt N . Jego współrzędne \overline{OB} i \overline{BN} dają w obranej skali algebraiczne wartości σ_α i τ_α , albowiem

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OA} + \overline{AN} \cos 2\alpha, \quad \overline{BN} = \overline{AN} \sin 2\alpha,$$

a ponieważ $\overline{OA} = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, $\overline{AN} = \overline{AI} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$, zatem

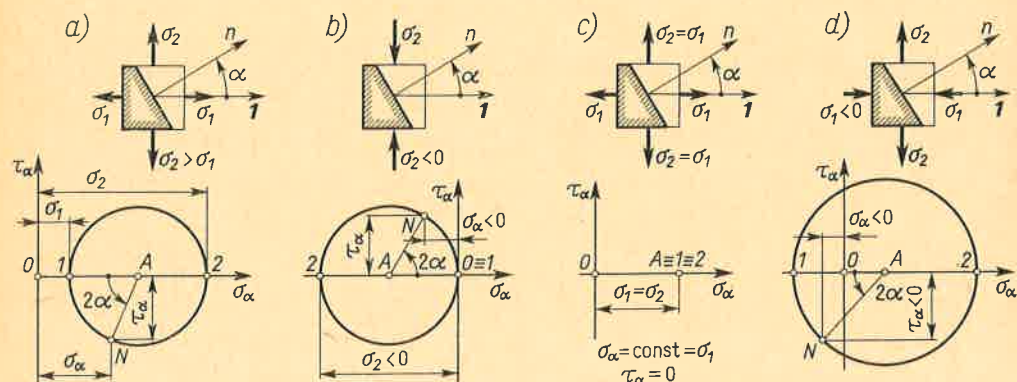
$$\overline{OB} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad \overline{BN} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha,$$

czyli zależności identyczne z wzorami (7.1) i (7.2). Jeśli teraz na obrazie kostki (rys. 7.3a) zmieniamy kąt α , a więc i ustawienie przekroju ab , to punkt N wędruje po kole Mohra w dwukrotnie szybszym tempie. I tak, rozpoczynając od punktu I , gdy $2\alpha = 0$, $\sigma_\alpha = \sigma_1$, $\tau_\alpha = 0$, przechodzimy stopniowo do punktu D , w którym $2\alpha = \pi/2$, $\sigma_\alpha = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, a wartość $\tau_\alpha = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ jest maksymalna i odpowiada przekrojowi ab określonego przez $\alpha = \pi/4$. Powiększając dalej kąt 2α dochodzimy do punktu 2 ($\sigma_\alpha = \sigma_2$, $\tau_\alpha = 0$), a odpowiadający przekrój ab jest prostopadły do osi **2** ($\alpha = \pi/2$). Podobnie prześledzimy wędrowkę punktu N po dolnym łuku koła Mohra, czemu na obrazie kostki odpowiada kąt $\alpha_1 > (\pi/2)$ (rys. 7.3c). Jeśli w kostce mamy dwa przekroje prostopadłe do siebie, określone kątami α i $\alpha_1 = \alpha + (\pi/2)$, to odpowiadające im punkty N i N_1 koła Mohra leżą na jednej średnicy, skąd wynika

$$\tau_{\alpha + \pi/2} = -\tau_\alpha. \quad (a)$$

⁽¹⁾ Kąt 2α między punktami okręgu należy odmierzyć z tym samym zwrotem względem środka koła co kąt α na obrazie kostki.

Powyższa dyskusja odpowiada sytuacji, gdy $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$. Jeśli jedno z naprężeń jest ściskające, a więc ujemne, to jego wartość należy odłożyć na lewo od punktu O . Kilka wariantów stanu naprężenia i odpowiednich kół Mohra podaje⁽¹⁾ rys. 7.4.



Rys. 7.4. Przykłady stanów naprężenia i odpowiednich kół Mohra

a) dwuwymiarowe rozciąganie, $\sigma_1 < \sigma_2$; b) proste ściskanie, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 < 0$; c) dwuwymiarowe równomierne rozciąganie $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$; d) przypadek $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$

Z koła Mohra odczytujemy bezpośrednio widoczne właściwości płaskiego stanu naprężenia, a mianowicie;

a. Istnieją tylko dwa przekroje (ściślej dwie rodziny przekrojów), w których panują tylko naprężenia normalne $\sigma_\alpha = \sigma_1$, $\sigma_\alpha = \sigma_2$, a $\tau_\alpha = 0$. Przekroje te, tzw. *przekroje główne*, są względem siebie prostopadłe. Naprężenia normalne w tych przekrojach, tj. σ_1 i σ_2 , nazywają się *głównymi naprężeniami*.

b. Naprężenia główne są ekstremalnymi wartościami naprężenia σ_α i zawsze spełniona jest nierówność

$$\sigma_2 \leq \sigma_\alpha \leq \sigma_1, \quad \text{jeśli} \quad \sigma_1 > \sigma_2. \quad (7.3)$$

c. Ekstremalne naprężenia styczne występują w przekrojach dwusiecznych względem przekrojów głównych, tj. $\alpha = \pm(\pi/4)$. Ich bezwzględna wartość jest ta sama i wynosi

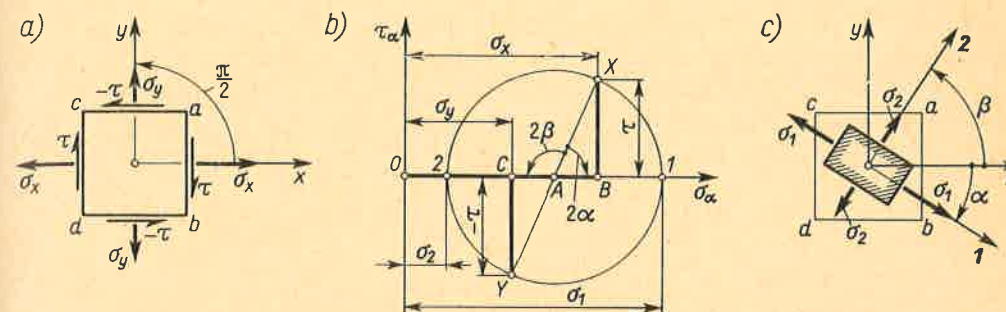
$$|\tau|_{\text{ekstr}} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|, \quad (7.4)$$

a więc równa się połowie algebraicznej różnicy naprężeń głównych.

W rozpatrzonych dotąd zagadnieniach stan naprężenia podany był przez naprężenia główne, a celem było wyznaczenie naprężeń w jedno- lub wielokrotnych przekrojach obróconych względem przekrojów głównych. Jak widać, choćby z rys. 7.2, wyniki takich zagadnień, zwanych *prostymi*, mają postać bardziej złożoną niż stadium wyjściowe. W praktyce spotykamy się częściej z zagadnieniami *odwrotnymi*, gdy w wyjściowym stadium na dwóch prostopadłych parach ścian kostki dane są naprężenia σ_x , σ_y i τ (rys. 7.5a). Te ostatnie, zgodnie z zasadą symetrii, są równe co do bezwzględnych wartości i są skier-

⁽¹⁾ Pożądane jest nabycie wprawy w korelowaniu przekroju na obrazie kostki z punktem na kole Mohra i rysowanie obrazu naprężeń na rysunku kostki otrzymanych z koła Mohra.

rowane bądź do wspólnych krawędzi, bądź od nich. Poszukiwanymi wielkościami są teraz naprężenia główne σ_1 i σ_2 oraz kąt α określający ustawienie przekrojów głównych na obrazie kostki.



Rys. 7.5. Rozwiązanie odwrotnego zagadnienia analizy stanu naprężenia

Zagadnienie odwrotne najłatwiej rozwiązać posługując się kołem Mohra. W kole tym (rys. 7.5b) znamy współrzędne punktu X , tj. σ_x i $+\tau$, i punktu Y , tj. σ_y i $-\tau$, reprezentujące naprężenia w przekrojach prostopadłych odpowiednio do osi x i osi y . Ponadto wiemy, że punkty te leżą na jednej średnicy, gdyż odpowiadające im przekroje ab i ac są do siebie prostopadłe (porównaj punkty N i N_1 na rys. 7.3b). Łącząc zatem punkty X i Y otrzymujemy środek A i promień AX , a więc wszystkie dane potrzebne do wykreślenia koła Mohra. Punkty 1 i 2 przecięcia tego koła z osią σ_α dają odcinki $\overline{O1}$ i $\overline{O2}$ reprezentujące w obranej skali naprężenia główne σ_1 i σ_2 . Ponadto odczytujemy kąty 2α i 2β równe podwójnym kątom, które na obrazie kostki oś x tworzy z osiami 1 i 2 określającymi główne przekroje. Jak widać, przejście na kole Mohra od danego punktu X do poszukiwanego punktu 1 odbywa się współzegarowo. W tym samym zatem kierunku musi zachodzić na obrazie kostki przejście od danej osi x do poszukiwanej osi 1 (rys. 7.5c). Podobnie określamy położenie osi 2 . Rysując na koniec przekroje prostopadłe do znalezionych osi 1 i 2 i działające w tych przekrojach naprężenia σ_1 i σ_2 mamy szukane rozwiązanie.

Opisana konstrukcja wykreślna ułatwia sformułowanie analitycznych zależności między wielkościami danymi, tj. σ_x , σ_y , τ , a poszukiwanymi, tj. σ_1 , σ_2 i α . Z rysunku 7.5b widać, że

$$\overline{OA} = (\sigma_x + \sigma_y)/2, \quad \overline{AB} = (\sigma_x - \sigma_y)/2, \quad \overline{AX} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BX}^2}, \quad \overline{BX} = \tau,$$

skąd otrzymujemy poszukiwane wielkości:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \overline{OA} \pm \overline{AX} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2}, \quad (7.5)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{\overline{BX}}{\overline{AB}} = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (7.6)$$

Znak minus we wzorze (7.6) wynika stąd, że dodatnim wartościom \overline{BX} i \overline{AB} odpowiada na rysunku kostki ujemny kąt α (rys. 7.5c).

Podobnie możemy obliczyć i inne wielkości, np.

$$\tau_{\max} = \overline{AX} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2}. \quad (7.7)$$

Wyniki (7.5)÷(7.7) stanowią analityczne rozwiązanie zadania odwrotnego równorzędnym metodzie wykreślnej. W teorii sprężystości i plastyczności stosuje się je często jako punkt wyjścia do dalszych rozważań. Istotną rzeczą jest przy tym pamiętać, że wszystkie te wyniki (analityczne i wykreślne) słuszne są, gdy ukośny przekrój, w którym badamy naprężenia, jest prostopadły do nieobciążonej ściany kostki.

Zadania

1. W kostce (rys. 7.3a) mamy $\sigma_1 = 60$ MPa, $\sigma_2 = -30$ MPa. Wyznaczyć naprężenia na bokach kostki, wyciętej jak na rys. 2.15, gdy $\alpha_1 = 20^\circ$.

Odp. $\sigma_{20^\circ} = \sigma_{200^\circ} = 49,5$ MPa, $\sigma_{110^\circ} = \sigma_{290^\circ} = -19,6$ MPa, $\tau_{20^\circ} = -\tau_{110^\circ} = \tau_{200^\circ} = -\tau_{290^\circ} = 28,9$ MPa.

2. Z kostki (rys. 7.4c) wycięto: a) dowolny graniastosłup, b) walec kołowy. Jakie naprężenia panują na bocznej powierzchni?

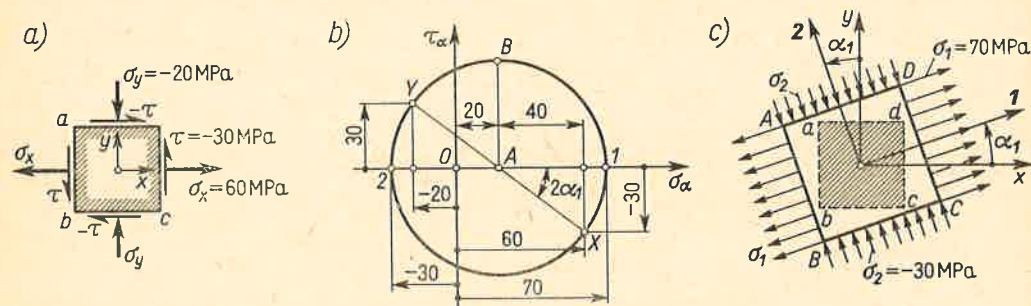
Odp. a) $\tau_x \equiv 0$, $\sigma_x = \sigma_1 = \sigma_2 = \text{const}$; b) to samo co w (a), gdyż walec można traktować jak graniastosłup o nieskończenie wielkiej liczbie boków.

3. Posługując się kołem Mohra (rys. 7.3b) dowieść, że: $\tau_\alpha^2 = (\sigma_1 - \sigma_\alpha)(\sigma_\alpha - \sigma_2)$.

Odp. Wiadomo, że \overline{BN} jest średnią geometryczną odcinków \overline{BI} i $\overline{2B}$, czyli $(\overline{BN})^2 = \overline{(2B)} \cdot \overline{(BI)}$, c.b.d.d.

4. Podać warunek odnośnie do σ_1 i σ_2 (rys. 7.2a), aby istniały przekroje (ściślej rodziny równoległych przekrojów), w których $\sigma_\alpha = 0$. Narysować te przekroje, jeśli $\sigma_1 = -30$ MPa, $\sigma_2 = 50$ MPa.

Odp. Warunek: $\sigma_1 \sigma_2 < 0$ (patrz rys. 7.4d); $\text{tg } 2\alpha = \pm\sqrt{15}$, $\alpha = \pm 37,8^\circ$.



Rys. 7.6. Przykład liczbowy zagadnienia odwrotnego

5. W podanej kostce (rys. 7.6a) wyznaczyć wykreślnie (z koła Mohra) wartości głównych naprężeń i położenie głównych przekrojów.

Odp. Podanym zwrotom τ odpowiada ujemna rzędna dla punktu X i dodatnia dla punktu Y (rys. 7.6b). Po określeniu środka A i promienia $\overline{AX} = 50$ MPa otrzymujemy $\sigma_1 = 70$ MPa, $\sigma_2 = -30$ MPa, a ponadto $\text{tg } 2\alpha_1 = 0,75$, skąd $\alpha_1 \approx 18,5^\circ$. Kąt α_1 na obrazie kostki odmierzymy w tym samym kierunku co i kąt $2\alpha_1$ na kole Mohra przy przejściu od punktu X do punktu I . Kostka $ABCD$ odpowiadająca przekrojom głównym (rys. 7.6c) jest tą, z której wycięto pierwotną kostkę $abcd$ o danym stanie naprężeń.

6. W kostce (rys. 7.6a) zmieniono tylko σ_x na $\sigma_x = -60$ MPa. Obliczyć wartości naprężeń σ_1 i σ_2 oraz wartość kąta α .

Odp. Z wzorów (7.5): $\sigma_1 = -3,9$ MPa, $\sigma_2 = -76,1$ MPa; z wzoru (7.6) mamy $\text{tg } 2\alpha = -2(-30)/(-40) = -1,5$, $2\alpha = 123^\circ 44'$, $\alpha = 61^\circ 52'$.

Uwaga. We wzorze (7.6) należy wziąć algebraiczną wartość τ odpowiadającą przekrojowi prostopadłemu do osi x , a odpowiedzi na kąt 2α poszukiwać w przedziale $(0, 180^\circ)$.

7. Zostawiając bez zmian σ_x i τ (rys. 7.6a) znaleźć wykreślnie taką wartość σ_y , aby stan naprężenia był prostym rozciąganiem.

Odp. Prowadzimy odcinek \overline{OX} (rys. 7.6) i jego symetralną. Jej przecięcie z osią σ_α daje środek A_1 i promień $\overline{A_1 X}$ nowego koła Mohra. Rzędna punktu Y jest nadal 30 MPa, skąd $\sigma_y = 15$ MPa, $\sigma_1 = 2A_1 X = 75$ MPa.

8. Jak zmieniają się wyniki zadań 5 i 6, jeśli zwroty wszystkich składowych naprężeń zmienić na przeciwne?

Odp. Przekroje główne nie zmieniają się; wartości σ_1 i σ_2 są przeciwne.

9. W kostce (rys. 7.6a) znaleźć przekrój, w którym $\sigma_\alpha = |\tau_\alpha|$.

Odp. Rysując z punktu O (rys. 7.6b) dwie proste $\tau_\alpha = \pm\sigma_\alpha$ wyznaczamy na kole Mohra cztery punkty stanowiące cztery odpowiedzi. Przekroje są parami symetrycznie ustawione względem osi I (rys. 7.6c).

7.2. Uproszczona analiza trójwymiarowego stanu naprężenia

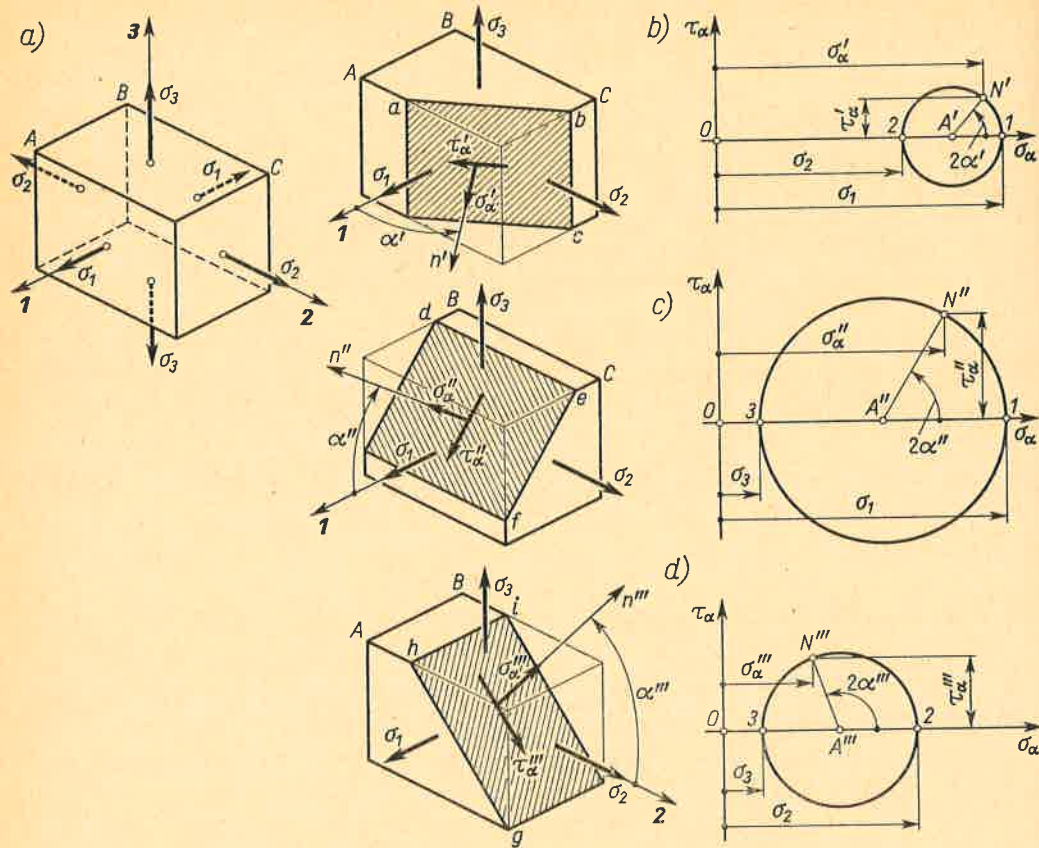
Logicznym uogólnieniem płaskiego stanu naprężenia jest stan trójwymiarowy, gdy na ściany kostki działają naprężenia normalne σ_1 , σ_2 i σ_3 (rys. 7.7a). Naprężenia te wobec braku naprężeń stycznych nazwiemy, jak poprzednio, *głównymi*. Zbadajmy teraz naprężenia w ukośnym przekroju abc równoległym do osi 3 (rys. 7.7b). Naprężenie σ_3 nie wpływa⁽¹⁾ tu zupełnie na σ'_α i τ'_α , które wyznaczone zostają jak w art. 7.1. W wyniku σ'_α i τ'_α reprezentowane są przez punkt N' koła Mohra zbudowanego dla głównych naprężeń σ_1 i σ_2 . Powtarzając to rozumowanie dla przekrojów def i ghi równoległych odpowiednio do osi 2 i 1 (rys. 7.7c, d) otrzymujemy punkty N'' i N''' określające składowe naprężenia σ''_α , τ''_α , σ'''_α , τ'''_α w tych przekrojach. Przenosząc te trzy koła Mohra na jeden wykres (rys. 7.8a) mamy obraz, który w analizie trójwymiarowego stanu naprężenia spełnia podobną rolę, jak pojedyncze koło Mohra dla stanu dwuwymiarowego. W teorii sprężystości bowiem dowodzi się, że naprężenia σ_n i τ_n w przekroju klm nachylonym do *wszystkich* osi $1, 2$ i 3 (rys. 7.8b) reprezentowane są pewnym punktem N leżącym w polu zakreskowanym na rys. 7.8a. Wynika stąd ważny wniosek, że maksymalne naprężenie styczne ma wartość równą promieniowi największego koła Mohra i jeśli $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, to

$$|\tau|_{\max} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right|. \quad (7.8)$$

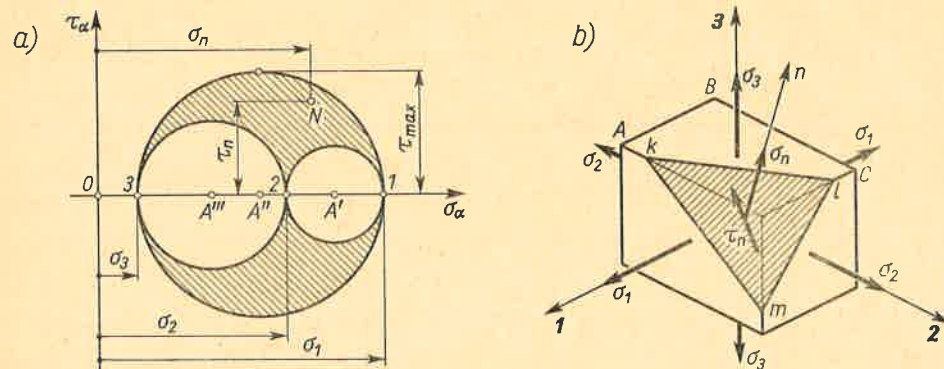
Widać również, że naprężenie τ_{\max} działa w przekroju, który jest równoległy do średniego naprężenia (σ_2) i jednocześnie dwusieczny w stosunku do pozostałych osi.

Przedstawiona analiza stanowi analogię do omówionego w art. 7.1 zagadnienia prostego. Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego ograniczymy do wariantu, gdy w stadium

⁽¹⁾ Wypadkowa z naprężeń σ_3 na obydwóch ścianach poziomych jest równa zeru.

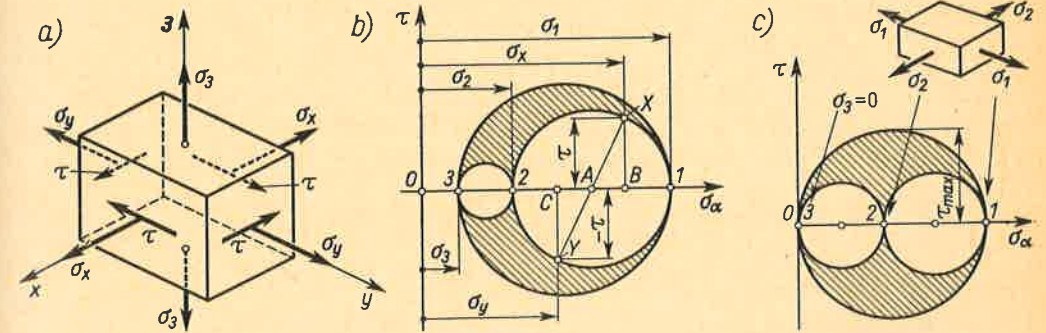


Rys. 7.7. Analiza trójwymiarowego stanu naprężenia przy szczególnym sposobie prowadzenia przekrojów



Rys. 7.8. Wynik analizy trójwymiarowego stanu naprężenia

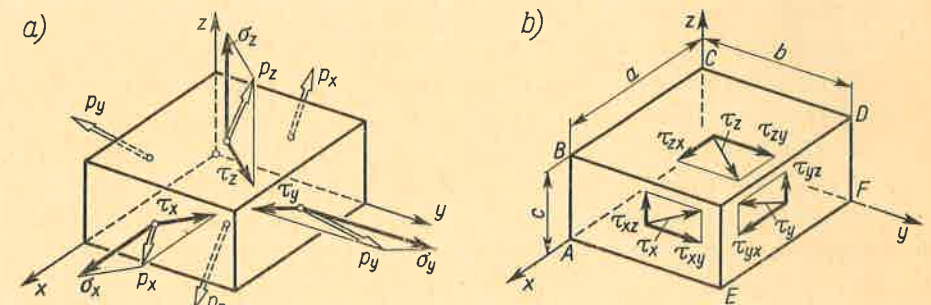
wyjściowym jedno z naprężeń normalnych, np. σ_3 , jest główne (rys. 7.9a), w takiej bowiem postaci trójwymiarowy stan naprężenia występuje w przeważającej większości zagadnień technicznych. Porównując ten obraz z rys. 7.7b widzimy, że wyznaczenie pozostałych głównych naprężeń σ_1 i σ_2 jest zagadnieniem odwrotnym płaskiego stanu σ_x, σ_y i τ ,



Rys. 7.9. Typowe zadanie odwrotne trójwymiarowego stanu naprężenia
a) obraz układu naprężeń; b) konstrukcja kół Mohra; c) wynik analizy, gdy $\sigma_3 = 0$.

a jego rozwiązanie stanowi koło Mohra $X1Y2$ (rys. 7.9b). Po naniesieniu punktu 3 reprezentującego naprężenie σ_3 dorysowujemy dwa pozostałe koła, dające pełny obraz trójwymiarowego stanu. Rozwiązanie to jest słuszne i dla dwuwymiarowego stanu (rys. 7.9c), w którym $\sigma_3 = 0$. Jak widać, takie uwzględnienie trzeciego naprężenia głównego o zerowej wartości jest istotne dla określenia τ_{max} , gdy pozostałe naprężenia główne σ_1 i σ_2 są tego samego znaku.

W odróżnieniu od przyjętego początkowo przedstawienia trójwymiarowego stanu przez naprężenia główne, ogólny obraz takiego stanu jest bardziej złożony (rys. 7.10a). Wypadkowe naprężenia p_x, p_y, p_z na poszczególnych parach ścian kostki są stałe co do



Rys. 7.10. Składowe ogólnego trójwymiarowego stanu naprężenia
a) układ wypadkowych naprężeń p_x, p_y, p_z i ich rozkład na składowe normalne $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ i wypadkowe styczne τ_x, τ_y, τ_z ; b) rozkład $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}$ na składowe $\tau_{xy}, \dots, \tau_{zx}$

wartości i kierunku, nie są one jednak prostopadłe do ścian. Określenie każdego z trzech naprężeń p wymaga podania trzech składowych. Mogłoby się więc wydawać, że do opisanego takiego stanu należy podać dziewięć niezależnych od siebie wartości, tzn. trzy skła-

dowe normalne $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ oraz sześć składowych stycznych⁽¹⁾ $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ (rys. 7.10b). Tak jednak nie jest, gdyż składowe te muszą spełniać sześć równań równowagi. Trzy z nich, a mianowicie równania sumy rzutów sił, są spełnione tożsamościowo. Nie dotyczy to jednak równań równowagi momentów i na przykład równanie takie względem osi przechodzącej przez środek kostki i równoległej do osi z daje zależność

$$\frac{\tau_{yx} A_{EFD} b}{2} + \frac{\tau_{yx} A_{ABC} b}{2} - \frac{\tau_{xy} A_{ABE} a}{2} - \frac{\tau_{xy} A_{CDF} a}{2} = 0, \quad (a)$$

w której $A_{EFD} = A_{ABC} = ac$, $A_{ABE} = A_{CDF} = bc$ oznaczają pola odpowiednich ścian EFD, \dots, CDF . Podstawienie tych wartości do równania (a) i skrócenie przez abc daje w wyniku

$$\tau_{yx} - \tau_{xy} = 0. \quad (b)$$

Pisząc analogiczne dwa równania równowagi momentów względem pozostałych osi otrzymujemy ostatecznie wynik

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad (7.9)$$

ujmujący ogólnie zasadę symetrii naprężeń stycznych, a mianowicie:

dwa składowe naprężenia styczne działające na dwóch prostopadłych ścianach i prostopadle do wspólnej ich krawędzi mają jednakowe wartości i są skierowane albo do tej krawędzi, albo od niej.

Zależność (7.9) stanowi uogólnienie zależności (d) z art. 2.5 i zależności (a) z art. 7.1, a różnica znaków jest tylko pozorna.⁽²⁾ Konsekwencją tej zależności jest, że liczba niezależnych wielkości określających ogólny stan naprężenia (rys. 7.10a) jest tylko sześć. Wielkości te, tj. $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ i τ_{zx} noszą nazwę *składowych stanu naprężenia*. Ich rola w nauce wytrzymałości materiałów jest podobna, jak pojęcie składowych wektora w mechanice. Wyjaśnia to następująca analogia. Weźmy mianowicie wektor \mathbf{R} (rys. 2.16a) i potraktujmy osie x, y jako *ustalone*. Składowe P_1 i P_2 można wtedy traktować jak skalary, połączenie ich jednak w zespół, w którym skalar P_1 odpowiada osi x , a P_2 osi y , tworzy nową wielkość fizyczną, tj. wektor \mathbf{R} , podlegającą innym prawom (np. dodawania) niż elementy składowe. Identyczną sytuację mamy w kwestii naprężeń (rys. 7.10), gdzie p_x, p_y, p_z są *wektorami* związanymi z odpowiednimi ścianami kostki (analogia do skalarów P_1 i P_2), ich jednak zespół tworzy nową, podlegającą innym prawom niż wektory, wielkość fizyczną, tj. *stan naprężenia*. Na tym tle powinno być jasne, że *dodanie do siebie wektorów naprężeń działających w dwóch różnych przekrojach jest tak samo bezsensowne i błędne, jak algebraiczne dodanie składowych wektora na różne osie.*

⁽¹⁾ W znakowaniu tym pierwszy wskaźnik określa, że naprężenie działa na ścianie prostopadłej do osi o tym wskaźniku. Wskaźnik drugi określa oś, w kierunku której działa dana składowa. Tak więc τ_{zx} jest to składowe naprężenie styczne działające na ścianie prostopadłej do osi z i równoległe do osi x .

⁽²⁾ W art. 2.5 i 7.1 rozróżniono naprężenia styczne według tendencji obrotu kostki. Było to pożyteczne przy konstrukcji koła Mohra. W analizie trójwymiarowego stanu naprężenia utrzymanie poprzedniej umowy, aczkolwiek możliwe, nie jest celowe i prościej jest od razu założyć dodatnie zwroty τ , jak na rys. 7.10b.

Zadania

1. W kostce z rys. 7.7a jest $\sigma_1 = -60$ MPa, $\sigma_2 = 30$ MPa, $\sigma_3 = -10$ MPa. Narysować układ kół Mohra, wyznaczyć naprężenia w przekroju jak na rys. 7.7b, gdy $\alpha' = 30^\circ$. Obliczyć wartość τ_{\max} .

Odp. $\sigma'_\alpha = -37,5$ MPa, $\tau'_\alpha = -39,0$ MPa, dodatnie τ'_α jak na rys. 7.7b; $\tau_{\max} = 45,0$ MPa, w przekroju dwusiecznym ($\alpha' = 135^\circ$).

2. Na kostkę (rys. 7.8b) działają $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -50$ MPa. Wyznaczyć σ_n i τ_n w dowolnym przekroju klm kostki.

Odp. $\sigma_n \equiv -50$ MPa, $\tau_n \equiv 0$, bo układ kół Mohra staje się punktem.

3. W kostce (rys. 7.9a): $\sigma_x = -80$ MPa, $\sigma_y = 0$, $\tau = 40$ MPa, $\sigma_z = \sigma_3 = 50$ MPa. Wyznaczyć τ_{\max} i położenie przekroju, w którym ono działa.

Odp. $\tau_{\max} \approx 73,3$ MPa działa w przekroju równoległym do osi 2 określonym kątem $\alpha' = 135^\circ$ (rys. 7.7c).

4. W kostce (rys. 7.9a): $\sigma_x = \sigma_y$, zaś $\tau = 30$ MPa i $\sigma_z = \sigma_3 = 50$ MPa. W jakich granicach można zmieniać σ_x , aby $\tau_{\max} \leq 50$ MPa?

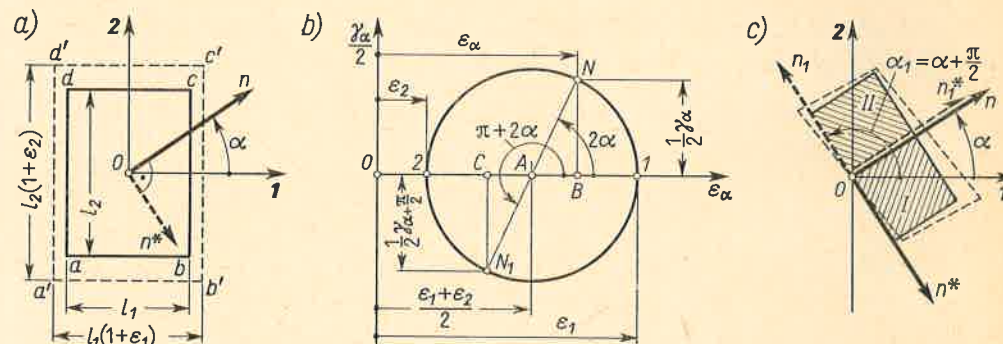
Odp. Zadanie najlepiej rozwiązać wykreślnie. Ostateczny wynik jest -20 MPa $\leq \sigma_x = \sigma_y \leq 120$ MPa.

5. W kostce (rys. 7.9a): $\sigma_y = 20$ MPa, $\tau = 30$ MPa, $\sigma_z = \sigma_3 = 50$ MPa. W jakich granicach można zmieniać σ_x , aby $\tau_{\max} \leq 50$ MPa?

Odp. -37 MPa $\leq \sigma_x \leq 100$ MPa.

7.3. Uproszczona analiza stanu odkształcenia

Analizę stanu odkształcenia rozpoczniemy od zbadania przypadku, gdy elementarna kostka $abcd$ doznaje wydłużeń względnych ε_1 i ε_2 w kierunku osi 1 i 2 , a kąty proste w narożach nie zmieniają się (rys. 7.11a). Wyznamy odkształcenie względne ε_α dla elementu



Rys. 7.11. Analiza płaskiego stanu odkształcenia

leżącego na osi n . Zadanie to sprowadza się do rozpatrzonego już w art. 2.5 przypadku (rys. 2.17), jeśli zamiast wprowadzonych tam oznaczeń: odkształcenia ε w kierunku osi x i odkształcenia $-\varepsilon$ w kierunku y wstawić odpowiednio ε_1 i ε_2 . Zostawiając czytelnikowi dokonanie tych podstawień podajemy od razu poszukiwany wynik zastępujący wzór (g) z art. 2.5, a mianowicie

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha. \quad (7.10)$$

Podobnie zamiast wzoru (j) z art. 2.5 otrzymujemy

$$\gamma_\alpha = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (7.11)$$

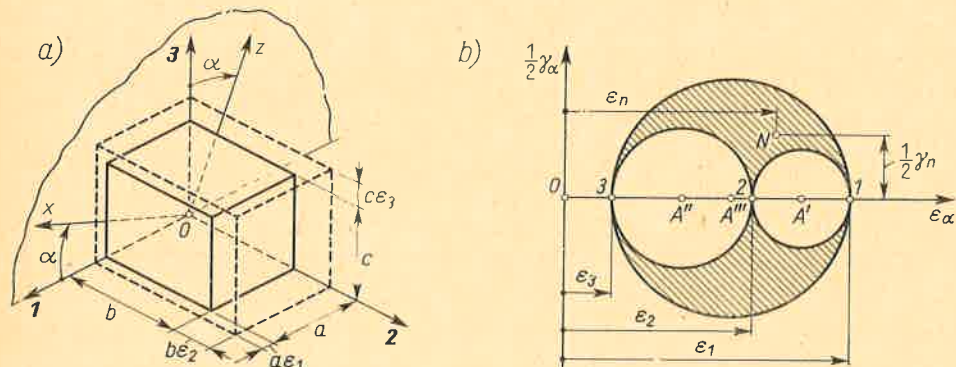
jako kąt odkształcenia postaciowego między osią On a osią stowarzyszoną On^* , obróconą względem On o kąt $(-\pi/2)$.

Porównując wzory (7.10) i (7.11) z wynikami analizy stanu naprężenia (wzory 7.1 i 7.2) widzimy, że są one identyczne, jeśli zamiast σ_α i τ_α wstawić odpowiednio ε_α i $\gamma_\alpha/2$, a kierunek normalnej n do przekroju (rys. 7.2) utożsamić z kierunkiem On , w którym określamy odkształcenie ε . Przy zachowaniu tych reguł wszystkie wnioski i rozważania z art. 7.1 można bez zmian przenieść na analizę stanu odkształcenia. W szczególności dotyczy to koła Mohra dla odkształceń (rys. 7.11b), w którym punkt N reprezentuje ε_α i $\gamma_\alpha/2$ odpowiadające kierunkowi On , a punkt N_1 wielkości $\varepsilon_{\alpha+(\pi/2)}$ i $\gamma_{\alpha+(\pi/2)}/2$, gdy kierunkiem podstawowym jest On_1 , a stowarzyszonym On_1^* . Widać, że $\gamma_{\alpha+(\pi/2)} = -\gamma_\alpha$. Jest to jasne, gdyż zmniejszeniu kąta nOn^* towarzyszy takie samo zwiększenie kąta $n_1On_1^*$ (rys. 7.11c). Ponadto mamy, że

$$\gamma_{\max} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (7.12)$$

odpowiada kierunkowi dwusiecznej między osiami **1** i **2**. Tak samo transponujemy pojęcia prostopadłych do siebie *kierunków głównych*, które po odkształceniu zostają prostopadłe ($\gamma_\alpha = 0$). Odpowiadające kierunkom głównym *wydłużenia główne* ε_1 i ε_2 są ekstremalnymi wartościami wszystkich wydłużeń ε_α . Podobne wreszcie są zagadnienia. Tak więc mamy zagadnienia *proste* (dane kierunki główne oraz ε_1 i ε_2 , poszukiwane ε_α i γ_α w podanym kierunku) i *odwrotne*, gdy w stadium wyjściowym są dane wydłużenia ε_x i ε_y w kierunku osi x i y oraz kąt γ_{xy} odpowiadający tym osiom, a szukamy głównych kierunków i głównych wydłużeń.

Otrzymane wyniki umożliwiają analizę trójwymiarowego stanu odkształcenia, gdy elementarna kostka zostając prostopadłością doznaje względnych odkształceń $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$



Rys. 7.12. Analiza trójwymiarowego stanu odkształcenia

w kierunku osi **1, 2, 3** (rys. 7.12a). Określenie odkształceń względnych w kierunkach prostopadłych do siebie osi x i z leżących w płaszczyźnie (**1, 3**) jest powtórzeniem zadania z rys. 7.11. W rezultacie te odkształcenia ε_x i ε_z oraz kąt odkształcenia postaciowego γ_{xz}

reprezentowane są punktami koła Mohra zbudowanego na odkształceniach ε_1 i ε_3 , jako głównych. Podobnie dla osi leżących w płaszczyznach (**1, 2**) i (**2, 3**) otrzymujemy punkty kół Mohra zbudowanych odpowiednio na odciętych ε_1 i ε_2 oraz na ε_2 i ε_3 (rys. 7.12b). Okazuje się, że dla dwóch dowolnie zorientowanych w przestrzeni i prostopadłych do siebie kierunków wydłużenie ε_n w jednym z kierunków i kąt odkształcenia postaciowego γ_n między tymi kierunkami jest odwzorowany punktem N leżącym w zakreskowanym obszarze.

To ostatnie, podane bez dowodu, stwierdzenie i analiza rys. 7.12 pozwala sformułować następujące podstawowe wnioski;

a. W każdym stanie odkształcenia istnieją tylko trzy kierunki, tzw. *główne*, między którymi pierwotne kąty proste nie ulegają zmianie. Odpowiadające tym kierunkom względne odkształcenia $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ noszą nazwę *odkształceń głównych*.

b. Maksymalny kąt odkształcenia postaciowego jest równy średnicy największego koła Mohra dla danego stanu odkształcenia.

Badanie zmian wymiarów i postaci kostki uzupełnimy określeniem zmian pola ścian i objętości kostki. Zauważmy, że pierwotne długości a, b, c boków kostki są po odkształceniu

$$a(1 + \varepsilon_1), \quad b(1 + \varepsilon_2), \quad c(1 + \varepsilon_3). \quad (a)$$

Zmiana $\Delta A_{1,2}$ pola $A_{1,2} = ab$ ściany w płaszczyźnie (**1,2**) jest

$$\Delta A_{1,2} = a(1 + \varepsilon_1)b(1 + \varepsilon_2) - ab \approx ab(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad (b)$$

gdyż iloczyn $\varepsilon_1\varepsilon_2$ można pominąć jako małą wyższego rzędu. Względna zmiana pola jest iloraz

$$\Delta A_{1,2}/A_{1,2} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (c)$$

Podobnie względne zmiany pól $A_{2,3} = bc$ i $A_{3,1} = ca$ są

$$\Delta A_{2,3}/A_{2,3} = \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \Delta A_{3,1}/A_{3,1} = \varepsilon_3 + \varepsilon_1, \quad (d)$$

czyli słowami: względna zmiana pola danej ściany jest równa algebraicznej sumie względnych odkształceń w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach leżących na tej ścianie.

Analogicznie obliczamy zmianę ΔV objętości $V = abc$ kostki

$$\Delta V = a(1 + \varepsilon_1)b(1 + \varepsilon_2)c(1 + \varepsilon_3) - abc \approx abc(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

gdzie znowu zaniedbano iloczyny odkształceń ε . Względna zmiana objętości $e = \Delta V/V$ jest równa algebraicznej sumie względnych odkształceń w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (7.13)$$

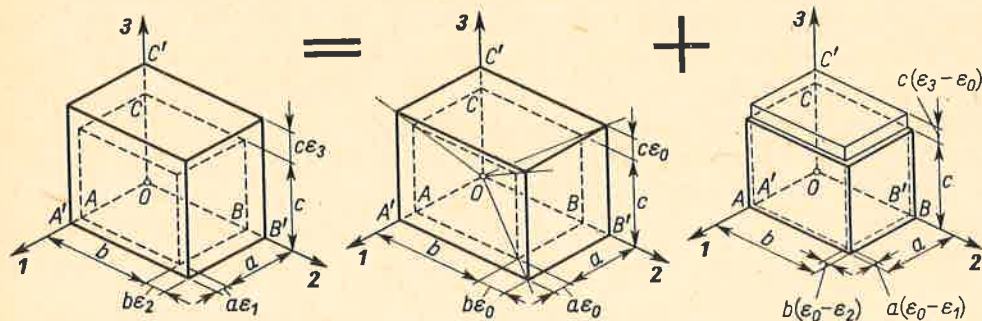
Wielkości wyrażone wzorami (c), (d), (7.13) są liczbami oderwanymi, które należy traktować jako cm^2/cm^2 lub cm^3/cm^3 .

Każdy ogólny stan odkształcenia można przedstawić jako superpozycję dwóch stanów (rys. 7.13). Pierwszy z nich ma jednakowe w kierunkach osi **1, 2, 3** względne odkształcenie

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3 \quad (e)$$

i taką samą wartość e jak ogólny stan. Układ kół Mohra (rys. 7.12) redukuje się do punktu, a więc w tym stanie nie ma żadnych odkształceń postaci i w każdym kierunku $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Oznacza to, że po odkształceniu kostka, a ogólnie dowolna bryła, zachowuje swój kształt (sześciąt jest sześciątem, kula — kulą) zmieniając jednakowo wszystkie wymiary liniowe. W stanie drugim zmiana objętości jest, jak wynika z wzoru (7.13), równa zero, a więc zachodzi tu tylko zmiana postaci ciała (kostki). Biorąc te cechy pod uwagę nazywamy stan pierwszy *czystym odkształceniem objętościowym*, drugi *czystym odkształceniem postaciowym*. W tej zatem terminologii każdy stan odkształcenia daje się przedstawić jako sumę czystego odkształcenia objętościowego i czystego odkształcenia postaciowego.

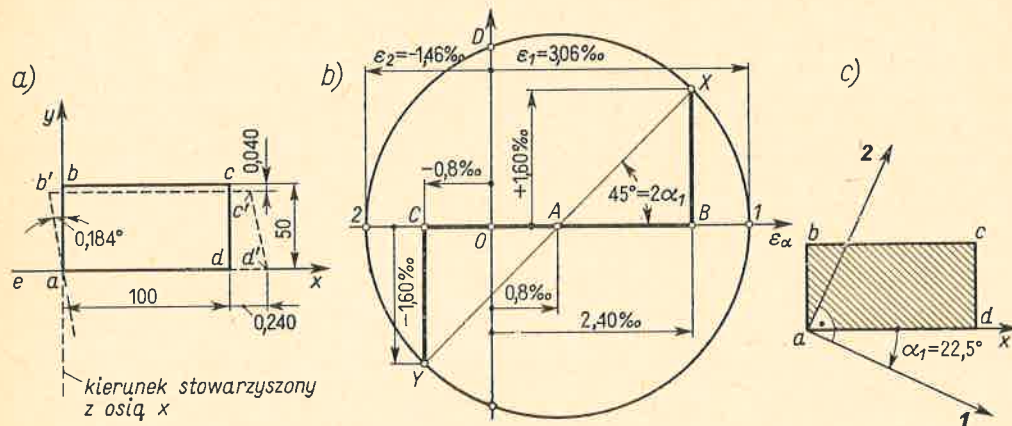


Rys. 7.13. Rozkład ogólnego stanu odkształcenia na czysto objętościowy i czysto postaciowy

Opisana interpretacja ma duże znaczenie techniczne. Z doświadczeń okazuje się mianowicie, że podczas przeróbki plastycznej $e \approx 0$ dla każdego elementu ciała, czyli że w takiej przeróbce zachodzi prawie wyłącznie czyste odkształcenie postaciowe.

Zadania

1. Kwadratowy element o boku $l_1 = l_2 = 10$ cm (rys. 7.11a) doznał skrócenia krawędzi ab o 0,10 mm i wydłużenia krawędzi ad o 0,15 mm. Wyznaczyć ϵ_α i γ_α , gdy $\alpha = -30^\circ$.
Odp. $\epsilon_{-30^\circ} = -0,37\%$, $\gamma_{-30^\circ} = -2,16 \cdot 10^{-3}$ rad $\approx -0,124^\circ$.



Rys. 7.14. Przykład rozwiązania zagadnienia odwrotnego

2. Prostokątny element doznał odkształceń podanych na rys. 7.14a. Stosując koło Mohra wyznaczyć główne kierunki i wartości ϵ_1, ϵ_2 .

Odp. Rozwiązanie podają rys. 7.14b i c, przy czym $\epsilon_x = 2,4\%$, $\epsilon_y = -0,8\%$. Kąt $\gamma_{xy} = +0,184^\circ = 3,2 \cdot 10^{-3}$ rad > 0 , bo podstawowemu kierunkowi x odpowiada *zmniejszenie* kąta prostego.

3. Wyznaczyć całkowitą zmianę powierzchni i objętości kostki (rys. 7.12a), jeśli $a \times b \times c = 5 \times 8 \times 10$ cm, zaś $\epsilon_1 = -0,5\%$, $\epsilon_2 = 0,3\%$, $\epsilon_3 = 0,6\%$.

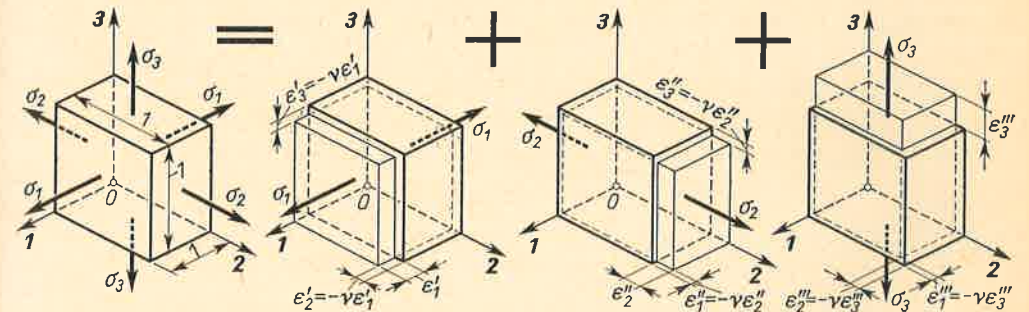
Odp. $0,138$ cm²; $0,160$ cm³.

4. Obliczyć zmianę pola poprzecznego przekroju rozciąganego pręta (rys. 1.14a), jeśli $\epsilon = \sigma/E = 1,5\%$, $\nu = 0,3$, $A = 10$ cm². Jaka jest względna zmiana objętości?

Odp. Każda elementarna kostka (rys. 1.14b) ma w kierunku poprzecznym odkształcenia $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -\nu\epsilon = -0,45\%$. Zmiana pola jest więc: $\Delta A = A(\epsilon_1 + \epsilon_2) = -2\nu\epsilon A = -0,9$ mm² (zmniejszenie pola). Odkształcenie objętościowe $e = \epsilon(1 - 2\nu) = 0,6\%$.

7.4. Uogólnione prawo Hooke'a

W dotychczasowym ujęciu stany naprężenia i odkształcenia traktowano jako zjawiska niezależne. Tak jednak nie jest, gdyż, jak to pokazano w przypadku rozciągania, istnieje między nimi przyczynowy związek. Na ogół związek ten nie jest prosty i przechodzi różne fazy zależnie od wartości σ i od przebiegu procesu obciążania (rys. 1.16). Tylko dla stanów sprężystych, gdy zależność $\sigma(\epsilon)$ jest liniowa i jednoznaczna⁽¹⁾, ogólny związek między



Rys. 7.15. Trójwymiarowy stan naprężenia jako superpozycja trzech stanów prostego rozciągania

składowymi obydwóch stanów, tzw. *uogólnione prawo Hooke'a*, ma prostą postać. Rozkładając mianowicie według zasady superpozycji ogólny stan naprężenia (rys. 7.15) na trzy stany prostego rozciągania z wzorów (1.10) i (1.11) mamy dla każdego z nich następujące wydłużenia względne:

stan I: $\epsilon'_1 = \sigma_1/E, \quad \epsilon'_2 = -\nu\sigma_1/E, \quad \epsilon'_3 = -\nu\sigma_1/E,$
 stan II: $\epsilon''_1 = -\nu\sigma_2/E, \quad \epsilon''_2 = \sigma_2/E, \quad \epsilon''_3 = -\nu\sigma_2/E,$
 stan III: $\epsilon'''_1 = -\nu\sigma_3/E, \quad \epsilon'''_2 = -\nu\sigma_3/E, \quad \epsilon'''_3 = \sigma_3/E.$

⁽¹⁾ Gdy istnieją trwałe odkształcenia, wówczas zależność $\sigma(\epsilon)$ jest niejednoznaczna, jak na rys. 1.16a, gdzie danej wartości σ może odpowiadać punkt na linii OA, EF itd.

Jednoczesnemu działaniu σ_1 , σ_2 i σ_3 odpowiadają odkształcenia ε_1 , ε_2 i ε_3 równe sumie skutków składowych. W wyniku uogólnione prawo Hooke'a otrzymuje postać:

$$\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]/E, \quad \varepsilon_2 = [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]/E, \quad \varepsilon_3 = [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]/E. \quad (7.14)$$

Podobnie określamy względną zmianę objętości

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (1 - 2\nu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/E. \quad (7.15)$$

W ciekawym z wielu powodów stanie hydrostatycznego ściskania⁽¹⁾ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ i wtedy z wzorów (7.14) i (7.15) mamy

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -p(1 - 2\nu)/E, \quad (a)$$

$$e = -3p(1 - 2\nu)/E = -p/K, \quad (7.16)$$

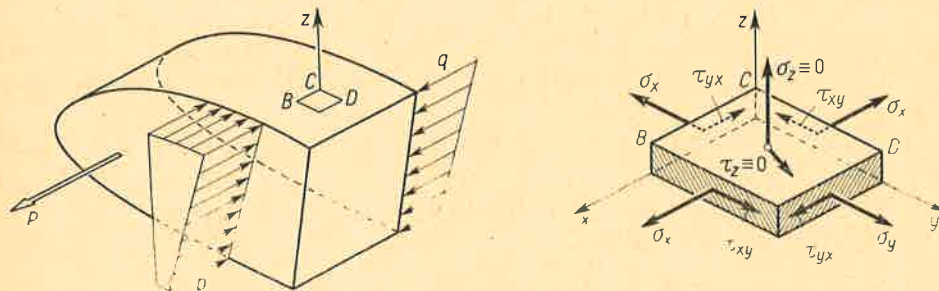
gdzie $K = E/3(1 - 2\nu)$ — tzw. *moduł ściśliwości* materiału jest stałą zależną od podstawowych stałych, tj. E i ν . Z zależności (a) wynika, że w tym stanie odkształcenie jest czysto objętościowe (rys. 7.13). Z doświadczeń wiadomo ponadto, że w tym stanie wszystkie ciała zmniejszają swą objętość, czyli że $e < 0$. Oznacza to, że $K > 0$, zaś $\nu < 0,5$, jak to już podano w art. 1.7.

Dla większości materiałów moduł K jest rzędu modułu E . Do wyjątków należy guma, dla której $\nu = 0,47 \div 0,495$, a K może być o dwa rzędy większy od E . Ponieważ moduły E oraz G są dla gumy małe (rzędu $2 \div 8$ MPa), wynika stąd, że guma łatwo poddaje się zmianom postaci, a bez porównania trudniej zmianom objętości. Fakt ten należy brać pod uwagę przy kształtowaniu elementów gumowych, gdy zależy nam na ich dużej podatności.

Wzory (7.14) określają odkształcenia w funkcji naprężeń. Zagadnienie *odwrotne* spotykamy w praktyce laboratoryjnej, gdy z pomiarów znamy wartości ε_1 , ε_2 i ε_3 , a szukamy wartości σ . Odpowiedź otrzymujemy rozwiązując układ równań (7.14):

$$\sigma_1 = \mu e + 2G\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = \mu e + 2G\varepsilon_2, \quad \sigma_3 = \mu e + 2G\varepsilon_3, \quad (7.17)$$

gdzie symbole e i G są już znane, a $\mu = \nu E/(1 + \nu)(1 - 2\nu)$.



Rys. 7.16. Stan naprężenia na swobodnej powierzchni ciała

Jako szczególny przypadek stanu ogólnego zbadajmy płaski stan naprężenia. W tym stanie, między innymi, znajdują się wszystkie elementy swobodnej powierzchni dowolnego

⁽¹⁾ Najprostszym sposobem jego realizacji jest działanie ciśnienia p cieczy na ciało w niej zanurzone. Badanie tego stanu daje wiele rewelacji o fizycznych właściwościach materiałów.

ciała (rys. 7.16), to znaczy takiej, na którą nie działają siły powierzchniowe. Porównując bowiem taką elementarną kostkę, której swobodna ścianka BCD ma $\sigma_z \equiv 0$, $\tau_z \equiv 0$, z kostką (rys. 7.10) widzimy, że oddziaływania reszty ciała mają postać płaskiego stanu naprężenia, gdyż $\tau_{zx} = \tau_{xz} = 0$ i $\tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$. Jeśli ten stan jest przedstawiony przez naprężenia główne ($\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_z = \sigma_3 = 0$), to z wzorów (7.14) mamy

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \nu\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \nu\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{\nu(\sigma_1 + \sigma_2)}{E}. \quad (7.18)$$

Zależności (7.18) mają to samo znaczenie co poprzednie wzory (7.14). Zagadnienia odwrotne mają nieco inną postać, albowiem tylko dwie wielkości ε są niezależne. W praktyce laboratoryjnej tymi wielkościami są zazwyczaj ε_1 i ε_2 , gdyż ich pomiar jest najłatwiejszy. Rozwiązując pierwsze i drugie równanie (7.18) względem σ_1 i σ_2 mamy

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad \sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1). \quad (7.19)$$

Podane tutaj uogólnione prawo Hooke'a słuszne jest tylko dla sprężystych materiałów izotropowych, gdyż milcząco założono, że działanie naprężeń w kierunkach osi **1, 2, 3** podlega tym samym prawom (1.10) i (1.11). W materiałach anizotropowych analogiczne zależności są bardziej złożone.⁽¹⁾ Również bardziej złożona jest kwestia korelacji kierunków głównych odkształceń i głównych naprężeń. W materiałach izotropowych, jak to wynika z doświadczeń nad rozciąganiem (rys. 1.8), kierunki te pokrywają się, natomiast w materiałach anizotropowych na ogół tak nie jest.

Zadania

1. Na duralową kostkę ($E = 7 \cdot 10^4$ MPa, $\nu = 0,35$) działają główne naprężenia: $\sigma_1 = 120$ MPa, $\sigma_2 = -80$ MPa, $\sigma_3 = 60$ MPa. Wyznaczyć główne odkształcenia względne oraz e i γ_{\max} .

Odp. $\varepsilon_1 = 1,8\%$, $\varepsilon_2 = -2,1\%$, $\varepsilon_3 = 0,7\%$, $e \approx 0,4\%$, $\gamma_{\max} = 3,9 \cdot 10^{-3}$ rad.

2. Pomierzone doświadczalnie główne odkształcenia stalowej kostki ($E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$) są: $\varepsilon_1 = -0,5\%$, $\varepsilon_2 = 0,7\%$, $\varepsilon_3 = 0,3\%$. Wyznaczyć główne naprężenia i wartość τ_{\max} .

Odp. $\sigma_1 = -20$ MPa, $\sigma_2 = 174$ MPa, $\sigma_3 = 109$ MPa, $\tau_{\max} = 97$ MPa.

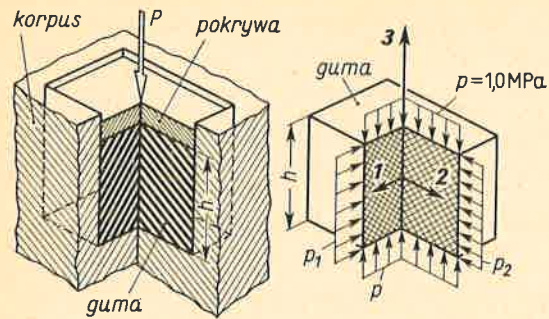
3. Jak zmieni się odkształcenie ściskanej gumowej kostki ($E = 4$ MPa, $\nu = 0,49$, $p = 1$ MPa), jeśli przed odkształceniem włożyć ją bez luzu we wnękę nieodkształcalnego korpusu (rys. 7.17)? Tarcie między gumą a korpusem można pominąć. $h = 5$ cm.

Odp. Pierwotnie $\Delta h' = -hp/E = -12,5$ mm. Po włożeniu kostki w korpus stan naprężenia tworzą: znane $\sigma_3 = -p = -1$ MPa i nieznanne oddziaływania korpusu na kostkę $\sigma_1 = -p_1$, $\sigma_2 = -p_2$. Korpus jest nieodkształcalny, a więc $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ i z (7.14) mamy: $\sigma_1 = \sigma_2 = -\nu p/(1 - \nu) = -0,96$ MPa oraz $\varepsilon_3 \approx -1,48\%$ i $\Delta h'' = h\varepsilon_3 = -0,74$ mm. Stosunek $\Delta h'/\Delta h'' \approx 17$. Ten duży wzrost sztywności może mieć w praktyce znaczenie dodatnie lub ujemne, zależnie od przeznaczenia elementu.

4. Jak zmienią się wyniki poprzedniego zadania, jeśli wnęka w korpusie i kostka mają kształt cylindra?

Odp. Nie zmienią się, jeśli jest to samo p .

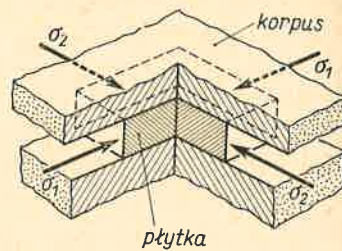
⁽¹⁾ Patrz: M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, cz. 1, Warszawa 1954, PWN, również S. G. Lechnicki, *Teoria uprugi anizotropnego ciała*, Moskwa-Leningrad 1950, Gos. Izdat, Tech. Teoriet. Lit.



Rys. 7.17.

5. Na zamkniętą między pokrywami nieodkształcalnego korpusu cienką płytkę działają $\sigma_1 = -100$ MPa i $\sigma_2 = -60$ MPa (rys. 7.18). Obliczyć naciski płytki na korpus, jeśli $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,28$.

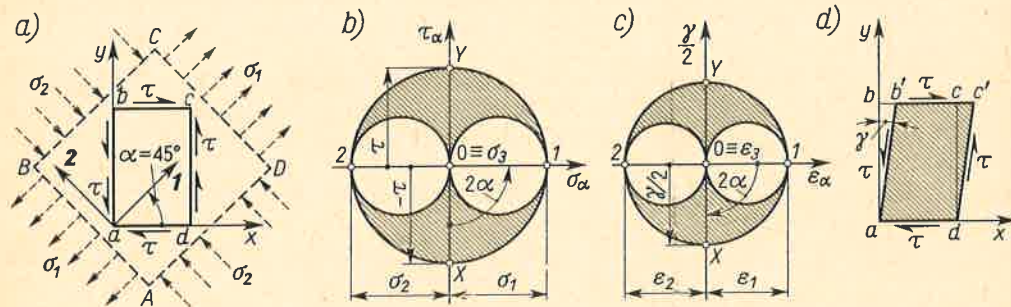
Odp. Ponieważ $\epsilon_3 = 0$, zatem $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) = -45$ MPa, a nacisk na pokrywy korpusu $p = -\sigma_3 = 45$ MPa.



Rys. 7.18.

7.5. Uwagi końcowe

Treść tego rozdziału dzieli się na trzy fragmenty. Pierwszy z nich to analiza stanu naprężenia. Otrzymane w jej wyniku zależności dają możliwość określenia naprężeń w dowolnym przekroju, o ile tylko znamy naprężenia na ścianach kostki. Ten ostatni warunek, tj. znajomość sześciu składowych stanu naprężenia, jest konieczny i wystarczający do jednoznacznego rozwiązania zagadnienia. Przytoczone przykłady wskazują, że dany stan naprężenia można różnie przedstawić zależnie od sposobu wycięcia elementarnej kostki. Najprostszym z tych sposobów jest przedstawienie stanu przez naprężenia główne.



Rys. 7.19. Analiza stanu czystego ścinania

Fragment drugi obejmujący analizę stanu odkształcenia stanowi pełną analogię do pierwszego i daje identyczne wyniki, jeśli tylko zamiast naprężeń σ_α i τ_α wstawić odpowiednio ϵ_α i $\gamma_\alpha/2$. Wspólną cechą obydwóch analiz jest, że wyniki nie zależą zupełnie od właściwości materiału, w pierwszym bowiem przypadku są one następstwem warunków równowagi, w drugim — następstwem przesłanek geometrycznych. Jednoznaczny związek

obydwóch stanów występuje tylko dla ciała sprężystego. Dla materiałów izotropowych wyraża się on uogólnionym prawem Hooke'a omówionym jako trzeci fragment rozdziału.

Na tle tych uwag celowe jest właściwe umieszczenie stanu czystego ścinania. Według definicji z art. 3.1 stan ten cechuje działanie samych tylko naprężeń τ (rys. 7.19a), podczas gdy ściany kostki równoległe do płaszczyzny rysunku są swobodne, tj. $\sigma_3 = 0$. Obliczone z kół Mohra (rys. 7.19b) naprężenia główne są

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau, \quad \sigma_3 = 0, \tag{a}$$

przy czym σ_1 i σ_2 działają na bokach kostki ABCD obróconej o kąt $\alpha = \pi/4$ względem osi x . Tym naprężeniom odpowiadają główne odkształcenia wyznaczone z wzorów (7.14)

$$\epsilon_1 = \tau(1+\nu)/E, \quad \epsilon_2 = -\tau(1+\nu)/E, \quad \epsilon_3 = 0 \tag{b}$$

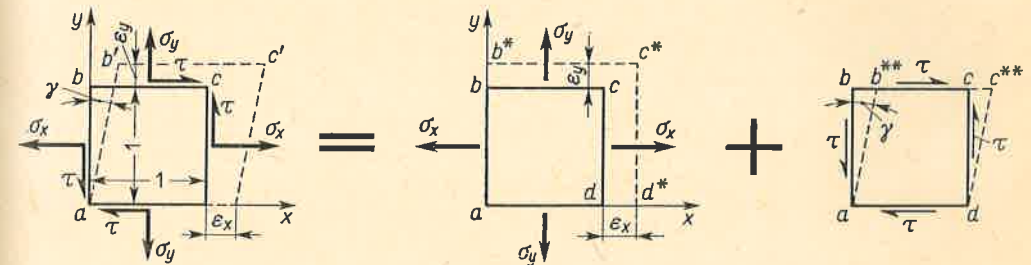
oraz $e = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$. Tak więc odkształcenie w stanie czystego ścinania jest czysto postaciowe, jak to omówiono w art. 3.1. Podobnie z układu kół Mohra dla odkształceń (rys. 7.19c) mamy w układzie osi x, y , że $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$ oraz

$$\gamma = 2\epsilon_1 = 2\tau(1+\nu)/E, \tag{c}$$

lub w formie wzoru (3.1)

$$\gamma = \tau/G,$$

co oznacza, że w stanie czystego ścinania ściana abcd kostki zamienia się w równoległobok bez zmiany długości boków, a kąt dab ulega zmniejszeniu.



Rys. 7.20. Rozkład dowolnego stanu płaskiego na dwa prostsze

W przedstawionym powyżej ujęciu stan czystego ścinania przestaje być czymś wyjątkowym, a staje się jednym z wariantów płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia ($\epsilon_3 = 0$). Niemniej użycie tego stanu jako składnika umożliwia przejrzysty opis odkształceń kostki bez wyznaczania naprężeń głównych. Rozłożmy mianowicie płaski stan naprężenia na dwa (rys. 7.20). W pierwszym z nich σ_x, σ_y oraz $\sigma_z = 0$ są naprężeniami głównymi, a odpowiadające im odkształcenia określone są z wzorów (7.18). W drugim z nich mamy tylko odkształcenie postaci. W rezultacie wypadkowe odkształcenia są

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E}, \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E}, \quad \epsilon_z = -\frac{\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}, \quad \gamma = \frac{\tau}{G}. \tag{7.20}$$

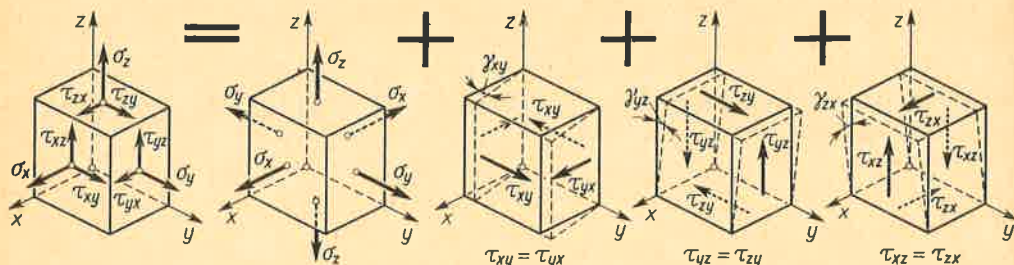
Podobnie określamy odkształcenia w trójwymiarowym stanie naprężenia jako superpozycję czterech stanów (rys. 7.21). W wyniku mamy

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]/E, \\ \varepsilon_y &= [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]/E, \\ \varepsilon_z &= [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]/E \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

oraz trzy odkształcenia postaciowe określone kątami

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G, \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G, \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G. \quad (7.22)$$

Efektom tych odkształceń postaciowych jest zamiana kostki na równoległościan. Nakładające się na to działanie σ_x, σ_y i σ_z powoduje zmianę długości jego krawędzi.



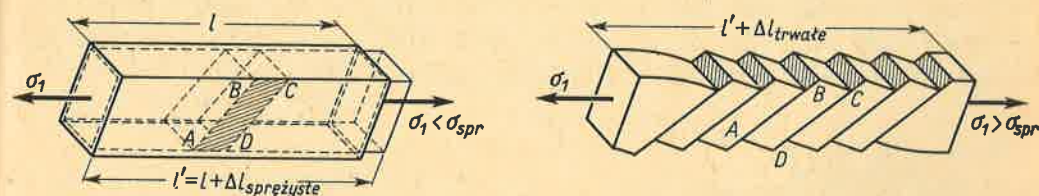
Rys. 7.21. Rozkład dowolnego trójwymiarowego stanu na cztery prostsze

Pokazany sposób opisu odkształceń jest celowy, gdy obiektem badania jest całe ciało. Wtedy bowiem elementarne kostki są jednakowo zorientowane w stosunku do stałego układu osi x, y, z , a ich ściany nie są z reguły przekrojami głównymi. Widzieliśmy to w poprzednich rozdziałach, gdzie jako oś x obierano oś pręta, a osie y i z wiązano w pewien wyróżniony sposób z przekrojem poprzecznym.

8 HIPOTEZY WYTRZYMAŁOŚCIOWE. WYTRZYMAŁOŚĆ ZŁOŻONA PRĘTA

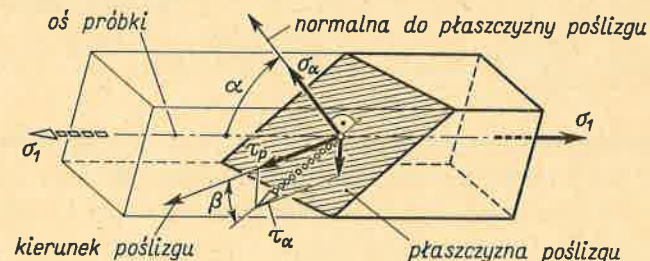
8.1. Zjawiska towarzyszące trwałym odkształceniom

Opisując wykres rozciągania stwierdzono, że płynięciu materiału towarzyszy zjawisko poślizgów. Występuje ono szczególnie wyraźnie przy rozciąganiu próbek wyciętych z dużych monokryształów metalu (rys. 8.1). Z początku, gdy $\sigma_1 < \sigma_{spr}$, próbka wydłuża się równomiernie, a jej powierzchnia jest gładka. Gdy $\sigma_1 > \sigma_{spr}$, wydłużenie staje się *nierówno-*



Rys. 8.1. Obraz sprężystych i plastycznych odkształceń próbki monokrystalicznej

mierne. Poszczególne plasterki próbki, jak $ABCD$, ślizgają się po sobie jako widoczne gołym okiem sztywne bloki, a próbka, jako całość, doznaje trwałego wydłużenia. Badania rentgenograficzne wykazują, że położenie płaszczyzn przesunięć, tzw. *płaszczyzn poślizgu*,



Rys. 8.2. Obraz naprężeń w płaszczyźnie i kierunku poślizgu

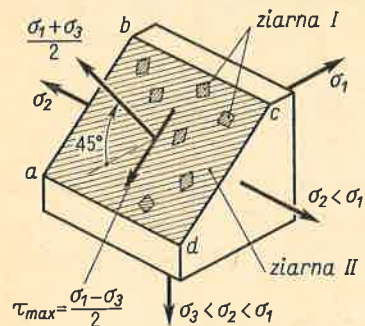
względem siatki atomów monokryształu jest stałe. Również stały w odniesieniu do siatki jest kierunek przesunięcia w płaszczyźnie poślizgu, tzw. *kierunek poślizgu*. W stosunku natomiast do osi próbki (rys. 8.2) położenie tej uprzywilejowanej płaszczyzny (kąt α)

i kierunku poślizgu (kątem β) może być różne, albowiem z danego monokryształu można wyciąć próbki o różnej orientacji osi względem jego siatki. Okazuje się z doświadczeń, że w tych różnie wyciętych próbkach poślizg bloków występuje, gdy składowe naprężenie styczne τ_p , działające w płaszczyźnie i kierunku poślizgu, osiąga pewną krytyczną wartość τ_0 , stałą dla danego monokrystalicznego materiału. Ponieważ według (2.14) całkowite naprężenie styczne w płaszczyźnie poślizgu jest $\tau_\alpha = \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha$, zaś $\tau_p = \tau_\alpha \cos \beta$, zatem wynik wspomnianych doświadczeń daje się ująć w tzw. *prawo Schmid*

$$\tau_p = \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta = \tau_0 = \text{const.} \quad (a)$$

Okazuje się ponadto, że naprężenie normalne $\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha$ nie wpływa zupełnie na zjawisko poślizgu, przynajmniej w tym zakresie, jaki udało się zbadać. Wynika stąd podstawowy wniosek, że *pojawienie się w monokryształach trwałych odkształceń zależy wyłącznie od wartości naprężenia stycznego w przekroju i kierunku zorientowanych w szczególny sposób względem siatki kryształu.*

Powyższy opis nie tłumaczy wcale mechanizmu poślizgu, który w swej istocie jest procesem molekularnym zależnym przede wszystkim od składu materiału, budowy siatki krystalicznej i jej odchyżeń od regularności, tzw. defektów. Defekty te mają decydujący wpływ na wartość τ_0 . Przy dużej gęstości τ_0 jest zaledwie $1 \div 10$ MPa, przy ich braku, jak w tzw. *kryształach iglastych*, $\tau_0 \approx G/30$, a więc wartość o cztery rzędy większa. Duży też wpływ mają domieszki: zanieczyszczenie rzędu 0,01% zwiększają τ_0 o kilkadziesiąt procent. Wszystkie te zagadnienia są przedmiotem fizyki ciała stałego.⁽¹⁾

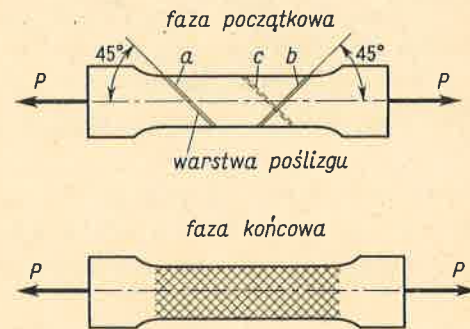


Rys. 8.3. Rola niejednorodności w zapoczątkowaniu poślizgu

W materiałach polikrystalicznych, jakimi są metale stosowane w technice, przebieg zjawiska poślizgu jest bardziej złożony. Chaotyczne ustawienie ziaren utrudnia bardzo zapoczątkowanie poślizgu, a granice ziaren blokują rozszerzanie się poślizgu z jednego ziarna na sąsiednie. Weźmy mianowicie kostkę o trójwymiarowym stanie naprężenia (rys. 8.3). Płaszczyzna $abcd$, w której $\tau_\alpha = \tau_{\max}$, przecina tylko niewielką część ziaren (ziarna I) w sposób odpowiadający mechanizmowi poślizgu w pojedynczym kryształce, to

⁽¹⁾ Patrz: Ch. Kittel, *Wstęp do fizyki ciała stałego*, Warszawa 1960, PWN, A. H. Cottrell, *Dislocations and Plastic Flow in Crystals*, Oxford 1958, University Press.

znaczy tak, że płaszczyzna $abcd$ pokrywa się z uprzywilejowaną płaszczyzną poślizgu, a kierunek τ_{\max} pokrywa się z kierunkiem poślizgu. Można przyjąć, że w ziarnach tych przy wzroście τ_{\max} najwcześniej wystąpi poślizg. Pozostałe ziarna II odmiennie usytuowane względem płaszczyzny $abcd$ są bardziej odporne. Trwały poślizg ziaren I wystąpi dopiero wtedy, gdy otaczające sprężyste ziarna II odpowiednio się odkształcą. Ze swej więc natury poślizg w materiale polikrystalicznym jest odkształceniem *niejednorodnym*. Przy dalszym wzroście obciążenia uplastycznione ziarna I nie zwiększają już swego oporu. Nadwyżka zatem obciążenia powoduje wzrost naprężeń tylko w sprężystej części materiału. To z kolei wywołuje lokalne poślizgi w sprężystych dotąd ziarnach. Na skutek ich odmiennej orientacji płaszczyzny poślizgu w tych następnych kryształach różnią się od płaszczyzny $abcd$. W wyniku makroskopowy poślizg w materiale polikrystalicznym obejmuje bloki, jak $ABCD$ na rys. 8.1, oddzielone od siebie *warstwami poślizgu o skończonej grubości* (rzędu $10^{-3} \div 10^{-4}$ cm), a nie płaszczyznami poślizgu, jak w monokryształach. Przecięcie warstw poślizgu z powierzchnią ciała daje pod lupą wrażenie linii. Te tak zwane *linie Lüdersa* łatwo można zaobserwować w miękkich stalach o wyraźnej granicy plastyczności. W próbce rozciąganej są one nachylone do osi pod kątem 45° . Wskazuje to, że warstwy poślizgu pokrywają się z płaszczyznami, w których działa τ_{\max} (rys. 8.4). Ich liczba w początku niewielka (linie a i b) wzrasta wraz z odkształceniem, przy czym nowe linie (linia c) krzyżują się z poprzednimi, tak że w końcu cała powierzchnia pokryta jest siatką linii odpowiadających kolejnym warstwom poślizgów. Jak wykazują pomiary, bloki ciała między warstwami poślizgu zachowują się sprężyste, tak że całe prawie trwałe odkształcenie koncentruje się w samych warstwach poślizgu.



Rys. 8.4. Poślizgi w materiale polikrystalicznym

8.2. Hipotezy wytrzymałościowe: Hubera i τ_{\max}

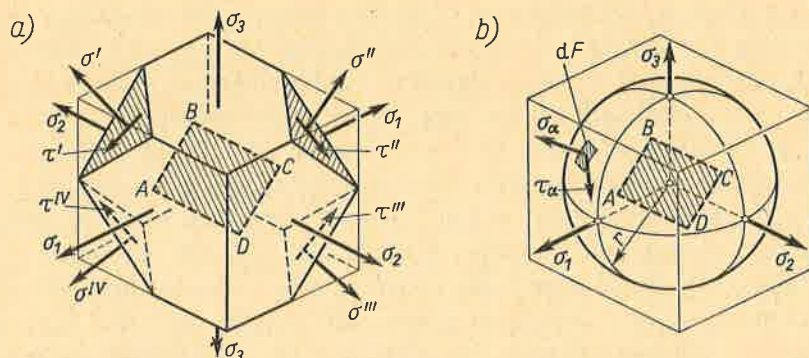
Ścisłe ilościowe ujęcie złożonych zjawisk towarzyszących pojawieniu się w materiałach polikrystalicznych makroskopowych trwałych odkształceń nie jest możliwe. Ujęcie przybliżone jest przedmiotem tzw. *hipotez wytrzymałościowych*. Pomijając hipotezy niezgodne z fizycznym obrazem zjawisk, zajmiemy się tylko dwiema, a mianowicie *hipotezą Hubera*, zwaną również *hipotezą energii odkształcenia postaciowego*, oraz *hipotezą maksymalnych naprężeń stycznych*, w skrócie — *hipotezą τ_{\max}* lub *Coulomba-Treski*.

Jak wiemy, pojawienie się trwałych odkształceń w najmniej odpornym ziarnie I (rys. 8.3) zależy nie tylko od wartości τ_{\max} , lecz i od podparcia udzielonego przez otoczenie. Podparcie to jest tym skuteczniejsze, im mniejsze są naprężenia styczne działające w ziarnach otaczających. O poślizgu więc w elemencie $ABCD$ wyobrażającym przekrój ziarna I (rys. 8.5a) współdecydują naprężenia τ' , τ'' , ... we wszystkich przekrojach malutkiej kostki otaczającej ziarno. Ponieważ materiał jest izotropowy (makroskopowo), zatem uzasadnione jest założenie, że te naprężenia τ' , τ'' , ... współdecydują w *jednakowej mierze* o losie elementu $ABCD$. Spełnienie tego postulatu równouprawnienia, jak i uwidocznienie wszystkich możliwych naprężeń τ , otrzymamy wycinając w otoczeniu elementu $ABCD$ kulę (rys. 8.5b). W takim statystycznym ujęciu miarą znaczenia naprężenia τ_α działającego na elementarne pole dF tej powierzchni kulistej jest iloczyn $\tau_\alpha^2 dF$. Wprowadzenie τ_α^2 uwzględni w naj-

prostszy sposób⁽¹⁾ fakt, że pojawienie się poślizgu zależy tylko od absolutnej wartości τ_α , a czynnik dF , stanowi miarę udziału tego τ_α w stosunku do całego pola $F = 4\pi r^2$ powierzchni kuli. Miarą współdziałania wszystkich naprężeń jest *średnie efektywne naprężenie*

$$\tau_{ef} = \sqrt{\frac{1}{F} \int \tau_\alpha^2 dF}, \quad (a)$$

gdzie całkowanie obejmuje całą powierzchnię kuli, a wyciągnięcie kwadratowego pierwiastka kompensuje poprzednie wprowadzenie τ_α^2 . Szczegółowe przeliczenia⁽²⁾ uzależniają



Rys. 8.5. Określenie efektywnego naprężenia stycznego τ_e

ją τ_{ef} od wartości naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ w następujący sposób:

$$\tau_{ef} = \sqrt{\frac{1}{15} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \quad (8.1)$$

gdy zaś stan naprężenia określa sześć składowych (rys. 7.10), wówczas

$$\tau_{ef} = \sqrt{\frac{1}{15} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]}. \quad (8.2)$$

Można dowiedzieć, że wartość τ_{ef} jest niezmiennikiem stanu naprężenia, a więc nie zależy od tego, czy ten stan podany jest przez naprężenia główne, czy też w postaci ogólnej.

Przy poczynionych założeniach *naprężenie τ_{ef} stanowi miarę niebezpieczeństwa, jakie przedstawia dany stan naprężenia z uwagi na pojawienie się pierwszych makroskopowych trwałych odkształceń i to jest właśnie istotą hipotezy Hubera.*⁽³⁾

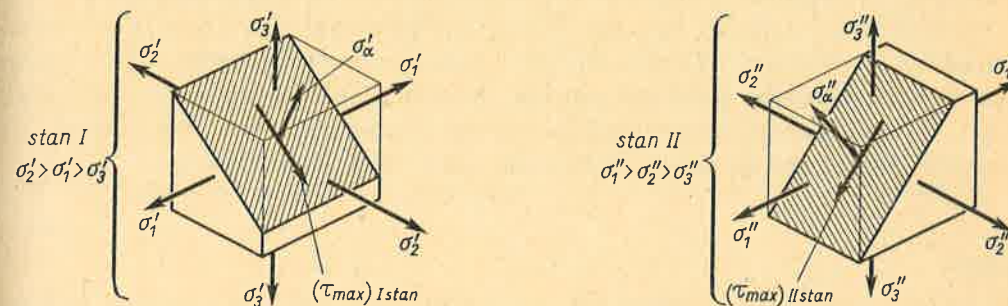
W przedstawionym ujęciu hipoteza Hubera ocenia niebezpieczeństwo poślizgu w elemencie $ABCD$ przy uwzględnieniu przestrzennego współdziałania otoczenia, a przede

⁽¹⁾ Taki sposób stosuje się w fizyce i matematyce, na przykład skuteczna wartość prądu, minimum sumy kwadratów błędów itp.

⁽²⁾ W. W. Nowożyłow, *Przykładowa matematyka i mechanika*, No 5, 1952 r.

⁽³⁾ M. T. Huber (1872-1950), profesor Politechniki Lwowskiej i Warszawskiej, sformułował swą hipotezę (1904 r.) na przesłankach wyłącznie energetycznych. W wyniku otrzymał identyczne (z dokładnością do stałego współczynnika) wyrażenia (8.1) i (8.2). W jego interpretacji wyrażenia te przedstawiają energię odpowiadającą odkształceniu czysto postaciowemu (rys. 7.13) i to jest powodem drugiej równoległej nazwy tejże hipotezy.

wszystkim ziaren znajdujących się w warstwie poślizgu. Zaniedbanie tego współdziałania oznaczałoby przyjęcie, że poślizg w ciałach polikrystalicznych odbywa się nie w warstwie o skończonej grubości, lecz w płaszczyźnie, czyli tak jak w monokryształach. Wtedy jednak parametrem decydującym o wystąpieniu poślizgu byłaby wyłącznie wartość naprężenia stycznego w tej płaszczyźnie, tj. τ_{max} , gdyż takie jest właśnie położenie rzeczywistych warstw poślizgu. Takie uproszczone podejście jest istotą hipotezy τ_{max} , głoszącej, że *wartość τ_{max} stanowi miarę niebezpieczeństwa, jakie przedstawia dany stan naprężenia z uwagi na pojawienie się pierwszych makroskopowych trwałych odkształceń.*



Rys. 8.6. Porównanie wyteżenia w dwóch różnych stanach naprężenia

Hipotezy wytrzymałościowe umożliwiają porównanie różnych stanów naprężenia z uwagi na niebezpieczeństwo pojawienia się trwałych odkształceń. Biorąc mianowicie dwa różne stany naprężenia *I* i *II* działające na ten sam materiał (rys. 8.6) powiemy, że według hipotezy Hubera dwa różne stany naprężenia są dla tego samego materiału jednakowo niebezpieczne, gdy

$$(\tau_{ef})_{I \text{ stan}} = (\tau_{ef})_{II \text{ stan}}. \quad (8.3)$$

Jeśli jako podstawę przyjąć hipotezę τ_{max} , to analogiczny wniosek jest, że według hipotezy τ_{max} dwa różne stany naprężenia są dla tego samego materiału jednakowo niebezpieczne, gdy

$$(\tau_{max})_{I \text{ stan}} = (\tau_{max})_{II \text{ stan}}. \quad (8.4)$$

Innymi słowy, jednakowy stopień bezpieczeństwa lub, jak mówimy inaczej, jednakowe *wyteżenie materiału* jest wtedy, gdy wielkości przyjęte za miarę niebezpieczeństwa są sobie równe.

Przyjmijmy teraz, jako jeden ze stanów, stan prostego rozciągania, dla którego wartość naprężenia $\sigma = R_e$ oznacza pojawienie się pierwszych wyraźnych odkształceń trwałych. Odpowiadające tej wartości σ naprężenie $\tau_{ef} = R_e \sqrt{2/15}$ (obliczone z wzoru 8.1) bądź $\tau_{max} = R_e/2$ stanowią dla innych stanów miernik pojawienia się trwałych odkształceń. W tym stwierdzeniu kryje się możliwość doświadczalnej weryfikacji hipotez. Biorąc mianowicie drugi złożony stan naprężenia obserwujemy przy jego wzroście moment pojawienia się pierwszych trwałych odkształceń i wyznaczamy odpowiadające temu momentowi wartości τ'_{ef} i τ'_{max} . Jasne jest, że ta hipoteza jest prawdziwa, której wynik, tj. τ'_{ef} lub τ'_{max} ,

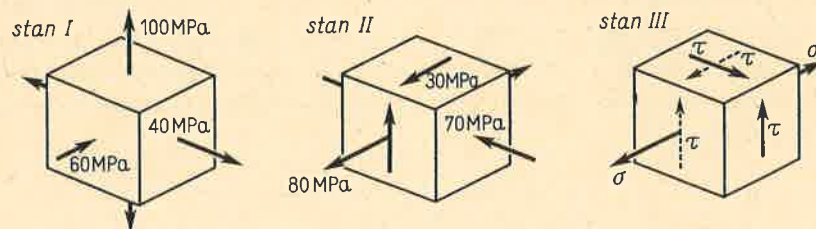
jest równy poprzednio określonej, tj. $R_e \sqrt{2/15}$ lub $R_e/2$. Liczne doświadczenia przeprowadzone w ten sposób dowiodły, że dla ciał polikrystalicznych bliższa rzeczywistości jest hipoteza Hubera, różnice nie są jednak zbyt duże. Dla materiałów bezpostaciowych słuszność obydwóch hipotez jest dyskusyjna, gdyż brak jest wyraźnego momentu pojawienia się odkształceń trwałych oraz istnieje wyraźna zależność tych odkształceń od szybkości obciążenia. Drugim ograniczeniem stosowalności obydwóch hipotez jest zakres obejmujący tylko stany sprężyste, gdy $\tau_{ef} \leq R_e \sqrt{2/15}$ lub $\tau_{max} \leq R_e/2$. Wynika to z założenia przyjętego w hipotezach, że materiał jest izotropowy (makroskopowo). Doświadczenia wykazują, że założenie to przestaje być słuszne przy większych trwałych odkształceniach.

Pomimo tych ograniczeń znaczenie hipotez jest ogromne, gdyż redukują one liczbę niezbędnych doświadczeń. W braku hipotez należałoby dla całej mnogości stanów naprężenia danego materiału prowadzić odrębne badania. Pomijając ogromny trud takich badań, należy zauważyć, że realizacja niektórych stanów jest wręcz niewykonalna. Te wszystkie kłopoty znikają dzięki ilościowemu ujęciu, które dają hipotezy.

Zadania

1. Przyjmując hipotezę τ_{max} określić, który ze stanów I czy II (rys. 8.7) jest groźniejszy i ile razy?

Odp. $(\tau_{max})_I = 80 \text{ MPa}$; $(\tau_{max})_{II} = 80 \text{ MPa}$; według więc hipotezy τ_{max} obydwa stany są tak samo niebezpieczne.



Rys. 8.7.

2. Opierając się na hipotezie Hubera rozwiązać zadanie 1.

Odp. $(\tau_{ef})_I = 51,1 \text{ MPa}$; $(\tau_{ef})_{II} = 51,1 \text{ MPa}$; według więc hipotezy Hubera stany są jednakowo niebezpieczne. Ta zgodność wyników obydwóch hipotez nie jest jednak regułą.

3. Określić wartość σ w stanie rozciągania, aby był on tak samo niebezpieczny jak stan naprężenia I (rys. 8.7) dla tego samego materiału. Czy obie hipotezy dają tę samą odpowiedź?

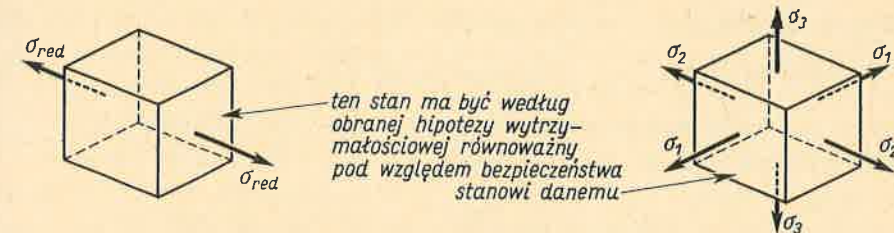
Odp. W stanie rozciągania $\tau_{max} = \sigma/2$; porównując z $(\tau_{max})_I = 80 \text{ MPa}$ mamy $\sigma = 160 \text{ MPa}$ według hipotezy τ_{max} ; według hipotezy Hubera $(\tau_{ef})_{rozcz} = \sigma \sqrt{2/15} \approx 0,365\sigma$ i z warunku $(\tau_{ef})_{rozcz} = (\tau_{ef})_I$ mamy $\sigma = 140 \text{ MPa}$. Tak więc odpowiedzi są różne.

4. Na kostkę III (rys. 8.7) działają naprężenia σ i $\tau = \sigma/2$ (ciągłe strzałki). Czy wyężenie materiału zmieni się, gdy naprężenia τ zmienią płaszczyzną działania (strzałki kreskowane)? Czy obie hipotezy dają tę samą odpowiedź?

Odp. W pierwszym wariacie naprężenia główne są $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \tau = \sigma/2$, $\sigma_3 = -\tau = -\sigma/2$, skąd $(\tau_{max})' = 0,75\sigma$. W wariacie drugim $\sigma_3 = 0$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$, a $(\tau_{max})'' = 0,5 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 0,71\sigma$. Tak więc według hipotezy τ_{max} wariant I jest niebezpieczniejszy. Według hipotezy Hubera τ_{ef} zostanie to samo i bezpieczeństwo nie zmieni się. Różnica opinii wynika z odmienności założeń hipotez, nie jest jednak duża.

8.3. Naprężenia zredukowane

W praktyce porównanie stanów naprężenia modyfikujemy w ten sposób, że jednym z nich jest zawsze stan prostego rozciągania (rys. 8.8). Jest to uzasadnione, gdyż próba rozciągania jest podstawowym i powszechnie stosowanym badaniem wytrzymałościowym.



Rys. 8.8. Obrazowe przedstawienie poszukiwania σ_{red}

Gdy naprężenia przy prostym rozciąganiu są σ_{red} , z wzorów (7.4) i (8.1) mamy odpowiednio

$$(\tau_{max})_{rozcz} = \sigma_{red}/2, \quad (\tau_{ef})_{rozcz} = \sigma_{red} \sqrt{2/15}.$$

Stosując kryterium (8.4) mamy tzw. *naprężenie zredukowane*

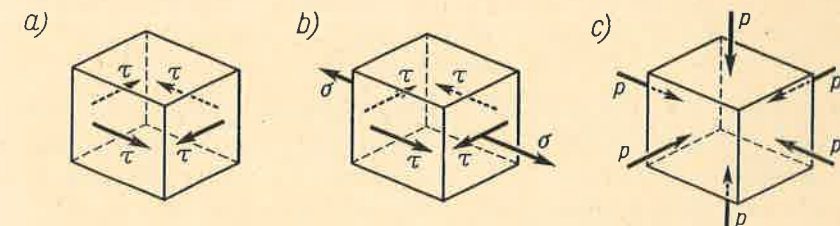
$$\sigma_{red} = 2(\tau_{max})_{dany} \text{ złożony stan naprężenia} \quad (8.5)$$

według hipotezy τ_{max} . Stosując kryterium (8.3) i wzory (8.1) lub (8.2) otrzymujemy naprężenie zredukowane według hipotezy Hubera

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \quad (8.6a)$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (8.6b)$$

gdzie $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ bądź $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$ — składowe danego złożonego stanu naprężenia przedstawionego przez naprężenia główne bądź w postaci ogólnej.



Rys. 8.9. Szczególne przypadki złożonych stanów naprężenia

Jako przykład stosowania tych wzorów rozpatrzmy stan czystego ścinania (rys. 8.9a), dla którego wiemy, że

$$\tau_{max} = \tau, \quad \sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau, \quad \sigma_3 = 0.$$

Po podstawieniu tych danych do (8.5) i (8.6) mamy

$$\text{według hipotezy } \tau_{max}: \quad \sigma_{red} = 2\tau, \quad (8.7a)$$

$$\text{według hipotezy Hubera:} \quad \sigma_{red} = \tau \sqrt{3}. \quad (8.7b)$$

Podobnie dla płaskiego stanu złożonego z rozciągania naprężeniami σ i ścinania naprężeniami τ (rys. 8.9b) mamy

$$\tau_{\max} = \text{promień największego kola Mohra} = 0,5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

a z wzorów (8.5) i (8.6)

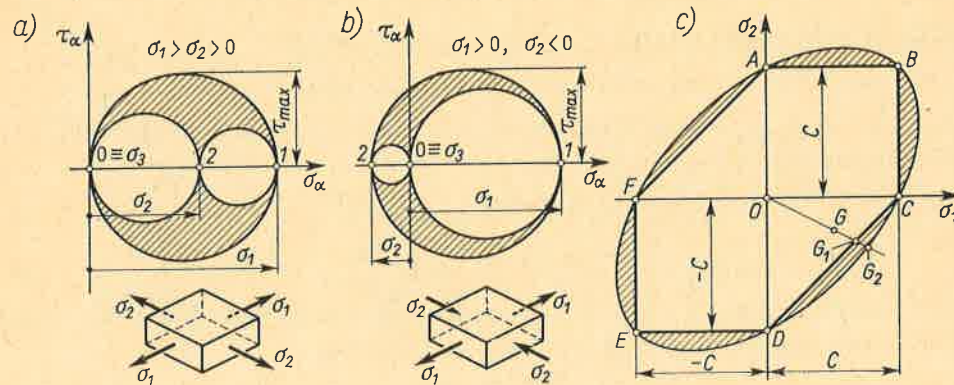
$$\text{według hipotezy } \tau_{\max}: \quad \sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (8.8a)$$

$$\text{według hipotezy Hubera:} \quad \sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (8.8b)$$

Wreszcie dla hydrostatycznego ściskania (rys. 8.9c): $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$, $\tau_{\max} = 0$ i według obydwóch hipotez

$$\sigma_{\text{red}} = 0. \quad (8.9)$$

Przejrzysty obraz wyników obydwóch hipotez dla płaskiego stanu naprężenia daje rys. 8.10. Załóżmy, że σ_1 i σ_2 są zmienne, zaś $\sigma_{\text{red}} = \text{const} = C$. Jeśli $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$, to z rys. 8.10a mamy $\tau_{\max} = \sigma_1/2$ i z wzoru (8.5): $\sigma_1 = C$ niezależnie od wartości σ_2 . W układzie współrzędnych σ_1, σ_2 daje to prostą BC (rys. 8.10c). Podobnie, gdy $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$,



Rys. 8.10. Porównanie wyników hipotez wytrzymałościowych

otrzymujemy prostą AB . Tak samo prześledzimy przypadek, gdy σ_1 i σ_2 są ściskające, w wyniku czego mamy proste DE i EF . Na koniec, gdy $\sigma_1\sigma_2 < 0$ (rys. 8.10b), wówczas z wzoru (8.5) mamy $\sigma_{\text{red}} = |\sigma_1 - \sigma_2| = C$, czyli równania prostych CD i AD . Otrzymany sześciokąt obrazuje według hipotezy τ_{\max} dozwoloną zmienność σ_1 i σ_2 przy warunku $\sigma_{\text{red}} = C$. Jeśli to samo zrobimy posługując się hipotezą Hubera, to z wzoru (8.6a) mamy zależność

$$\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = C^2, \quad (a)$$

przedstawiającą elipsę opisaną na poprzednim sześciokącie. Zakreskowany obszar ilustruje różnicę wyników obydwóch hipotez. Widać, że różnice nie są zbyt duże (max 15%) i to jest powodem równoległego stosowania w praktyce obydwóch hipotez. Widać również, że hipoteza τ_{\max} jest w swoich przewidywaniach ostrożniejsza od hipotezy Hubera, daje bowiem mniejsze wartości σ_1 i σ_2 odpowiadające tej samej wartości σ_{red} .

Jeśli w omawianym przykładzie przyjąć $\sigma_{\text{red}} = R_e$, to odpowiedni sześciokąt lub elipsa obrazują tzw. *warunek plastyczności* płaskiego stanu naprężenia. Punkty wewnątrz obszaru ograniczonego jednym z tych konturów, jak punkt G , reprezentują sprężyste stany ($\sigma_{\text{red}} < R_e$), punkty na zewnątrz — stany uplastycznione.

Techniczny sens ogólnych zależności (8.5) i (8.6) oraz wyników (8.7)–(8.9) polega, mówiąc obrazowo, na przetłumaczeniu niebezpieczeństwa pewnego złożonego stanu naprężenia na zrozumiały dla wszystkich stan prostego rozciągania. I tak jeśli na kostkę (rys. 8.9a) działa $\tau = 100$ MPa, to zależność (8.7a) informuje, że taki stan czystego ścinania jest według hipotezy τ_{\max} tak niebezpieczny dla danego materiału, jak proste rozciąganie naprężeniami $\sigma_{\text{red}} = 200$ MPa. Aby ocenić, czy wartość tę można dopuścić, należy porównać ją z granicą plastyczności R_e określoną z próby rozciągania tego materiału. Jeśli $\sigma_{\text{red}} > R_e$, to dany złożony stan naprężenia jest groźniejszy dla materiału niż proste rozciąganie naprężeniami $\sigma = R_e$, a więc spowoduje on trwałe odkształcenia. Dla budowy maszyn jest to nie do przyjęcia i przypadek taki wskazuje konieczność modyfikacji konstrukcji. Nierówność $\sigma_{\text{red}} < R_e$ jest więc warunkiem koniecznym prawidłowej pracy danego elementu maszyny. Jest on jednak niewystarczający, gdyż, jak wiemy z art. 1.9, nie możemy przy rozciąganiu przekroczyć naprężenia dopuszczalnego k_r . Jeśli więc w danym złożonym stanie naprężenia ma być ten sam współczynnik bezpieczeństwa n_e co i w prostym rozciąganiu, to

$$\sigma_{\text{red}} \leq k_r = \frac{R_e}{n_e}. \quad (8.10)$$

Zastosowanie wzoru (8.10) jest dwójakie. Pierwsze z nich, to bezpośrednia kontrola wartości σ_{red} w stosunku do k_r lub ocena współczynnika bezpieczeństwa $n_e = R_e/\sigma_{\text{red}}$ danego złożonego stanu naprężenia. Drugi wariant, gdy mając dane R_e i n_e szukamy naprężeń dopuszczalnych dla stanów naprężenia określonego typu. Dla stanu na przykład czystego ścinania, w którym zależnie od obranej hipotezy $\sigma_{\text{red}} = 2\tau$ bądź $\sigma_{\text{red}} = \tau\sqrt{3}$, otrzymujemy z wzoru (8.10) nieprzekraczalną wartość $\tau = k_t$, jako

$$k_t = k_r/2 \quad \text{lub} \quad k_t = k_r/\sqrt{3} \approx 0,58 k_r. \quad (b)$$

Druga z tych wartości jest identyczna z informacją (wzór 3.8), którą stosowano przy ocenie bezpieczeństwa skręcanego pręta.

Zadania

1. Jaki jest techniczny sens wzoru (8.9)?

Odp. $\sigma_{\text{red}} = 0$ oznacza, że jakie by nie były wartości p , to stan z rys. 8.9c nie jest w ogóle groźny dla materiału. Przykładowo: kostka z ołowiu ($R_e = 20$ MPa) poddana $p = 300$ MPa nie ma trwałych odkształceń⁽¹⁾, pomimo że $p \gg R_e$.

⁽¹⁾ Jest to potwierdzone doświadczalnie i jest jednym z dowodów przemawiających za hipotezą τ_{\max} bądź hipotezą Hubera.

2. Jaki sens mają wyznaczone w zadaniu 3 art. 8.2 wartości σ ? Określić współczynnik n_e kostki II (rys. 8.7), jeśli $R_e = 240$ MPa.

Odp. Są to wartości σ_{red} ; według hipotezy τ_{max} jest $n_e = 1,5$; według hipotezy Hubera jest $n_e \approx 1,7$. Jak widać, ocena n_e według hipotezy τ_{max} jest ostrożniejsza.

3. W kostce (rys. 7.5a): $\sigma_x = 80$ MPa, $\sigma_y = -60$ MPa, $\tau = 50$ MPa. Czy ten stan jest dopuszczalny, jeśli $k_r = 150$ MPa?

Odp. Według hipotezy τ_{max} stan jest niedopuszczalny, bo $\sigma_{red} = 172$ MPa $>$ k_r . Według hipotezy Hubera stan jest jeszcze dopuszczalny, bo $\sigma_{red} = 149$ MPa $<$ k_r .

4. W kostce (rys. 8.10a) $\sigma_1 = 2\sigma_2$. Jaką wartość σ_1 można dopuścić dla materiału, w którym $k_r = 180$ MPa?

Odp. Według hipotezy τ_{max} jest $k_1 = k_r = 180$ MPa; według hipotezy Hubera z wzoru (8.6a) $\sigma_{red} = \sigma_1 \sqrt{3/2} = k_r$, skąd $\sigma_1 = 208$ MPa. Tak więc znowu hipoteza τ_{max} jest ostrożniejsza.

5. W kostce (rys. 8.9b) $\sigma = 100$ MPa. Jaką wartość τ można dopuścić dla materiału, w którym $R_e = 240$ MPa, a $n_e = 2$?

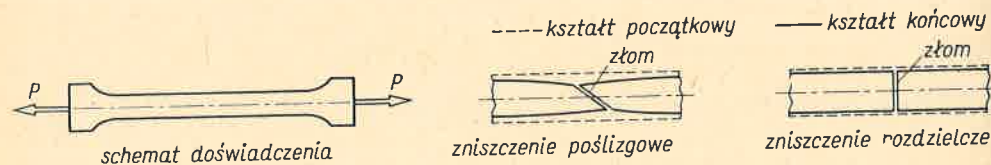
Odp. Z wzorów (8.8) według hipotezy τ_{max} mamy $\tau = 49$ MPa, a według hipotezy Hubera $\tau = 56$ MPa.

6. Wykorzystując rys. 8.10c określić współczynnik bezpieczeństwa dwuwymiarowego stanu naprężenia, gdy $\sigma_1 = C/2$, $\sigma_2 = -C/4$ w stosunku do nieprzekraczalnej wartości $\sigma_{red} = C$.

Odp. Nanosząc σ_1 i σ_2 otrzymujemy na rys. 8.10c punkt G. Proporcjonalnemu zwiększeniu σ_1 i σ_2 odpowiada wędrowka punktu po promieniu OG. Przecięcie promienia w punktach G_1 i G_2 określa stan graniczny, gdy $\sigma_{red} = C$. Stosunek promieni $\overline{OG_1}/\overline{OG} \approx 1,3$ lub $\overline{OG_2}/\overline{OG} \approx 1,5$ daje szukaną wartość współczynnika według obranej hipotezy.

8.4. Zniszczenie materiału. Hipoteza Mohra

Zjawisko zniszczenia materiału pod działaniem naprężeń jest znacznie bardziej złożone niż zjawiska pojawienia się pierwszych trwałych odkształceń. Doświadczenia dowodzą, że zniszczenie może być wynikiem ścicia wzdłuż płaszczyzny poślizgu lub rozszczepienia materiału (rys. 8.11). W pierwszym przypadku to zniszczenie poślizgowe spowodowane

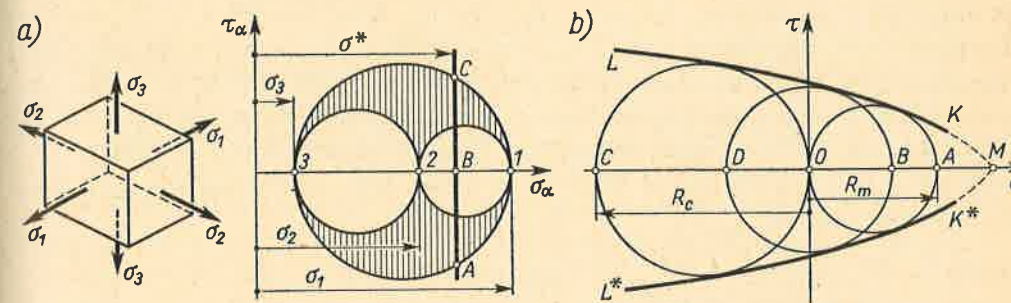


Rys. 8.11. Obrazy zniszczenia poślizgowego i rozdzielczego

jest naprężeniami stycznymi, a sam proces zniszczenia stanowi kontynuację pierwszych poślizgów. W drugim przypadku tzw. zniszczenie rozdzielcze wywołane jest naprężeniami normalnymi do płaszczyzny podziału i związane jest z przewyciężeniem sił kohezji między cząsteczkami materiału. Obydwa te procesy są więc różne w swej istocie.

Stan wiedzy w tej dziedzinie, pomimo intensywnych badań, nie pozwala jeszcze na sformułowanie teorii lub hipotezy, które nie byłyby dyskusyjne. Z drugiej strony, ze względów praktycznych, nawet niedoskonała ocena niebezpieczeństwa zniszczenia jest lepsza niż żadna. Jedną z takich ocen daje tzw. hipoteza Mohra.

Punktem wyjścia tej hipotezy jest założenie, że o zniszczeniu materiału decyduje wartość naprężeń w jednym szczególnym przekroju. Jest to punkt najbardziej dyskusyjny, gdyż niektóre doświadczenia, zwłaszcza przy trójwymiarowym ściskaniu, temu przeczą. Przyjmując jednak to za prawdę, zbadajmy trójwymiarowy stan naprężenia i odpowiadający



Rys. 8.12. Wykreślne przedstawienie hipotezy Mohra

mu układ kół Mohra (rys. 8.12a). Punkty leżące na prostej ABC odpowiadają grupie przekrojów o tym samym normalnym naprężeniu σ^* , lecz różnym naprężeniu stycznym. Jest rzeczą naturalną przypuścić, że najbardziej zagrożone z tej grupy są przekroje odpowiadające punktom A i C, w których naprężenie styczne jest maksymalne. Powtarzając to rozumowanie dla innych wartości σ^* , dochodzimy do wniosku, że ze wszystkich możliwych przekrojów najbardziej zagrożony jest jeden z reprezentowanych przez punkty zewnętrznego koła Mohra. Innymi słowy, tylko zewnętrzne koło Mohra określa, czy zniszczenie nastąpi, czy nie.

Przypuśćmy, że mając nieograniczone możliwości laboratoryjne zbadaliśmy zniszczenie danego materiału w różnych stanach naprężenia. Maksymalne koła Mohra dla każdego z tych stanów, tworzą razem obraz (rys. 8.12b), w którym koło OA odpowiada zniszczeniu przy prostym rozciąganiu ($OA = R_m$), koło OC zniszczeniu przy prostym ściskaniu ($OC = R_c$), koło DB zniszczeniu przy czystym ścinaniu itd. Obwiednie KL i K^*L^* tych wszystkich kół opisują według hipotezy Mohra warunek zniszczenia. Wystąpi ono wtedy, gdy maksymalne koło Mohra dla danego stanu naprężenia będzie styczne do tych obwiedni. Hipotetyczny punkt M odpowiada zniszczeniu w stanie trójwymiarowego rozciągania⁽¹⁾, gdy $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$, lewa natomiast strona wykresu opisuje przypadki, gdy wszystkie naprężenia główne są ściskające.

Ograniczone w rzeczywistości środki laboratoryjne zmuszają do wprowadzenia uproszczeń w tym obrazie. Z reguły znane są z doświadczeń tylko wartości R_m i R_c . Z tych dwóch informacji nie można określić rzeczywistego przebiegu obwiedni KL i K^*L^* . Jedyne technicznie rozsądne wyjście to zastąpienie ich prostymi HF i H^*F^* stycznymi do kół OA i OC (rys. 8.13) wykraczającymi tylko nieznacznie poza punkty styczności. Z tego obrazu można łatwo wyznaczyć związek między parametrami σ_1 i σ_3 granicznego koła BD odpowiadającego danemu stanowi $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Związek ten jest

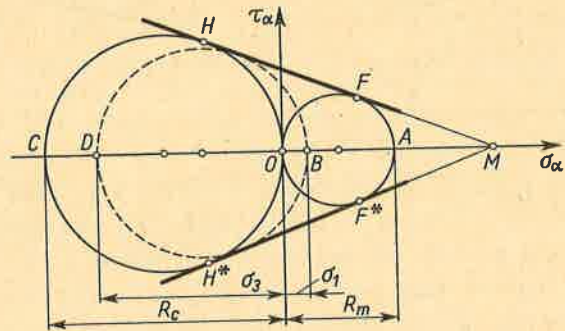
$$(\sigma_1/R_m) - (\sigma_3/R_c) = 1. \quad (8.11)$$

⁽¹⁾ Stanu tego nie udało się dotąd zrealizować w sposób ścisły.

Dla czystego ścinania naprężenia główne są $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$ i z wzoru (8.11) otrzymujemy graniczną wartość R_t naprężenia τ jako

$$\tau_{gran} = R_t = R_m R_c / (R_m + R_c). \quad (a)$$

Dla metali plastycznych $R_c = R_m$ i wtedy $R_t = 0,5 R_m$. Wynik ten jest o $\sim 15\%$ mniejszy od wartości doświadczalnych. Lepszą zgodność ($\sim 10\%$) otrzymuje się dla materiałów kruchych (żeliwo, beton, szkło) i to jest powodem, że hipotezę Mohra dla tych materiałów można stosować w zakresie odpowiadającym przybliżonemu przebiegowi obwiedni HF i H^*F^* (rys. 8.13). Dla metali plastycznych hipotezę Mohra stosujemy rzadko, gdyż warunek $\sigma_{red} \leq R_e$, tj. pojawienia się trwałych odkształceń, jest już dostatecznym miernikiem bezpieczeństwa.



Rys. 8.13. Uproszczona analiza zniszczenia

Jeśli dany stan naprężenia $\sigma_1^* > \sigma_2^* > \sigma_3^*$ nie jest graniczny, to z (8.11) mamy współczynnik bezpieczeństwa n_m jako

$$n_m = \frac{1}{(\sigma_1^*/R_m) - (\sigma_3^*/R_c)}. \quad (8.12)$$

Wartość ta wyraża, ile razy należy powiększyć σ_1^* oraz σ_3^* , aby dojść do zniszczenia materiału.

Zadania

1. Dla żeliwa szarego $R_m = 200$ MPa, $R_c = 700$ MPa. Przy jakiej wartości σ_1 nastąpi zniszczenie, jeśli $\sigma_1 = 2\sigma_2 = -2\sigma_3$?
Odp. Z wzoru (8.11) przy $\sigma_3 = -\sigma_1/2$ mamy $\sigma_1 = 2\sigma_2 = -2\sigma_3 = 172$ MPa.
2. Określić naprężenia dopuszczalne dla żeliwa ($R_m = 200$ MPa, $R_c = 700$ MPa), jeśli $\sigma_1 = \sigma_2 = -0,5\sigma_3$, a wymagany $n_m = 4$.
Odp. Z wzoru (8.11) graniczne wartości są $\sigma_1 = \sigma_2 = 127$ MPa, $\sigma_3 = -254$ MPa i dzieląc je przez n_m mamy $\sigma_1^* = \sigma_2^* = 32$ MPa, $\sigma_3^* = -64$ MPa.
3. Na kostkę (rys. 8.9b) szklaną ($R_m = 60$ MPa, $R_c = 600$ MPa) działają $\sigma = -100$ MPa, $\tau = 40$ MPa. Czy w tym stanie kostka ulegnie zniszczeniu, a jeśli nie, to jaki jest współczynnik n_m ?

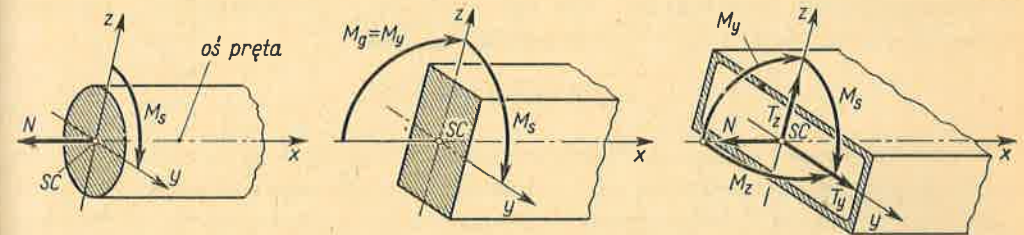
Odp. Naprężenia główne $\sigma_1^* = 12,5$ MPa, $\sigma_2^* = 0$, $\sigma_3^* = -112,5$ MPa. Z wzoru (8.12) mamy $n_m \approx 2,5 > 1$, a więc nie ma zniszczenia.

4. Wyznaczyć wytrzymałość na czyste ścinanie szkła (zadanie 3).

Odp. $R_t = 55$ MPa.

8.5. Wytrzymałość złożona pręta

W zbadanych dotąd przypadkach pracy pręta ocena bezpieczeństwa sprowadzała się bądź do porównania ze stanem prostego rozciągania, bądź dotyczyła stanu czystego ścinania. Do grupy pierwszej należały: czyste zginanie, zgięcie poprzeczne, jednoczesne zginanie i rozciąganie. W przypadkach tych najbardziej obciążone włókna pręta są tylko rozciągane lub ściskane, a w innych włóknach rola naprężeń stycznych jest pomijalna. Do drugiej grupy należało skręcanie, przy którym wszystkie elementy pręta są w stanie czystego ścinania i z tego powodu ocena bezpieczeństwa sprowadza się do wykrycia elementu mającego największą wartość τ . Do zbadania pozostają te przypadki wytrzymałości złożonej, gdy na element przekroju pręta działają jednocześnie duże naprężenie normalne σ i duże naprężenie styczne τ . Takimi przypadkami są wszystkie te, których składnikiem



Rys. 8.14. Niektóre przypadki wytrzymałości złożonej pręta

jest skręcanie (rys. 8.14). Wiemy bowiem, że przy skręcaniu maksymalne τ występują w którymś z elementów leżących przy zewnętrznym konturze przekroju, a więc w takim, w którym mogą pojawić się, jak przy zginaniu, duże naprężenia normalne.

Pierwszym etapem rozwiązania tych zagadnień jest określenie na całym przekroju obrazu i wartości naprężeń σ i τ odpowiadających danemu złożonemu obciążeniu. Wynik ten otrzymujemy z superpozycji stanów naprężeń odpowiadających prostym przypadkom obciążenia. Etap drugi polega na wyszukaniu takiego elementu przekroju, w którym naprężenie σ_{red} jest największe. Stosując hipotezę Hubera, wartość σ_{red} określamy⁽¹⁾ z wzoru (8.8b)

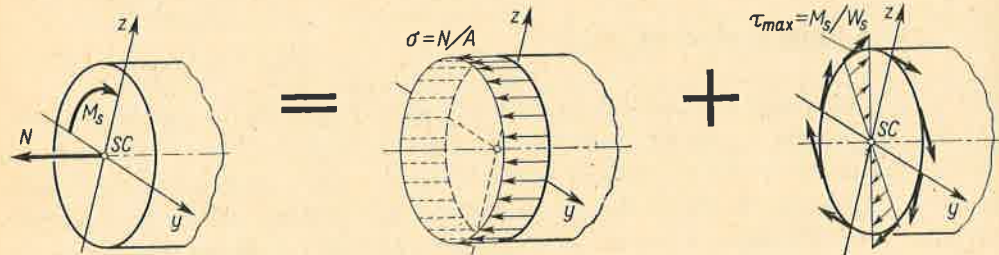
$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Widać stąd, że w grupie elementów o $\sigma = \text{const}$ niebezpieczny jest ten, w którym τ

⁽¹⁾ We wszystkich przypadkach prostych pomijaliśmy naprężenia normalne w kierunku prostopadłym do włókien, wobec czego obraz naprężeń w elementarnej kostce odpowiada rys. 8.9b. Ściana, na którą działa σ , pokrywa się z płaszczyzną poprzecznego przekroju pręta.

jest największe. Podobnie gdy w pewnej grupie elementów $\tau = \text{const}$, to niebezpieczny jest ten, w którym σ jest największe. W ogólnym przypadku wyszukanie $(\sigma_{\text{red}})_{\text{max}}$ wymaga bardziej szczegółowej analizy, bądź dokonania szeregu prób.

Powyższe postępowanie prześledzimy na szeregu przykładów.

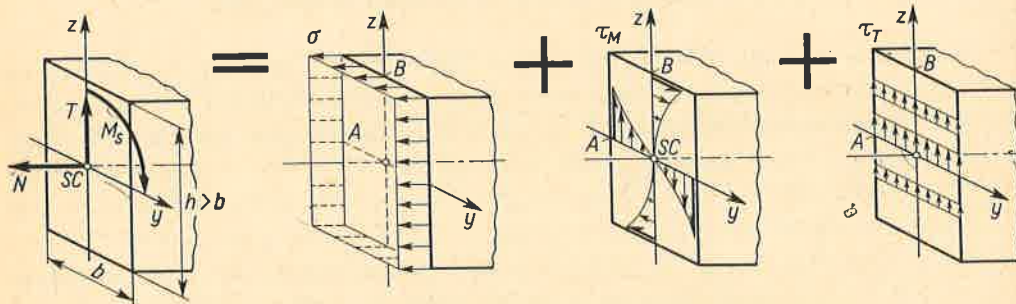


Rys. 8.15. Analiza jednoczesnego rozciągania i skręcania

1. Jednoczesne rozciąganie (ściskanie) i skręcanie (rys. 8.15) cechuje równomierny rozkład naprężeń normalnych $\sigma = N/A$, odpowiadających sile wzdłużnej, oraz nierównomierny rozkład naprężeń stycznych τ wywołanych momentem skręcającym M_s . Niebezpiecznym elementem przekroju jest więc ten, w którym τ jest maksymalne. Ponieważ według (3.18): $\tau_{\text{max}} = M_s/W_s$, zatem największe σ_{red} jest:

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{(N/A)^2 + 3(M_s/W_s)^2} \quad (a)$$

2. Jednoczesne rozciąganie (ściskanie), skręcanie i ścinanie (rys. 8.16) różni się od poprzedniego tym, że naprężenie styczne τ jest sumą τ_M wywołanego skręcaniem i τ_T odpowiadającego sile tnącej T . W poszczególnych punktach przekroju naprężenia τ_M i τ_T mają



Rys. 8.16. Analiza jednoczesnego rozciągania, ścinania i skręcania

na ogół różne kierunki, wobec czego wypadkowe τ jest na ogół sumą geometryczną τ_M i τ_T . Wyjątek stanowią punkty przekroju leżące przy konturze (art. 3.4 i 5.6). Kierunki τ_M i τ_T są tam styczne do konturu i naprężenia te można sumować algebraicznie. Dla przekroju na przykład prostokątnego, gdy $h > b$, ekstremalne naprężenie τ działa w punkcie A. Jego wartość zgodnie z danymi tabl. 3.1 i z wzorem (5.18) jest

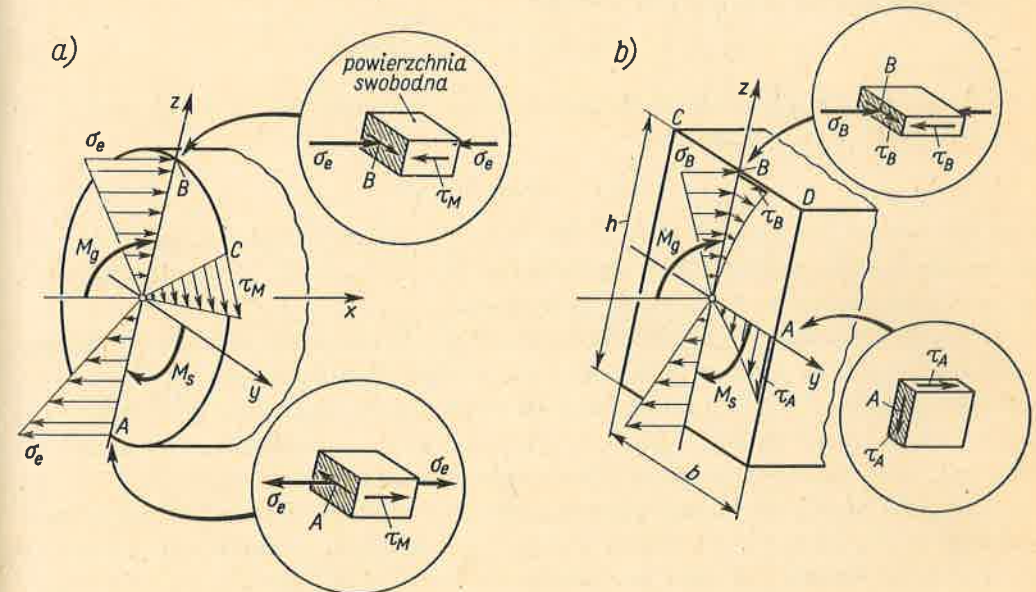
$$\tau_{\text{max}} = (M_s/c_1 hb^2) + (3T/2bh).$$

W konsekwencji największa wartość σ_{red} wynosi:

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{(N/A)^2 + 3[(M_s/c_1 hb^2) + (3T/2bh)]^2} \quad (b)$$

W powyższym przykładzie ekstremalne τ_M i τ_T występują jednocześnie w tym samym punkcie A. Podobnie jest w przekroju kołowym. Nie jest to jednak regułą. Gdyby na rys. 8.16 siła T była pozioma, w punkcie A naprężenie $\tau_T = 0$ i $\tau_M = M_s/c_1 hb^2$. W punkcie B natomiast występują $\tau_T = 3T/2bh$ oraz $\tau_M = \tau_M c_3$, przy czym τ_M jest mniejsze niż τ_M (tabl. 3.1). Należy więc zbadać τ w punktach A i B i większą z wartości wstawić do wzoru na σ_{red} . Uwaga powyższa stanowi więc ostrzeżenie przed bezmyślnym określaniem τ_{max} , jako algebraicznej sumy ekstremalnych wartości τ_M i τ_T . Z drugiej strony musimy uwzględnić, że podane w kursie wytrzymałości materiałów informacje odnośnie rozkładu τ_M i τ_T dla przekrojów zwartych są dość ograniczone. W tej sytuacji zadowalamy się przybliżeniem przyjmując $\tau_T = \tau_{sr} = T/A$. Jest to uzasadnione, gdyż wartości τ_T są na ogół małe. W wyniku przybliżona największa wartość σ_{red} jest:

$$\sigma_{\text{red}} \approx \sqrt{(N/A)^2 + 3[(M_s/W_s) + (T/A)]^2} \quad (c)$$



Rys. 8.17. Przykłady analizy jednoczesnego zginania i skręcania

3. Jednoczesne skręcanie i czyste zginanie zbadamy naprzód, gdy przekrój pręta jest kołowy (rys. 8.17a). Jak wiemy z art. 3.3, ekstremalne naprężenia τ_M są we wszystkich punktach przekroju leżących przy konturze, a ich wartość

$$\tau_M = M_s/W_0 = 16M_s/\pi d^3.$$

Działanie momentu M_g wywołuje tylko naprężenia normalne σ , osiągające w punktach A i B przekroju wartości ekstremalne

$$\sigma_e = \pm M_g/W_y = \pm 32M_g/\pi d^3.$$

Podstawiając te wartości σ_e i τ_M do (8.8b) mamy dla obydwóch punktów jednakowe największe σ_{red} równe

$$\sigma_{red} = \sqrt{M_g^2 + 0,75M_s^2}/W_y, \quad (d)$$

gdzie $W_y = \pi d^3/32$ wskaźnik wytrzymałości przekroju przy zginaniu. Ten sam wynik (d) otrzymamy dla przekroju rurowego wstawiając jedynie W_y wzięte z wzoru (f) art. 5.5.

W powyższym przykładzie wyszukanie niebezpiecznych punktów A i B przekroju nie nasuwało trudności, albowiem wszystkie punkty leżące przy konturze przekroju mają jednakowe i to ekstremalne τ_M , a jednocześnie dwa z nich mają ekstremalne σ . Gdy przekrój pręta nie jest kołowy, wyszukanie niebezpiecznych miejsc wymaga określenia σ_{red} w szeregu punktów leżących przy konturze. Dla belki o przekroju prostokątnym (rys. 8.17b) w wszystkich punktów leżących przy krawędzi CD niebezpieczny⁽¹⁾ jest punkt B , w którym według wzoru (5.11) i tabl. 3.1

$$\sigma_B = M_g/W_y = 6M_g/bh^2, \quad \tau_B = c_3 M_s/c_1 hb^2,$$

a największe σ_{red} na tym odcinku konturu

$$(\sigma_{red})_B = \sqrt{(M_g/W_y)^2 + 3(c_3 M_s/c_1 hb^2)^2}. \quad (e)$$

Z punktów leżących przy konturze DA niebezpieczny może być punkt A , w którym $\sigma_A = 0$, $\tau_A = M_s/c_1 hb^2$, a naprężenie

$$(\sigma_{red})_A = (M_s/c_1 hb^2)\sqrt{3} \quad (f)$$

może być większe od $(\sigma_{red})_B$, gdy $M_g \ll M_s$. Ta analiza nie jest kompletna, nie jest bowiem pewne, czy któryś z punktów przy krawędzi DA nie ma $\sigma_{red} > (\sigma_{red})_A$. Ścisłą odpowiedź na to pytanie może dać tylko teoria sprężystości.

4. *Ogólny przypadek wytrzymałości złożonej*, gdy działa sześć składowych wysiłku przekroju (rys. 8.14), badamy w podobny jak powyżej sposób. Wypisywanie przy tym wzorów typu (a)–(d) nie ma sensu, gdyż ich postać zależy od kształtu przekroju. Ważniejsze jest to, że dla prętów o zwartym przekroju można na ogół zaniedbać wpływ sił tnących T_y i T_z , gdyż odpowiadające im naprężenia styczne są małe (rzędu T_y/A i T_z/A).

5. *Uwagi końcowe*. Mając największe σ_{red} można z wzoru (8.10) ocenić bezpieczeństwo w danym przekroju pręta. Jest rzeczą oczywistą, że badanym przekrojem powinien być ten, w którym wysiłek przekroju jest maksymalny. Jeśli co do tego istnieją wątpliwości, należy zbadać szereg przekrojów.

Podana analiza stosuje się do prętów z materiałów plastycznych, gdy kryterium bezpieczeństwa jest pojawienie się trwałych odkształceń. Dla prętów z materiałów kruchych bezpieczeństwo oceniamy stosując hipotezę Mohra. Weźmy na przykład pręt (rys. 8.17a) z materiału, w którym $R_m < R_c$. Rzecz jasna, że niebezpieczne jest otoczenie punktu A . Stan naprężenia w tym punkcie określają naprężenia główne $\sigma_2 = 0$ oraz

$$\sigma_1 = (M_g + \sqrt{M_g^2 + M_s^2})/W_y > 0, \quad \sigma_3 = (M_g - \sqrt{M_g^2 + M_s^2})/W_y < 0.$$

⁽¹⁾ Punkty te mają to samo σ , a τ jest największe w punkcie B .

Podstawiając te dane do (8.12) mamy współczynnik bezpieczeństwa

$$n_m = \frac{R_m W_y}{M_g} \frac{1}{[1 - (R_m/R_c)] + [1 + (R_m/R_c)]\sqrt{1 + (M_s/M_g)^2}}.$$

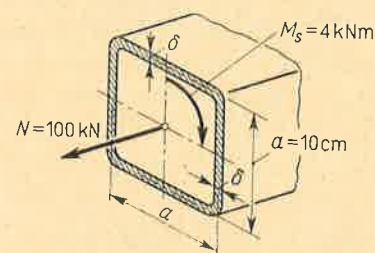
Zadania

1. W niebezpiecznym przekroju wału o średnicy $d = 8$ cm działają $N = 100$ kN, $M_s = 3$ kN m oraz $T = 2$ kN. Czy wał ten można wykonać ze stali, dla której $k_r = 50$ MPa?

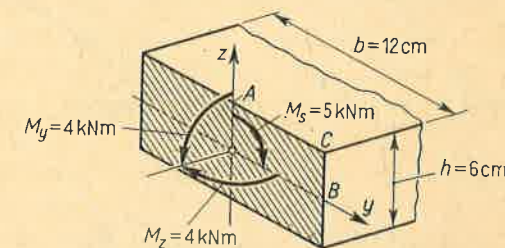
Odp. Maksymalne $\tau = (16M_s/\pi d^3) + (4T/3A) = 30,3$ MPa, naprężenie $\sigma = N/A = 26,5$ MPa, skąd największe $\sigma_{red} = 58,7$ MPa $> k_r$, a więc należy użyć lepszej stali.

2. W niebezpiecznym przekroju cienkościennej rury działają podane N i M_s (rys. 8.18). Określić grubość ścianki δ , aby współczynnik bezpieczeństwa był $n_e = 4$. $R_e = 240$ MPa.

Odp. Zgodnie z (3.22) $\tau = M_s/2a^2\delta$; $\sigma = N/4a\delta$; z (8.8b) i (8.10) $\sigma_{red} = \sqrt{N^2 + 12(M_s/a)^2}/4a\delta = k_r = R_e/n_e$, skąd $\delta \approx 7,5$ mm.



Rys. 8.18.



Rys. 8.19.

3. W przekroju rurowego wału ($d_z = 10$ cm, $d_w = 8$ cm) działają $N = -50$ kN, $M_g = 6$ kN m, $M_s = 3$ kN m. Jaki jest współczynnik bezpieczeństwa w tym przekroju, jeśli $R_e = 400$ MPa?

Odp. Ekstremalne $\sigma = -(M_g/W_y) + (N/A) = -121,3$ MPa, ekstremalne $\tau = 25,9$ MPa, skąd $(\sigma_{red})_{ekstr} \approx 129$ MPa i poszukiwane $n_e = R_e/(\sigma_{red})_{ekstr} = 3,1$.

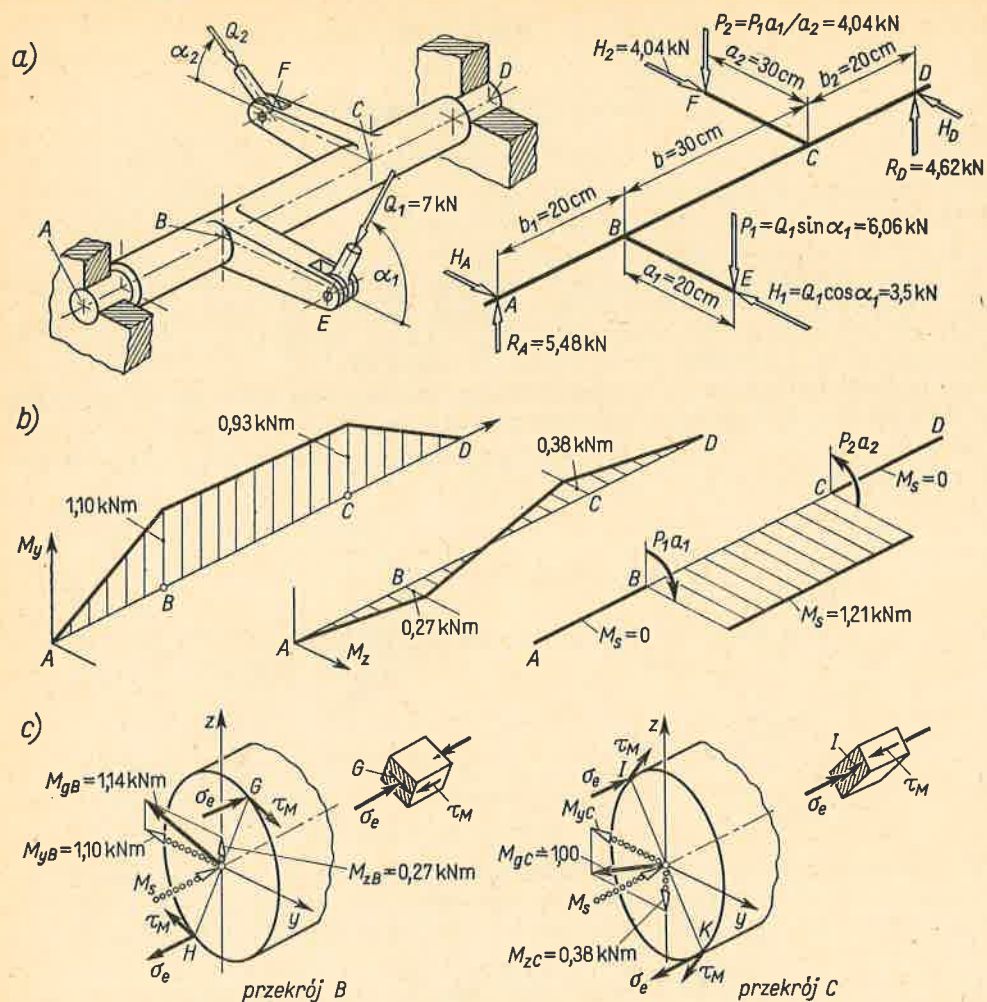
4. W niebezpiecznym przekroju belki działają podane M_y , M_z i M_s (rys. 8.19). Ilorotnie można zwiększyć obciążenie, aby nie przekroczyć $k_r = 140$ MPa?

Odp. W punkcie C jest $\tau = 0$ i $(\sigma_{red})_C = (M_y/W_y) + (M_z/W_z) = 83,4$ MPa. W punkcie A jest $\sigma_A = (M_y/W_y) = 55,6$ MPa, a $\tau_A = M_s/c_1 hb^2 = 47,2$ MPa, gdzie $c_1 = 0,246$ wzięte z tabl. 3.1 dla stosunku $b/h = 2$. Stąd $(\sigma_{red})_A = \sqrt{55,6^2 + 3(47,2)^2} = 99,0$ MPa $> (\sigma_{red})_C$. Przyjmujemy więc, że $(\sigma_{red})_A$ jest ekstremalne. Powiększenie obciążenia belki daje proporcjonalne zwiększenie M_y , M_z i M_s , a więc i σ_{red} . Wynika stąd, że obciążenie możemy zwiększyć w stosunku $k_r/(\sigma_{red})_{ekstr} = k_r/(\sigma_{red})_A \approx 1,4$ razy.

5. Walek AD z dźwigniami BE i CF prostopadłymi do osi wałka i równoległymi do siebie (rys. 8.20) obciążono prostopadłymi do osi (przestrzennie) siłami $Q_1 = 7$ kN i Q_2 . Ta ostatnia zapewnia równowagę momentów względem osi wałka. Wyznaczyć współczynnik bezpieczeństwa wałka, jeśli ma on średnicę $d = 5$ cm, a $R_e = 250$ MPa, $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$.

Rozwiązanie. Siły Q_1 i Q_2 rozkładamy na składowe P_1 i P_2 prostopadłe do płaszczyzny wyznaczonej przez osie wałka i dźwigni oraz składowe H_1 i H_2 leżące w tej płaszczyźnie. Z warunku równowagi względem osi AD mamy $P_2 = P_1 a_1/a_2 = Q_1 a_1 \sin \alpha_1/a_2 = 4,04$ kN i $H_2 = P_2 \text{ctg} \alpha_2 = 4,04$ kN. Mając te siły wyznaczamy reakcje R_A , R_D oraz $H_A = 1,35$ kN i $H_D = 1,89$ kN, a następnie przebiegi momentów gnących M_y , M_z i skracającego M_s (rys. 8.20b).

Zauważmy teraz, że niebezpieczne mogą być tylko przekroje odcinka BC , gdyż momenty M_y i M_z mają podobne wartości, jak na odcinku AB i CD , a ponadto działa tu duży moment M_s . Na skutek



Rys. 8.20. Przykład liczbowy

liniowej zmienności M_y i M_z naprężenia σ w poszczególnych włóknach zmieniają się liniowo (zadanie 4 art. 6.1), a naprężenie $\tau_M = M_s/W_s = 49,5 \text{ MPa}$ jest stałe we wszystkich włóknach skrajnych. Wynika stąd, że niebezpiecznymi przekrojami mogą być tylko przekroje B lub C. W pierwszym z nich (rys. 8.20c) naprężenia

$$\sigma_e = \pm \sqrt{M_{yB}^2 + M_{zB}^2} / W_y = \pm 92,6 \text{ MPa},$$

albowiem przekrój jest kołowy, każda centralna oś jest główna i zawsze mamy zgięcie proste. W przekroju C obliczone analogicznie $\sigma_e = \pm 81,5 \text{ MPa}$. Przy jednakowej wartości τ_M wynika stąd, że niebezpieczny jest przekrój B, w którym zgodnie z (8.8b)

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_e^2 + 3\tau^2} = 126 \text{ MPa},$$

a poszukiwany współczynnik bezpieczeństwa $n_e = R_e/\sigma_{red} \approx 2,0$.

8.6. Uwagi końcowe

Treść rozdziału 8 obejmuje trzy grupy informacji. Pierwsza o charakterze poznawczym omawia w ogromnym skrócie zjawiska trwałych odkształceń w ciałach mono- i polikrystalicznych. Na uwagę zasługuje zasadnicza różnica między zjawiskiem poślizgu w monokryształach i w ciele polikrystalicznym. Pierwsze z nich występuje w płaszczyźnie i kierunku ściśle związanym ze strukturą kryształu. Drugie odbywa się w warstwie o skończonej grubości (rzędu wymiaru ziarna), przy czym położenie warstwy i kierunku poślizgu związane są ze stanem naprężenia (płaszczyzna i kierunek τ_{max}). Chaotyczne ustawienie ziaren ujednorodniające makroskopowe własności materiału nadaje temu poślizgowi charakter zjawiska statystycznego.

Informacje drugiej grupy dają ilościowe ujęcie zjawiska poślizgu i zniszczenia w elementarnej kostce materiału przy jednorodnym stanie naprężenia. Do tej grupy należą hipotezy Hubera i τ_{max} dające dla danego materiału ocenę bezpieczeństwa w odniesieniu do pojawienia się pierwszych trwałych odkształceń. Otrzymane tu wyniki ogólne i szczególne nie ulegają zmianie, gdy wszystkie składowe stanu naprężenia zmienią się na przeciwne. Jest to słuszne tylko dla tych materiałów polikrystalicznych, których granice plastyczności przy ściskaniu i rozciąganiu są równe.

Ocena bezpieczeństwa według hipotezy Mohra podlega dwóm ograniczeniom. Pierwsze to dyskusyjność podstawowego założenia hipotezy, drugie to wynikająca z możliwości laboratoryjnych niedostateczna znajomość przebiegu obwiedni. Te ograniczenia nie są jednak zbyt istotne w zadaniach praktycznych, w których największe koło Mohra znajduje się z reguły w przedziale między granicznymi kołami dla rozciągania i dla ściskania.

Trzecią wreszcie grupę informacji stanowi ocena bezpieczeństwa w niektórych przypadkach wytrzymałości złożonej pręta. W tym miejscu należy uwypuklić omówiony już w art. 1.9. przeskok myślowy. Jego istota polega na przejściu od elementarnej kostki w jednorodnym stanie naprężenia do konstrukcji będącej w stanie niejednorodnym. Milcząco zakłada się tu, że bezpieczeństwo całej konstrukcji (pręta) jest równe bezpieczeństwu tej elementarnej kostki, która ma największe σ_{red} .

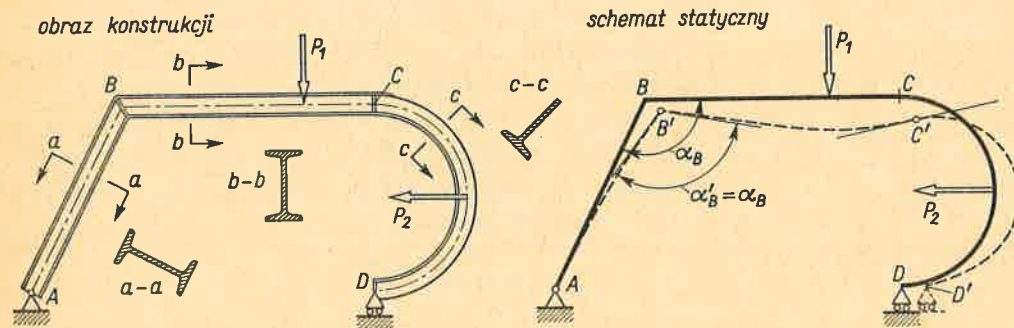
Przedstawiony w całej części drugiej materiał może wywołać u czytelnika wrażenie pewnej dysproporcji między ujęciem teoretycznym a jego praktycznym wykorzystaniem sprowadzającym się w gruncie rzeczy do posługiwania się niewielką częścią sformułowanych tu zależności. Tak jednak nie jest i wszystkie te wiadomości znajdują praktyczne zastosowanie w dalszej analizie.

Konstrukcje prętowe

9 STATYCZNIE WYZNACZALNE KONSTRUKCJE PRĘTOWE

9.1. Ramy płaskie

Konstrukcją prętową nazywamy ustrój złożony z prętów prostych lub zakrzywionych tworzących zespół geometryczny niezmienny, o ile pominąć odkształcenia prętów wywołane obciążeniem. Najprostszy zespół stanowi ciąg prętów, których końce łączą się kolejno w sztywnych narożach (rys. 9.1). Przy działaniu obciążeń naroże takie przemieszcza się jako sztywna całość, przy czym kąty między osiami prętów zostają nie zmienione. Taki typ konstrukcji spotykany często w praktyce nazywamy *ramą*. Gdy osie wszystkich prętów leżą w jednej tzw. *płaszczyźnie rami*, wówczas ramę nazywamy *płaską*. Gdy warunek ten nie jest spełniony, rama jest *przestrzenna*.

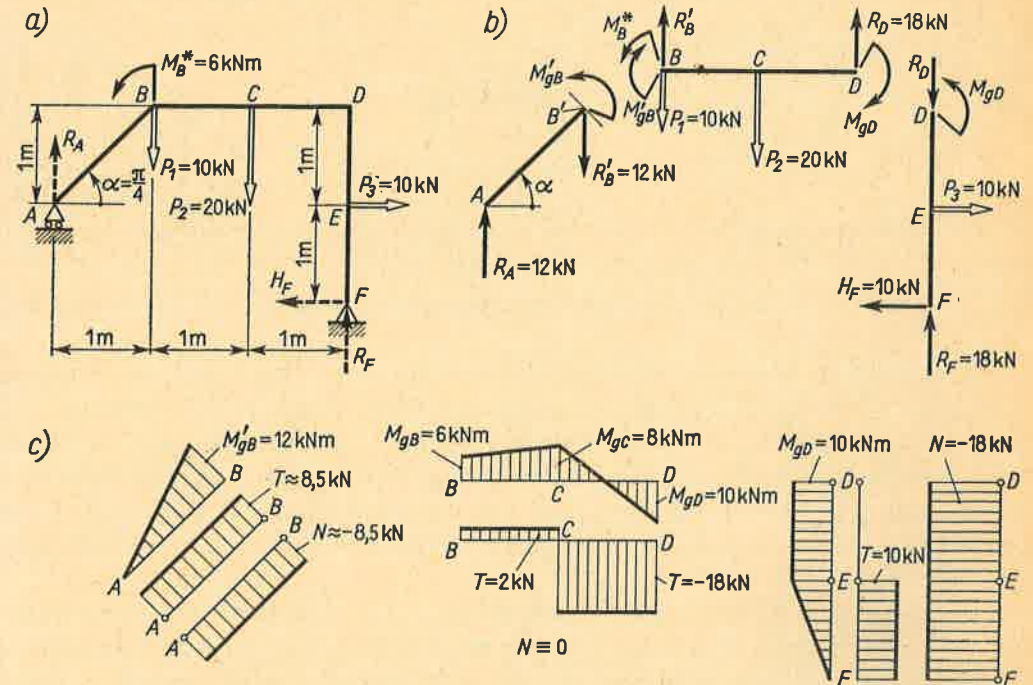


Rys. 9.1. Obraz konstrukcji prętowej i jej schemat statyczny

Linia $ABCD$ – oś konstrukcji przed obciążeniem, $AB'C'D'$ – po obciążeniu; $\alpha_B = \angle ABC$, $\alpha'_B = \alpha'_B = \alpha'_B$ – kąt w węzle B' między osiami odkształconych prętów AB' i $B'C'$,

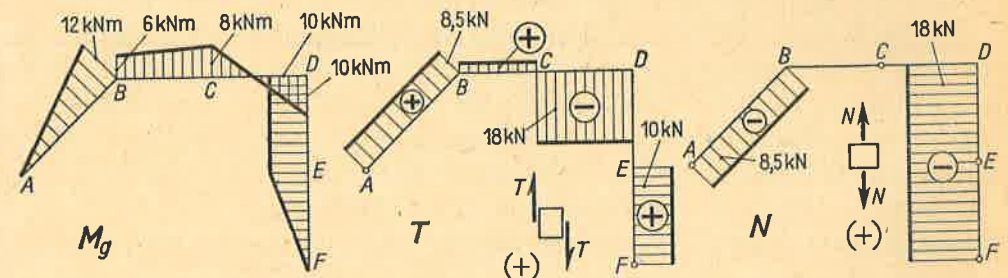
Analizę ram płaskich rozpoczynamy od ustalenia schematu statycznego (rys. 9.2a) i określenia reakcji R_A , R_F i H_F . W wyniku mamy pełny obraz obciążenia. Z kolei wyznaczamy wysiłek przekrojów. Znaczne ułatwienie daje tu podział na pręty składowe (rys. 9.2b)

z jednoczesnym wprowadzeniem oddziaływań dających równowagę każdego pręta. I tak, biorąc obciążony siłą $R_A = 12$ kN pręt AB' , w którym przekrój B' poprowadzono tuż na lewo od naroża B , widzimy, że oddziaływanie w przekroju B' składa się z siły $R'_B = 12$ kN równoległej do R_A i momentu $M'_{gB} = 12$ kNm. Z kolei w pręcie BCD dołączamy do obciążeń P_1 , P_2 i M_B^* znane już R'_B i M'_{gB} z przeciwnymi jednak zwrotami, gdyż są to



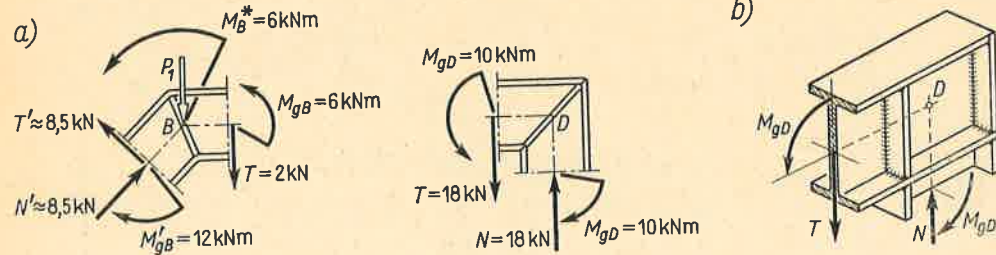
Rys. 9.2. Przykład analizy rami płaskiej

oddziaływania pręta AB' na BCD , a w przekroju D wyznaczamy $R_D = 18$ kN i $M_{gD} = 10$ kNm będące oddziaływaniami pręta DEF . Na koniec sprawdzamy równowagę ostatniego pręta DEF , obciążonego znanymi od początku siłami P_3 , H_F i R_F oraz wyznaczonymi już R_D i M_{gD} . Te ostatnie mają zwroty przeciwne niż w pręcie BCD . Po takim podziale wyznaczenie wysiłku przekroju i wykresów M_g , T i N (rys. 9.2c) jest już operacją



Rys. 9.3. Ostateczne wykresy M_g , N , T dla rami z rys. 9.2

znana z części pierwszej. Rzędne wykresów odkładamy prostopadle do osi odpowiedniego pręta, przy czym rzędne M_g dajemy po stronie ściskanych włókien. Siłę T uważamy za dodatnią, gdy daje ona współzegarowy obrót elementu, a dodatnia siła N odpowiada rozciąganiu. Te wykresy dla poszczególnych prętów łączymy zazwyczaj w jedną całość (rys. 9.3).



Rys. 9.4. Statyka naroży ramy

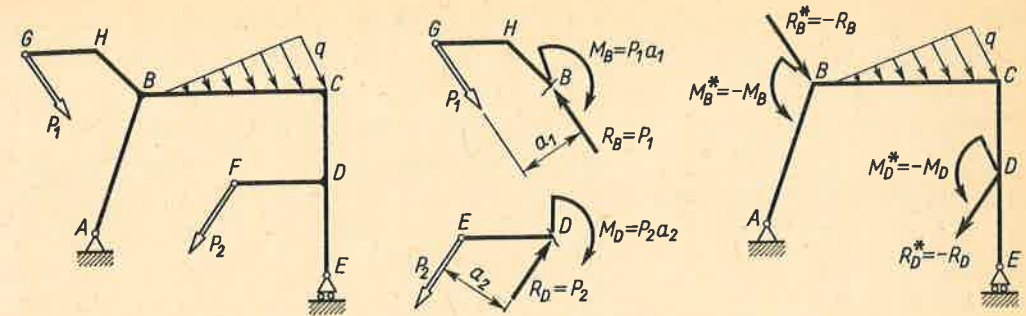
Na zakończenie tego etapu zbadajmy jeszcze statykę naroży (rys. 9.4a). Wykorzystując poprzednie wyniki (rys. 9.2c) mamy obraz naroża B , obciążonego siłą P_1 i momentem M_B^* oraz składowymi wysiłku przekroju w prętach AB' i BCD . Łatwo sprawdzić, że naroże jest w równowadze. Jak widać, obciążenie naroża momentem M_B^* pociąga przeskok momentu gnącego o wartość M_B^* . Przeskoku tego nie ma w narożu D , gdyż nie ma tam zewnętrznego momentu. Obydwa te spostrzeżenia często wykorzystujemy przy kontroli przebiegu M_g .

W drugim etapie analizy mając już wykresy M_g , T i N określamy ekstremalne naprężenia w niebezpiecznym przekroju i oceniamy bezpieczeństwo ustroju. Jednoczesne istnienie M_g , T i N powoduje, że ta ocena jest zadaniem z wytrzymałości złożonej. W takim ujęciu jest to znana już kontrola konstrukcji. Inny wariant, tj. kształtowanie konstrukcji, polega na doborze wymiarów zapewniających dostateczne bezpieczeństwo. W obydwóch wariantach podstawą są informacje znane już z pierwszej i drugiej części książki. Wyniki tego etapu analizy są wiarygodne z techniczną dokładnością dla części konstrukcji poza narożami. Raptowna zmiana kształtu (załomy) w narożach ma ten sam efekt co w prostych prętach istnienie karbów, zmian przekroju itp. Wartości naprężeń w narożu zależą od jego ukształtowania i nieistotna pozornie zmiana przekątnego żebra w narożu D (rys. 9.4a) na układ żeber (rys. 9.4b) ma tu ogromny lokalny wpływ⁽¹⁾.

Zagadnienia ram z tzw. odgałęzieniami (rys. 9.5) sprowadzają się do poprzednio rozpatrzonego. Wybierzmy dowolnie ciąg prętów $ABCDE$ jako podstawowy, a ciągi GHB i FD jako odgałęzienia. Odcinając te odgałęzienia bez naruszania ciągu podstawowego określamy niezbędne do ich równowagi oddziaływania R_B , M_B , R_D i M_D . Z kolei ciąg podstawowy obciążamy przeciwnie skierowanymi siłami R_B^* i R_D^* oraz momentami M_B^* i M_D^* . W ten sposób otrzymujemy trzy zagadnienia typu poprzedniego.

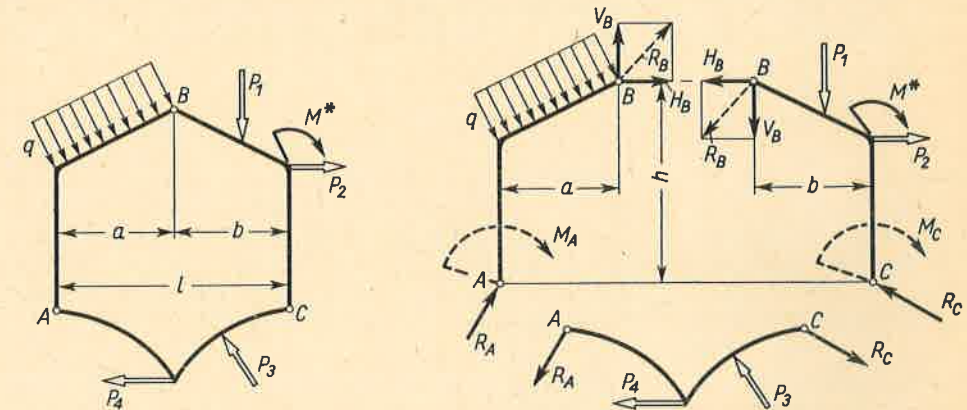
Łącząc w jeden statycznie wyznaczalny zespół szereg ram prostych (rys. 9.1) otrzy-

⁽¹⁾ Książka autora, *Statyka i stateczność konstrukcji*, wyd. 2, Warszawa 1965, PWN.



Rys. 9.5. Analiza ramy z odgałęzieniami

mujemy tzw. *ramy zespolone*. Ich przykładem jest rama trójprzegubowa (rys. 9.6) złożona z trzech ram prostych AB , BC i AC połączonych przegubami A , B i C . Po rozcięciu jej na ramy proste wyznaczamy oddziaływania R_A , R_B i R_C w przegubach. W tym celu rozkła-



Rys. 9.6. Rama trójprzegubowa; określenie reakcji w przegubach

damy reakcję R_B na składowe V_B i H_B . Z równania równowagi momentów ramy AB względem punktu A i podobnie ramy BC względem C mamy

$$-V_B a + H_B h + M_A = 0, \quad -V_B b - H_B h + M_C = 0,$$

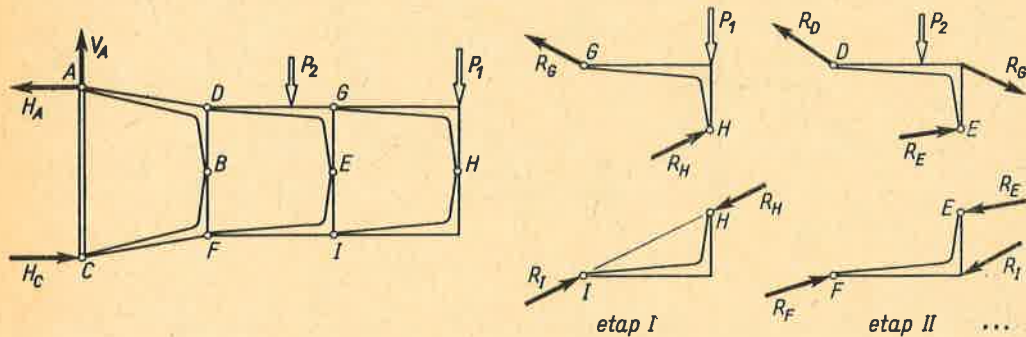
gdzie M_A (M_C) — moment obciążenia ramy AB (BC) względem punktu A (C). Z równań tych otrzymujemy

$$V_B = (M_A + M_C)/l, \quad H_B = (M_C a - M_A b)/hl,$$

gdzie oznaczenia są widoczne z rysunku. Pozostałe reakcje R_A i R_C obliczamy z równań równowagi rzutów dla ramy AB i BC . Po określeniu reakcji każdą z trzech ram prostych rozwiązujemy jak poprzednio.

Na ramie trójprzegubowej ABC (rys. 9.7) możemy nadbudować kolejne ramy DE i EF połączone przegubem E , a następnie ramy GH i HI połączone przegubem H . Taki złożony ustrój rozwiązujemy w kolejności odwrotnej do jego tworzenia. I tak w etapie *I* wyzna-

czamy R_G, R_H, R_I , jak na rys. 9.6. W etapie II określamy reakcje R_D, R_E, R_F traktując już oddziaływania R_G i R_I jako obciążenia na równi z siłą P_2 . Na końcu rozwiązujemy



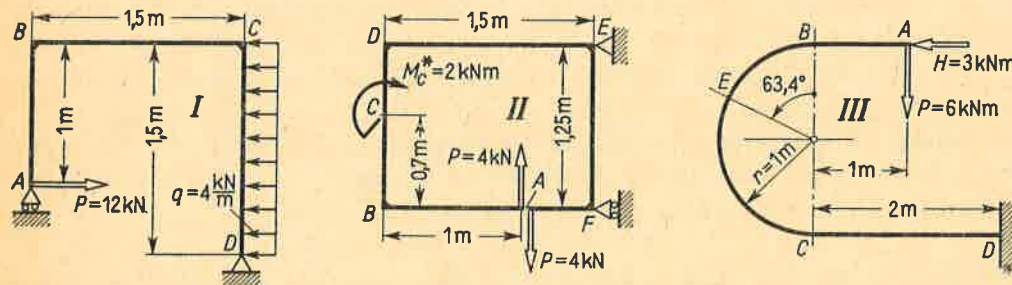
Rys. 9.7. Przykład ustroju ramowego statycznie wyznaczalnego

podstawową ramę ABC obciążoną znanymi już reakcjami R_D i R_F . Widać, że to rozwiązanie przypomina analizę kratownic, a różni się innym formułowaniem równań równowagi i inną pracą elementów.

Zadania

1. Wyznaczyć przebieg M_g, T i N w podanych ramach (rys. 9.8).

Odp. Jako sprawdzian podaje się: dla ramy I jest $(M_g)_{ekstr} = 13,5 \text{ kNm}$ w narożu C; dla ramy II jest $|M_g|_{ekstr} = 4 \text{ kNm} = \text{const}$ na odcinku BC oraz $|M_g|_{ekstr} = 4 \text{ kNm}$ w narożu E; dla ramy III $|M_g|_{ekstr} = 9,66 \text{ kNm}$ w przekroju E oraz $|M_g|_{ekstr} = 12 \text{ kNm}$ w przekroju D.



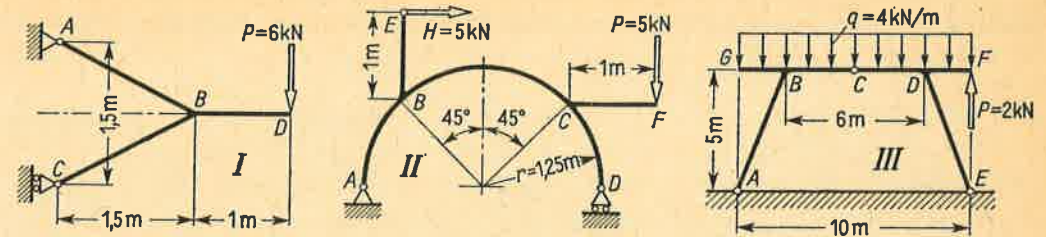
Rys. 9.8.

2. Wyznaczyć ekstremalny moment M_g w podanych ramach (rys. 9.9).

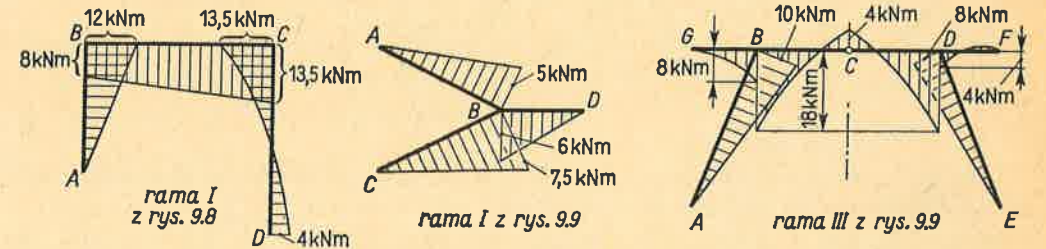
Odp. Rama I: 7,5 kNm w przekroju B pręta BC; rama II: 7,58 kNm w przekroju B odcinka BC; rama III: 18 kNm w przekrojach B i D części BCD.

3. Nie rachując szczegółowo wskazać rażące błędy wykresów M_g (rys. 9.10), które ktoś podał jako wynik poprzednich zadań.

Odp. Rama I z rys. 9.8: przeskok M_g w narożu B oraz $M_g \neq 0$ w punkcie D; rama I z rys. 9.9: brak równowagi węzła B; rama III z rys. 9.9: $M_g \neq 0$ i załom wykresu w przegubie C oraz brak równowagi węzła D.



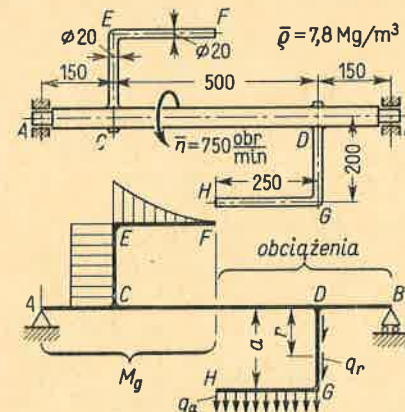
Rys. 9.9.



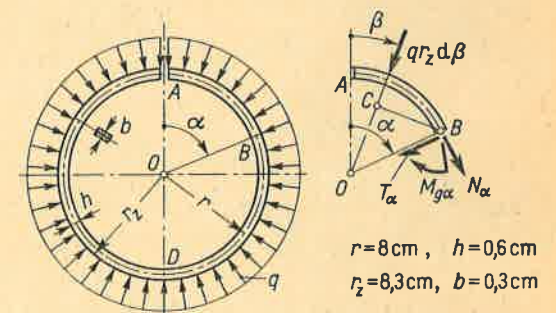
Rys. 9.10. Błędne rozwiązania ram poprzednich

4. Stalowe mieszadło (rys. 9.11) składa się z wałka AB i dwóch ramion CEF i DGH . Obliczyć ekstremalne naprężenia w ramieniu.

Odp. Obciążeniami są „siły bezwładności”: $q_a = \bar{\rho} \omega^2 A a$, $q_r = \bar{\rho} \omega^2 A r$, gdzie $A = 3,14 \text{ cm}^2$, $\omega = \pi \bar{n} / 30 = 78,5 \text{ rad/s}$, $\bar{\rho} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, skąd $q_a = 3,02 \text{ kN/m}$, $q_r = 3,02 (r/a) \text{ kN/m}$. W niebezpiecznym przekroju C jest $M_g = 94,6 \text{ Nm}$, $N = 1,13 \text{ kN}$, skąd $\sigma_e = (M_g/W) + (N/A) \approx 124 \text{ MPa}$.



Rys. 9.11.



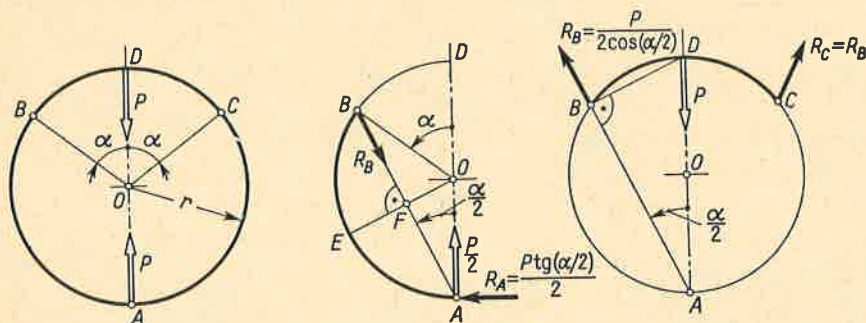
Rys. 9.12.

5. Na żeliwny pierścień tłokowy działa promieniowy nacisk $q = 0,3 \text{ kN/m}$ (rys. 9.12). Określić ekstremalne naprężenie.

Odp. Moment gnący w przekroju B od siły $q r_z d\beta$ jest $q r_z d\beta \cdot BC = q r_z r \sin(\alpha - \beta) d\beta$, a całkowity moment

$$M_{g\alpha} = \int_0^\alpha q r_z r \sin(\alpha - \beta) d\beta = q r_z r (1 - \cos \alpha)$$

osiąga ekstremum w przekroju D ($\alpha = \pi$). Pomijając wpływ sił N oraz krzywizny mamy $\sigma \approx \pm 12q_r z r/bh^2 \approx \pm 220$ MPa.



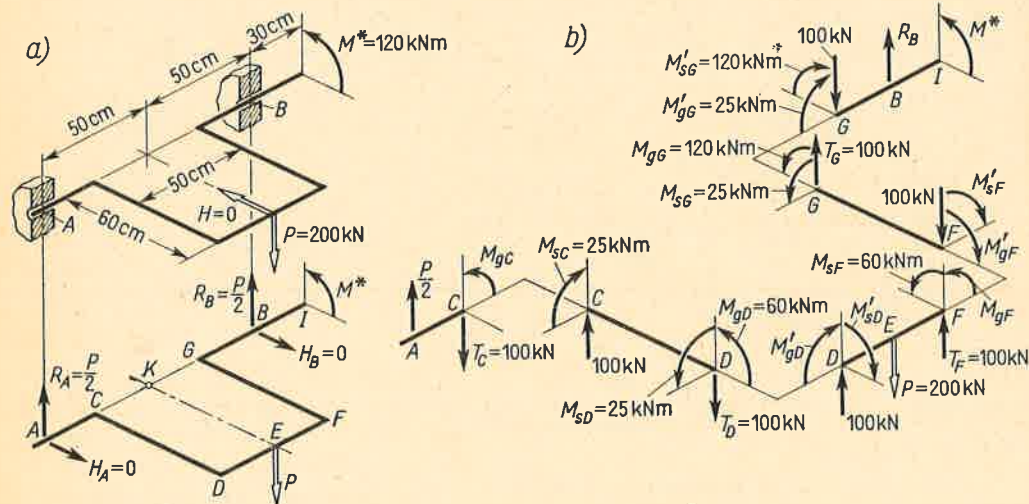
Rys. 9.13.

6. Trójprzegubowy pierścień obciążono siłami P (rys. 9.13). Gdzie należy umieścić przeguby B i C , aby ekstremalny M_g był najmniejszy?

Odp. Po określeniu reakcji R_A i R_B piszemy warunek $R_B \cdot \overline{EF} = R_B \cdot \overline{BD}$, skąd $\sin(\alpha/2) = 1/3$, $\alpha = 39^\circ$ i $(M_g)_{\text{ekstr}} \approx 0,353 Pr$.

9.2. Ramy obciążone przestrzennie

Zacznijmy od płaskiej ramy⁽¹⁾ obciążonej prostopadłą do płaszczyzny ramy siłą P i momentem M^* równoważącym jej obrotowe działanie (rys. 9.14a). Po usunięciu więzów i określeniu reakcji $R_A = R_B = P/2$ rozcinamy myślowo ramę na poszczególne pręty (rys. 9.14b), wstawiając w przecięciach oddziaływania niezbędne do zachowania równowagi.



Rys. 9.14. Analiza ramy płaskiej przestrzennie obciążonej

⁽¹⁾ Takiemu schematowi odpowiada na przykład wał korbowy.

I tak dla pręta AC

$$T_C = P/2 = 100 \text{ kN} \quad \text{ i } \quad M_{gC} = (P/2) \cdot \overline{AC} = 25 \text{ kNm}.$$

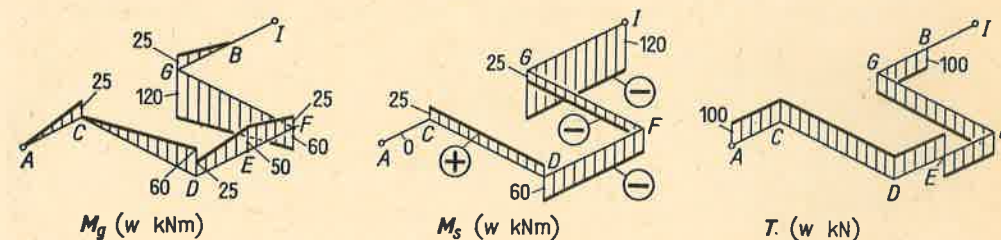
Wielkości te są wysiłkiem przekroju C pręta AC , przy czym M_{gC} jest momentem gnącym, T_C — siłą tnącą. Z kolei pręt CD obciążają w punkcie C znany już moment $M_{sC} = M_{gC} = 25 \text{ kNm}$ oraz siła 100 kN , będące oddziaływaniem pręta AC , a więc o przeciwnych niż poprzednio zwrotach. Niezbędny do równowagi pręta CD układ sił i momentów w punkcie D

$$M_{sD} = M_{sC} = 25 \text{ kNm}, \quad M_{gD} = 100 \text{ kN} \cdot \overline{CD} = 60 \text{ kNm}, \quad T_D = 100 \text{ kN}$$

ma zwroty podane na rysunku. Układ ten po zmianie zwrotów, czyli $M'_{gD} = M_{sD}$, $M'_{sD} = M_{gD}$, i siła 100 kN jest z kolei obciążeniem końca D pręta DEF , skąd mamy niezbędne do równowagi tego pręta $T_F = P = 100 \text{ kN}$ oraz

$$M_{sF} = M'_{sD} = 60 \text{ kNm}, \quad M_{gF} = M'_{gD} + 100 \text{ kN} \cdot \overline{DF} - P \cdot \overline{EF} = 25 \text{ kNm}.$$

Podobnie postępujemy z pozostałymi prętami FG , GBI . W wyniku zadanie sprowadza się do analizy pięciu prętów prostych. W analizie tej należy zwrócić uwagę na przeskok w narożach poszczególnych składowych wysiłku przekrojów. Gdy na przykład badamy przekrój C pręta AC , wówczas moment M_{gC} jest oczywiście momentem gnącym. Jeśli jednak badamy przekrój C pręta CD , to oddziaływanie pręta AC , czyli M_{sC} , jest momentem skręcającym dla przekroju C pręta CD . Podobnie w narożu D : moment gnący M_{gD} dla



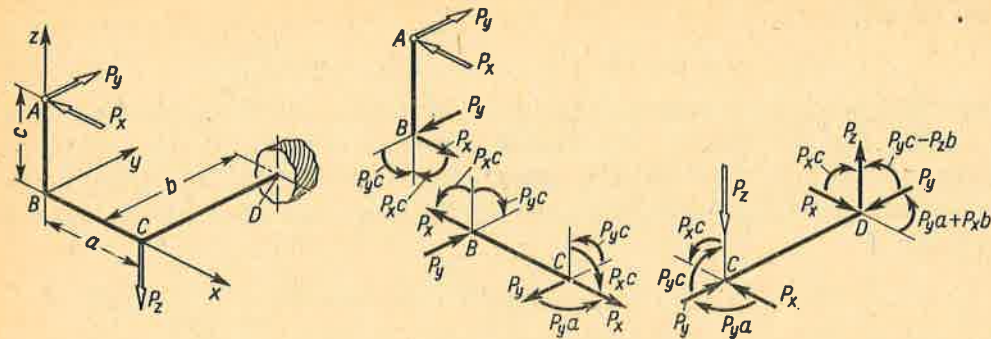
Rys. 9.15. Wyniki analizy ramy z rys. 9.14

przekroju D pręta CD staje się momentem skręcającym M'_{sD} dla przekroju D pręta DEF , a poprzedni moment skręcający M_{sD} staje się momentem gnącym M'_{gD} itd. Te fakty należy uwzględnić przy budowaniu wykresów M_g i M_s , które zazwyczaj rysujemy w perspektywie (rys. 9.15). Rzędne M_g odmierzamy przy tym po stronie włókien ściskanych, a do rzędnych M_s stosujemy umowę z rys. 3.5.

Jeśli na ramę płaską działa także obciążenie w płaszczyźnie ramy ($H \neq 0$), to jego działanie badamy oddzielnie, jak podano w art. 9.1, a następnie stosujemy superpozycję. Takiemu łącznemu działaniu odpowiada najogólniejszy przypadek wytrzymałości złożonej pręta, w którym istnieją wszystkie składowe wysiłki.

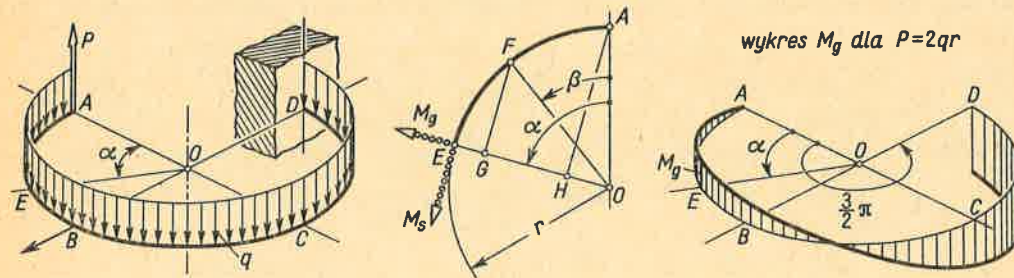
Powyższą metodę rozdziału ramy na poszczególne pręty stosujemy także w ramach przestrzennych⁽¹⁾ (rys. 9.16). Jediną różnicę stanowi konieczność formułowania dla każdego

⁽¹⁾ Sprawdzenie wyników z rys. 9.16 zostawia się czytelnikowi.



Rys. 9.16. Analiza ramy przestrzennej

pręta wszystkich sześciu warunków równowagi⁽¹⁾. Zbadanie wysiłku przekrojów w prętach daje w wyniku sześć wykresów, tj. momentów gnących, skręcającego, siły wzdłużnej i sił tnących. Dla większej jasności wykresy te zaleca się rysować dla oddzielnych prętów. Podobnie jak poprzednio, w narożach ram przestrzennych zachodzą przeskoki składowych wysiłku. Przeskoki te powodują, że rozkład naprężeń w narożach odbiega znacznie od wyników analizy dla pręta prostego i tak jak w ramach płaskich zależy od ukształtowania naroża.



Rys. 9.17. Analiza pierścienia obciążonego przestrzennie

Zagadnieniami wymagającymi pewnej wyobraźni są przestrzenne obciążenia prętów zakrzywionych (rys. 9.17). Na myślowo odciętą część AE działają: do góry siła P i do dołu obciążenie $qr\alpha$, wobec czego niezbędna do równowagi i skierowana do dołu siła tnąca

$$T = P - qr\alpha. \quad (a)$$

Przy badaniu równowagi momentów względem osi OE zauważmy, że ramię siły P jest $AH = r \sin \alpha$, a ramię elementarnej siły $(qr d\beta)$ jest $FG = r \sin(\alpha - \beta)$, skąd

$$M_g - Pr \sin \alpha + \int_0^\alpha qr d\beta \cdot r \sin(\alpha - \beta) = 0,$$

⁽¹⁾ Poprzednio (rys. 9.14), gdy $H = 0$, trzy warunki równowagi, tj. sumy rzutów na osie w płaszczyźnie ramy i momentów względem osi do niej prostopadłej, są spełnione tożsamościowo.

a po scałkowaniu i uporządkowaniu

$$M_g = Pr \sin \alpha - qr^2(1 - \cos \alpha). \quad (b)$$

Podobnie z warunku równowagi momentów względem stycznej do osi pręta w punkcie E mamy

$$M_s + P \cdot \overline{EH} - \int_0^\alpha (qr d\beta) \cdot \overline{EG} = 0,$$

a uwzględniając, że $\overline{EH} = r(1 - \cos \alpha)$, $\overline{EG} = r[1 - \cos(\alpha - \beta)]$, mamy

$$M_s = -Pr(1 - \cos \alpha) + qr^2(\alpha - \sin \alpha). \quad (c)$$

Wyniki (a)÷(c) ilustrujemy wykresami perspektywicznymi, jak podany na rysunku wykres M_g . Ekstrema M_g i M_s wyznaczamy z warunków $dM_g/d\alpha = 0$ i $dM_s/d\alpha = 0$ itd. Naprężenia określamy jak w prętach prostych, tj. pomijając wpływ krzywizny. Dokładność tego przybliżenia jest rzędu b/r , gdzie b — gabaryt przekroju mierzony równolegle do płaszczyzny ramy.

Z tych przykładów ram przestrzennych widać istotną rolę rysunku konstrukcji lub jej fragmentów zwłaszcza przy badaniu równowagi.

Zadania

1. Na ramę (rys. 9.14) działa w punkcie E moment $M^* = 20$ kN m o wektorze prostopadłym do AB . Określić przebieg T , M_g i M_s .

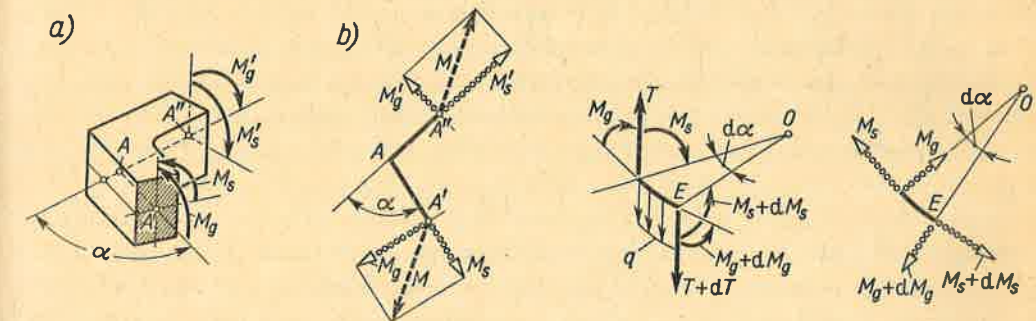
Odp. Na części $ACDE$ wykresy, jak na rys. 9.15, zredukowane pięć razy. Na części $EFGB$ wykresy M_s i T , jak w części $ACDE$, a wykres M_g przeciwny. W przekroju E przeskok M_g od $+10$ kN m do -10 kN m.

2. W przekroju A (rys. 9.16) działa w płaszczyźnie xz moment $M_A^* = 10$ kN m. Wyznaczyć wysiłki przekrojów.

Odp. Część ABC zginana w płaszczyźnie xz , $M_g = M_A^* = \text{const}$. Pręt CD skręcany; $M_s = M_A^* = \text{const}$.

3. W punkcie A pierścienia (rys. 9.17) działa dawna siła P i moment $M_A^* = Pr$, którego wektor ma zwrot i kierunek zgodny z osią OB . Wyznaczyć wysiłki przekrojów.

Odp. $M_s = Pr = \text{const}$, $M_g \equiv 0$, niezależnie od kąta α .



Rys. 9.18. Analiza równowagi naroża

Rys. 9.19. Równowaga elementu pierścienia

4. Jak zmienia się wyrażenia (b) i (c), jeśli $P = 0$, zaś q jest liniowo zależne od α , tj. $q = q_D(2\alpha/3\pi)$.
Odp. $M_s = -2q_D r^2(\alpha - \sin \alpha)/3\pi$, $M_s = -q_D r^2(\alpha^2 + 2 \cos \alpha - 2)/3\pi$.

5. W narożu A ramy (rys. 9.18a) kąt $\alpha \neq \pi/2$. Jakie są M'_g i M'_s w przekroju A'' (za narożem), jeśli w przekroju A' (przed narożem) działają znane M_g i M_s ?

Rozwiązanie wykreślne. Na rysunku naroża w rzucie (rys. 9.18b) nanosimy wektory M_g i M_s oraz wypadkowy wektor M . W przekroju A'' przeciwny wektor M rozkładamy na M'_s i M'_g .

Rozwiązanie analityczne wynika z poprzedniego

$$M'_s = M_g \sin \alpha + M_s \cos \alpha, \quad M'_g = M_s \sin \alpha - M_g \cos \alpha.$$

6. Dla pierścienia (rys. 9.17) z wzoru (e) mamy $dM_s/d\alpha = -Pr \sin \alpha + qr^2(1 - \cos \alpha)$, a więc $dM_s/d\alpha = -M_g$. Czy to jest przypadek?

Odp. Nie. Z równowagi momentów względem osi stycznej w punkcie E do elementu pierścienia (rys. 9.19) mamy

$$(M_s + dM_s) - M_s \cos d\alpha + M_g \sin d\alpha = 0$$

i po uwzględnieniu, że $\cos d\alpha = 1$, $\sin d\alpha = d\alpha$,

$$dM_s/d\alpha = -M_g.$$

Podobnie z dwóch pozostałych równań równowagi mamy

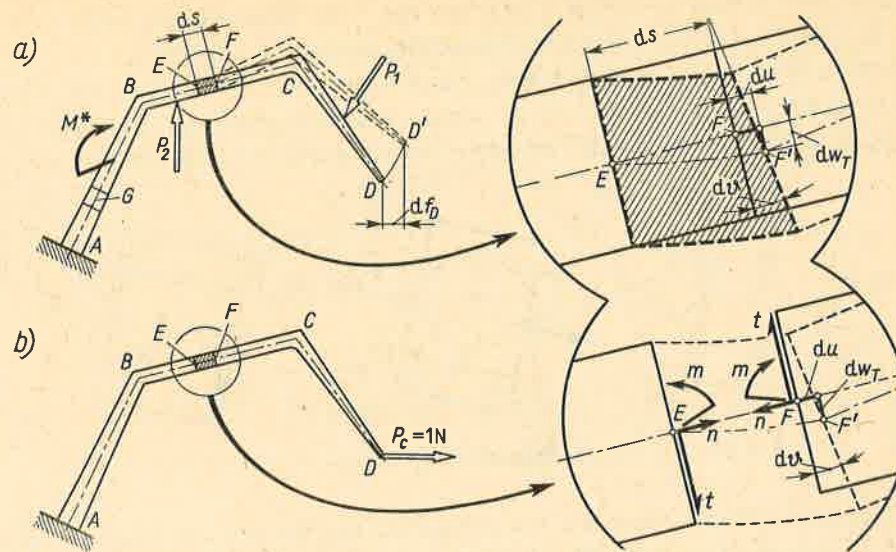
$$dM_g/d\alpha = Tr + M_s, \quad dT/d\alpha = -qr.$$

9.3. Wyznaczanie przemieszczeń w ustrojach płaskich

Metodę wyznaczania przemieszczeń objaśnimy na przykładzie płaskiego ustroju (rys. 9.20a), w którym chcemy na razie znaleźć poziome przesunięcie df_D wywołane założoną z góry deformacją jednego tylko elementu EF . Deformacja ta składa się ze względnego obrotu przekrojów E i F o kąt $d\vartheta$, rozsunęcia ich o du i prostopadłego do osi pręta przesunięcia dw_T .

Postawione zadanie można rozwiązać wykreślnie. Traktując przekrój E jako bazę, rysujemy zdeformowany element EF , a potem dopasowujemy do przemieszczonego przekroju F' nieodkształconą resztę, tj. część FCD .

Zamiast tej niedokładnej metody wykreślnej stosujemy rozwiązanie analityczne metodą *Maxwella-Mohra*. W tym celu (zupełnie niezależnie od pierwotnego układu sił) obciążamy ustrój w punkcie D jednostkową poziomą siłą $P_c = 1$ N, a więc mającą kierunek poszukiwanego przesunięcia (rys. 9.20b). Siła ta wywołuje w utwierdzonym przekroju A reakcje, a w innych odpowiedni wysiłek zapewniający przy myślowym przecięciu równowagę każdej części ustroju. W nieskończenie bliskich przekrojach E i F składowe tego wysiłku są: moment gnący m , siła tnąca t i wzdłużna n . Składowe te ujawniają się jako siły zewnętrzne, gdy usuniemy myślowo element EF , przy czym części ABE i FCD zostają w równowadze. Ten ostatni fakt ujmemy w zależność opartą na znanej z mechaniki zasadzie *prac przygotowanych*. Zasada ta głosi, że warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi układu materialnego jest, żeby suma prac wszystkich sił (zewnętrznych i wewnętrznych) na dowolnym przesunięciu przygotowanym, tj. zgodnym z narzuconymi więzami, była równa zero. Dla badanego tu układu sił $P_c = 1$ N, m , t i n przyjmiemy jako przesunięcia przygotowane układ przemieszczeń z zadania pierwotnego (rys. 9.20a). W tej sytuacji prace przygotowane są



Rys. 9.20. Określenie przemieszczenia ustroju przy użyciu zasady prac przygotowanych

odpowiednio $1 \cdot df_D$, $-m d\vartheta$, $-t dw_T$ i $-n du$, a ich suma⁽¹⁾ w badanym tu stanie równowagi jest równa zero, czyli

$$1 df_D - m d\vartheta - t dw_T - n du = 0,$$

skąd mamy poszukiwane przesunięcie poziome punktu D

$$df_D = (m/1) d\vartheta + (t/1) dw_T + (n/1) du, \quad (a)$$

przy czym wartości liczbowe $(m/1)$, $(t/1)$, $(n/1)$ są nadal równe m , t , n , natomiast ich miana $N \text{ m/N}$ bądź N/N oznaczają stosunek danej składowej wysiłku do jednostkowego obciążenia.

Rozszerzmy teraz pierwotne zadanie i założmy, że wymuszoną deformację $d\vartheta$, $d\bar{u}$, $d\bar{w}_T$ ma element G , a nie EF . Postępując jak poprzednio określimy nowe poziome przesunięcie punktu D

$$d\bar{f}_D = (\bar{m}/1) d\bar{\vartheta} + (\bar{t}/1) d\bar{w}_T + (\bar{n}/1) d\bar{u}, \quad (b)$$

gdzie \bar{m} , \bar{t} , \bar{n} — składowe wysiłku w elemencie G odpowiadające tej samej sile $P_c = 1$ N. Jeżeli deformacji ulegają jednocześnie elementy EF i G , to wypadkowe poziome przesunięcie punktu D jest według zasady superpozycji algebraiczną sumą wyrażeń (a) i (b). Uogólniając to na przypadek deformacji *wszystkich* elementów pierwotnego ustroju, otrzymamy

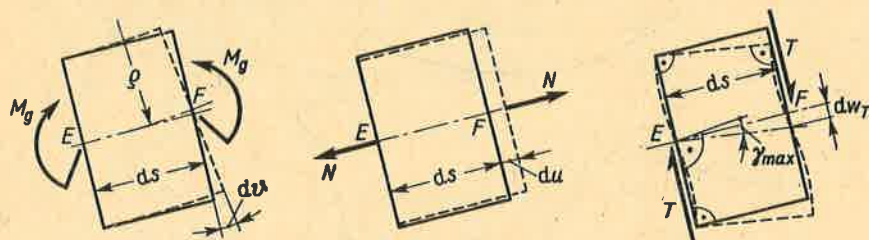
$$f_D = \int df_D = \int m d\vartheta + \int t dw_T + \int n du, \quad (9.1)$$

jako całkowite poziome przesunięcie punktu D . Całkowanie (sumowanie) obejmuje tu wszystkie pręty ustroju. Zmienną niezależną jest współrzędna s określająca położenie

⁽¹⁾ W bilansie tym nie ma pracy reakcji, gdyż utwierdzony przekrój A nie ma żadnego przemieszczenia.

przekroju, a jej funkcjami zadane z góry $d\theta$, dw_T i du oraz odpowiadające $P_c = 1$ N wielkości m , t i n , których miana, jak mówiono, są N m/N oraz N/N.

Zależność (9.1) wynika z samych tylko zasad statyki, jest więc słuszna niezależnie od tego, czy materiał jest sprężysty, czy nie, oraz niezależnie od przyczyn wywołujących deformację, gdyż stanowi ona analityczny odpowiednik metody wykreślnej mającej te właśnie



Rys. 9.21. Określenie elementarnych odkształceń odcinka pręta

cechy. Największe jednak znaczenie ma przypadek, gdy badany ustrój (rys. 9.20a) jest sprężysty i przyczyną jego odkształcenia jest obciążenie P_1 , P_2 , M^* , wywołujące w przekrojach elementu EF wysiłki o składowych M_g , N i T (rys. 9.21). W wyniku tego przekroje elementu ulegają

$$\text{obrotowi o kąt } d\theta = ds/\rho = M_g ds/EJ_y, \quad (c)$$

$$\text{rozsunięciu o } du = N ds/EA \quad (d)$$

oraz przesunięciu dw_T wywołanym naprężeniami τ od siły T . Gdyby rozkład τ był równomierny, czyli $\tau = \tau_{sr} = T/A$, to przekrój zostałby płaski i wtedy byłoby $dw_T = (\tau_{sr}/G) ds = T ds/GA$. Przy nierównomiernym rozkładzie τ , ale płaskim przekroju, byłoby $dw_T = \gamma_{max} ds = \tau_{max} ds/G$. W rzeczywistości (rys. 5.37) przekrój nie zostaje płaski i szukane dw_T jest mniejsze niż ta druga wartość, ale większa od pierwszej, co wyrażamy pisząc, że

$$dw_T = \psi T ds/GA, \quad (e)$$

gdzie bezwymiarowy współczynnik ψ zależy od kształtu przekroju. Zgodnie z tym, co powiedziano, mamy $1 \leq \psi \leq (\tau_{max}/\tau_{sr})$ i na przykład dla przekroju prostokątnego $\psi = 6/5$, dla kołowego $\psi = 32/27$ itd.

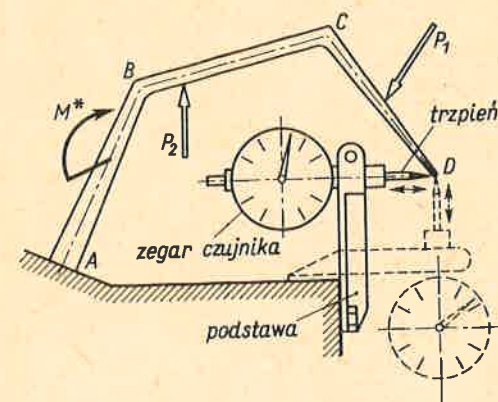
Wstawiając teraz wyniki (c), (d) i (e) do (9.1) otrzymujemy

$$f = \int \frac{M_g m ds}{EJ_y} + \int \frac{\psi T t ds}{GA} + \int \frac{N n ds}{EA}, \quad (9.2)$$

jako ogólne wyrażenie przemieszczenia f w płaskim ustroju. Wyrażenia podcałkowe są przy tym dodatnie, gdy składowe wysiłku M_g i m , T i t , N i n mają odpowiednio zgodne zwroty, tak bowiem wynika z całosci przeprowadzonych rozważań. Dodatnia wartość f oznacza, że przemieszczenie to ma kierunek zgodny z siłą $P_c = 1$ N, gdyż tylko wtedy praca jej jest dodatnia, jak założono.

Zasadniczą ideę metody Maxwella-Mohra, tj. wprowadzenie jednostkowej siły P_c , można przyrównać do pomiaru warsztatowego (rys. 9.22). I tak, chcąc zmierzyć poziome

przesunięcie punktu D ustroju, umocujemy na podłożu zegarowy czujnik, którego przesuwny trzpień napędzający wskazówkę dotyka tego punktu. Kierunek trzpienia musi być poziomy, gdyż tylko wtedy jego przesuw odpowiada zamierzonemu pomiarowi. Zrozu-



Rys. 9.22. Analogia sił jednostkowych do pomiaru warsztatowego

miała jest przy tym różnica między obciążeniem P_1 , P_2 , M^* wywołującym odkształcenia obiektu a czujnikiem jako elementem pomiarowym. Porównując ten opis z poprzednimi rozważaniami widzimy całkowitą analogię, z tym że w pojęciach statyki rolę czujnika spełnia jednostkowa siła P_c o kierunku, który zdolny jest „pomierzyć” szukane przesunięcie.

Stosując tę analogię widzimy, że dla pomiaru pionowego przesunięcia punktu D trzpień czujnika musi być pionowy i musi dotykać punktu D . Tłumacząc to na pojęcia statyki powiemy, że dla obliczenia pionowego przesunięcia punktu D należy w nim przyłożyć pionową jednostkową siłę spełniającą rolę czujnika, a więc mającą zupełnie inną rolę niż rzeczywiste obciążenie ustroju.

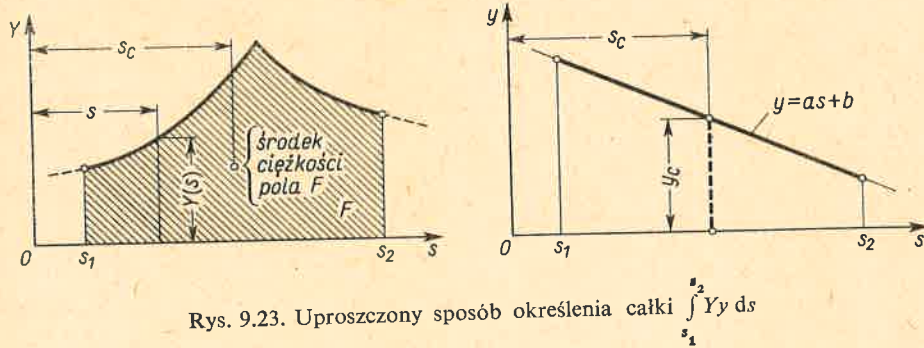
W podanym przykładzie oraz innych zadaniach tego typu można wyodrębnić trzy etapy. Pierwszy z nich, to odpowiedni dobór siły jednostkowej P_c „mierzącej”, jak na rys. 9.20b, poszukiwane przesunięcie, tj. poziome, punktu D . Etap drugi, to określenie, jak podano w art. 9.1, przebiegu M_g , T i N dla rzeczywistego obciążenia ustroju oraz przebiegu m , t i n dla obciążenia siłą (czujnikiem) $P_c = 1$ N. Wynikiem tego etapu są bądź wykresy, jak na rys. 9.3, bądź funkcje $M_g(s)$, ..., $n(s)$ współrzędnej s cechującej położenie przekroju. Etap ostatni, to obliczenie całek wyrażenia (9.2). Gdy pręty ustroju mają stałe sztywności EJ_y , EA i GA , wówczas funkcje podcałkowe są iloczynem dwóch funkcji, np. $M_g(s) m(s)$. Bardzo często co najmniej jedna z tych funkcji jest liniowa i wtedy obliczenie jest uproszczone, gdyż całka jest typu

$$\int_{s_1}^{s_2} Y(s) y(s) ds,$$

gdzie $Y(s)$ — dowolna (nieliniowa, łamana, nieciągła itp.) funkcja s (rys. 9.23), zaś

$y = as + b$ — liniowa w całym przedziale s_1, s_2 . Wartość całki⁽¹⁾

$$\int_{s_1}^{s_2} Y(s)y(s) ds = F y_c \quad (9.3)$$



Rys. 9.23. Uproszczony sposób określenia całki $\int_{s_1}^{s_2} Y y ds$

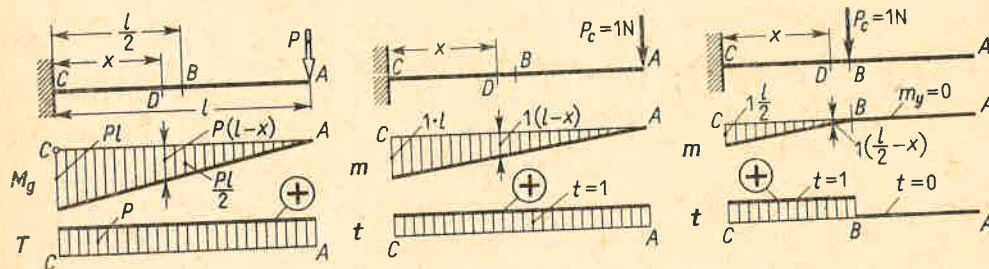
jest po prostu iloczynem pola F nieliniowej funkcji Y przez tę rzędną y_c funkcji liniowej y , która odpowiada odciętej s_c środka ciężkości pola F . Z tej tzw. reguły Wierieszczagina będziemy często korzystać. Niektóre wartości całek podane są w tabl. 9.1.

Zadania

1. Określić pionowe przemieszczenia punktów A i B pryzmatycznej belki (rys. 9.24) o przekroju kołowym wywołane siłą P .

Rozwiązanie. Pierwszy etap polega na wprowadzeniu w przekroju A jednostkowej siły pionowej $P_c = 1$ N, jako „czujnika” mierzącego szukane przesunięcie. W etapie drugim wyznaczamy składowe wysiłki przekroju D

$$M_g = P(l-x), \quad T = P, \quad N = 0 \quad \text{oraz} \quad m = (l-x) \text{ N m/N}, \quad t = 1 \text{ N/N}, \quad n = 0,$$



Rys. 9.24. Przykład obliczenia ugięć belki

(1) Przebieg całkowania jest następujący:

$$\int_{s_1}^{s_2} Y(s)(as+b) ds = a \int_{s_1}^{s_2} Y s ds + b \int_{s_1}^{s_2} Y ds = (as_c + b) F,$$

przy czym $\int Y s ds$ jest momentem statycznym pola $F = \int Y ds$ względem osi rzędnych i wobec tego moment ten jest równy $F s_c$, gdzie s_c — odcięta środka ciężkości pola F , a z rysunku $y_c = as_c + b$.

jako funkcje x słuszne w całym przedziale $(0, l)$. W etapie trzecim funkcje te podstawiamy do (9.2) i całkujemy

$$f_A = \int_0^l \frac{P(l-x)(l-x) dx}{EJ_y} + \psi \int_0^l \frac{P \cdot 1 \cdot dx}{GA} + 0 = \frac{Pl^3}{3EJ_y} + \frac{\psi Pl}{GA},$$

przy czym wielkości M_g i m , T i t wstawiono ze znakiem plus, gdyż ich zwroty są odpowiednio zgodne. Szukane przesunięcie f_A jest sumą dwóch składników. Pierwszy jest identyczny z wynikiem (5.25), drugi reprezentuje, pominięty w rozdz. 5, wpływ siły tnącej na ugięcie belki. Ponieważ $G = E/2(1+\nu)$, a dla przekroju kołowego $J_y = \pi d^4/64$, $A = \pi d^2/4$ oraz $\psi = 32/27 = 1,185$, zatem poprzedni wynik ma postać

$$f_A = \frac{Pl^3}{3EJ_y} \left(1 + \frac{3\psi E}{G} \frac{J_y}{Al^2} \right) = \frac{Pl^3}{3EJ_y} \left[1 + \frac{4(1+\nu)}{9} \left(\frac{d}{l} \right)^2 \right] = \frac{Pl^3}{3EJ_y} \left[1 + 0,6 \left(\frac{d}{l} \right)^2 \right],$$

przy czym w ostatnim wyniku przyjęto $\nu = 0,3$. Widać, że wpływ siły tnącej jest rzędu $(d/l)^2$ w stosunku do jedności i gdy $l/d > 8$, wówczas wpływ ten nie przekracza 1% wartości klasycznej, tj. $Pl^3/3EJ_y$.

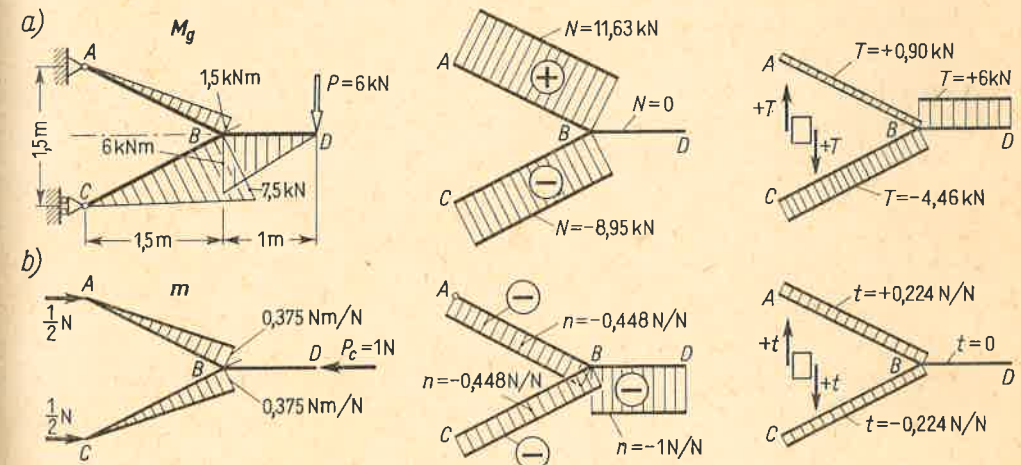
Podobnie określamy przemieszczenie punktu B wprowadzając w nim „czujnik” $P_c = 1$ N i budując wykresy m , t . Stosując regułę Wierieszczagina musimy jako funkcję y wziąć M_g i T , a jako Y funkcje m i t , gdyż te ostatnie nie są w ścisłym znaczeniu liniowe [$m(x)$ jest łamana, $t(x)$ — nieciągła]. Pole $(F)_m = 0,5(l/2)(l/2) = l^2/8$, a rzędna $(y_c)_m = 5Pl/6$, bo środek ciężkości wykresu $m(x)$ ma odciętą $x_c = l/6$. W wyniku

$$\int (M_g m/EJ_y) dx = (l/EJ_y)(l^2/8)(5Pl/6) = 5Pl^3/48EJ_y.$$

Analogicznie $\int \psi T t dx/GA = \psi Pl/2GA$, a wynik końcowy

$$f_B = (5Pl^3/48EJ_y) [1 + (32/45)(1+\nu)(d/l)^2] \approx (5Pl^3/48EJ_y) [1 + 0,93(d/l)^2]$$

ma podobny sens jak poprzednio. Dodatkowo wartości f_A i f_B świadczą, że mają one kierunek zgodny z odpowiednimi „czujnikami” P_c .



Rys. 9.25. Przykład liczbowy

Dane: $J_y = 328 \text{ cm}^4$, $A = 14,2 \text{ cm}^2$, $\nu = 2,0$, $E = 2,6 G = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $l_{AB} = l_{CB} = 1,68 \text{ m}$.

2. Określić całkowite przemieszczenie punktu D ustroju I z rys. 9.9, przyjmując jednakową sztywność prętów, jak na rys. 9.25.

Rozwiązanie. Rozpoczynamy od określenia przesunięcia poziomego. W tym celu obciążamy ustrój „czujnikiem” $P_c = 1$ N (rys. 9.25b). W etapie drugim robimy jak poprzednio wykresy M_g , ..., t .

Z racji stałych sztywności całkujemy według reguły Wierieszczagina. I tak

$$\int \frac{M_g m ds}{EJ_y} = \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 328 \cdot 10^{-8}} \left[\underbrace{\left(\frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,68}{2} \right)}_{\text{pole}} \underbrace{\left(\frac{2}{3} \cdot 0,375 \right)}_{\text{rzędna}} + \underbrace{\left(\frac{7,5 \cdot 10^3 \cdot 1,68}{2} \right)}_{\text{pole}} \underbrace{\left(\frac{2}{3} \cdot 0,375 \right)}_{\text{rzędna}} + \underbrace{0}_{\text{pręt BD}} \right]$$

skąd mamy wartość $2,88 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,88 \text{ mm}$. Podobnie

$$\int \frac{Nn ds}{EA} = \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 14,2 \cdot 10^{-4}} \left[\underbrace{(11,63 \cdot 10^3 \cdot 1,68)}_{\text{pole}} \underbrace{(-0,448)}_{\text{rzędna}} + \underbrace{(-8,95 \cdot 10^3 \cdot 1,68)}_{\text{pole}} \underbrace{(-0,448)}_{\text{rzędna}} + \underbrace{0}_{\text{pręt BD}} \right],$$

$$\int \frac{\psi Tt ds}{GA} = \frac{2,0}{7,7 \cdot 10^{10} \cdot 14,2 \cdot 10^{-4}} \left[\underbrace{(900 \cdot 1,68)}_{\text{pole}} \underbrace{(0,224)}_{\text{rzędna}} + \underbrace{(-4460 \cdot 1,08)}_{\text{pole}} \underbrace{(-0,224)}_{\text{rzędna}} + \underbrace{0}_{\text{pręt BD}} \right],$$

skąd odpowiednio mamy $-0,01 \text{ mm}$ i $0,04 \text{ mm}$. Poziome przesunięcie jest $2,88 - 0,01 + 0,04 = 2,91 \text{ mm} > 0$, a więc zgodne jest z siłą P_c .

Przy określaniu pionowego przesunięcia punktu D obciążamy ten punkt pionową siłą P_c (I etap). Wykresy M_g, N i T zostają te same, wykresy m, n i t mają postać jak M_g, \dots , a rzędne zmniejszone w stosunku $P_c/P = 1/6 \cdot 10^3$. Wykorzystując to oraz biorąc dane z tabl. 9.1 mamy

$$\int \frac{M_g m ds}{EJ_y} = \frac{1}{656 \cdot 10^3} \left(\frac{1}{3} 1500 \cdot 0,25 \cdot 1,68 + \frac{1}{3} 7500 \cdot 1,25 \cdot 1,68 + \frac{1}{3} 6000 \cdot 1 \cdot 1 \right) = 11,37 \text{ mm}$$

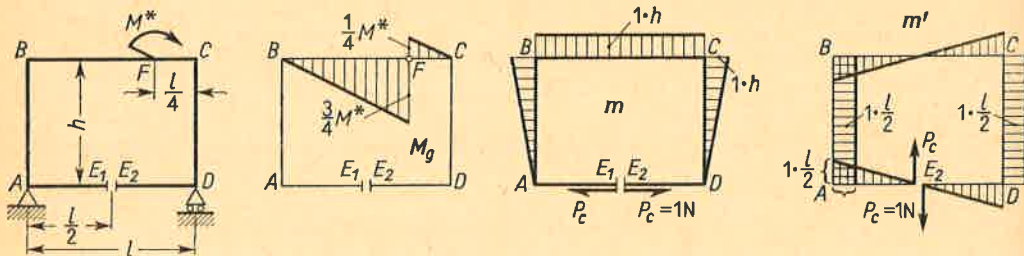
i podobnie dwa pozostałe składniki $0,21$ i $0,11 \text{ mm}$. Pionowe przesunięcie $11,37 + 0,21 + 0,11 = 11,69 \text{ mm} > 0$ ma kierunek do dołu. Całkowite przesunięcie punktu D jest sumą geometryczną obydwóch przesunięć składowych i wynosi

$$f_D = \sqrt{(11,69)^2 + (2,91)^2} = 12,08 \text{ mm}.$$

Z obydwóch zadań wynika, że w porównaniu z momentami gnącymi wpływ sił tnących i wzdłużnych na przesunięcia jest pomijalny, a więc

przesunięcia w ustroju z prętów smukłych przy jednoczesnym ich zginaniu, ścinaniu i rozciąganiu są z techniczną dokładnością równe pierwszemu tylko składnikowi wzoru (9.2), czyli

$$f \approx \int \frac{M_g m ds}{EJ_y} \quad (9.4)$$



Rys. 9.26. Określenie przesunięć względnych

3. Określić z techniczną dokładnością pionowe i poziome rozsuniecie się przekrojów E_1, E_2 ramy (rys. 9.26). $EJ_y = \text{const}$.

Rozwiązanie. Poziome przesunięcie przekroju E_2 „mierzy” przyłożona w nim pozioma siła $P_c = 1 \text{ N}$ skierowana na prawo. Przyłożona w przekroju E_1 siła $P_c = 1 \text{ N}$ „mierzy” przesunięcie jego

na lewo. Rozsuniecie się poziome E_1 i E_2 jest sumą tych składników, a więc „czujnikiem” jest jednocześnie obciążenie przekrojów dwiema przeciwnymi siłami P_c .

W etapie drugim robimy wykresy M_g i m , jak podają rysunki, a następnie (etap III) obliczamy z wzoru (9.4) i (9.3)

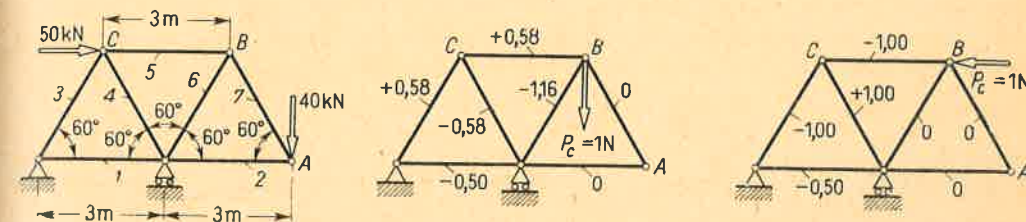
$$f_{\text{poz}} = \underbrace{\left(\frac{1}{2} \frac{3M^*}{4} \frac{3l}{4} \right)}_{\text{pole } F_M \text{ w pręcie } BC} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \frac{M^*}{4} \frac{l}{4} \right)}_{\text{rzędna } y_c} (-h) \frac{1}{EJ_y} = - \frac{M^* l h}{4EJ_y}$$

Ujemna wartość wyniku oznacza, że praca sił P_c jest ujemna, a więc przekroje E_1 i E_2 nie rozsuwają się, lecz schodzą się.

Rozumując podobnie określimy pionowe rozsuniecie się E_1 i E_2 , gdy „czujnikiem” jest układ dwu sił pionowych $P_c = 1 \text{ N}$. Po zrobieniu wykresu m' i wykorzystaniu tabl. 9.1 otrzymujemy

$$f_{\text{pion}} = \frac{1}{EJ_y} \left[\underbrace{\left(\frac{1}{6} \frac{3}{4} M^* \left(\frac{l}{2} - 2 \frac{l}{4} \right) \frac{3l}{4} \right)}_{\text{odcinek } BF} + \underbrace{\left(\frac{1}{6} \frac{M^*}{4} \left(2 \frac{l}{4} + \frac{l}{2} \right) \frac{l}{4} \right)}_{\text{odcinek } FC} \right] = \frac{M^* l^2}{96EJ_y}$$

Wynik $f_{\text{pion}} > 0$ oznacza przesunięcie E_1 względem E_2 do góry.



Rys. 9.27. Do zadania 4; $A_4 = 20 \text{ cm}^2$, dla reszty prętów $A = 10 \text{ cm}^2$

4. Obliczyć wypadkowe przemieszczenie węzła B stalowej kratownicy obciążonej siłami 50 kN i 40 kN (rys. 9.27). $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie. W kratownicy pręty są tylko rozciągane lub ściskane, wobec czego z wzoru (9.2) zostaje tylko ostatni składnik. Ponadto w pręcie i -tym $N_i = \text{const}$, $n_i = \text{const}$ oraz $A_i = \text{const}$ i wtedy

$$\int N_i n_i ds / EA_i = N_i n_i l_i / EA_i,$$

gdzie l_i — długość i -tego pręta. Wartość wyrażenia (9.2) jest sumą takich składników dla wszystkich k prętów kratownicy, skąd

$$f = \sum_1^k \frac{N_i n_i l_i}{EA_i} \quad (9.5)$$

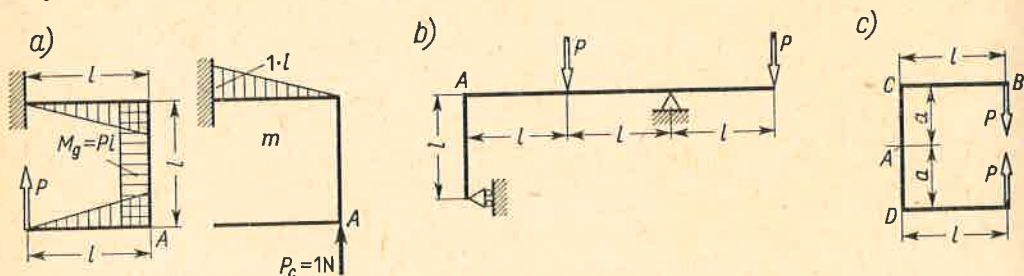
Całość obliczeń ujmujemy w poniższej tabelcy. Pierwsze trzy kolumny to numeracja i dane geometryczne prętów. Kolumny 4 i 5 podają siły N_i odpowiadające rzeczywistemu obciążeniu i wywołane tym wydłużenia $\Delta l_i = N_i l_i / EA_i$. Kolumna 6 to siły n_i (N/N) dla „czujnika”, tj. pionowej siły $P_c = 1 \text{ N}$ przyłożonej w węzle B . Wreszcie w kolumnie 7 mamy iloczyny $n_i \Delta l_i$, których suma to szukane pionowe przesunięcie węzła B . Dodatnia wartość świadczy, że przesunięcie to zachodzi do dołu.

Obciążając podobnie węzeł B poziomą siłą $P_c = 1 \text{ N}$ obliczamy odpowiednie n'_i oraz $n'_i \Delta l_i$ i w wyniku (suma kolumny 9) mamy poziome przesunięcie węzła B zachodzące na prawo. Wypadkowe przemieszczenie jest geometryczną sumą składowych i wynosi

$$f_B = \sqrt{(2,43)^2 + (-2,87)^2} = 3,76 \text{ mm}.$$

Pręt nr	l_i m	A_i cm ²	N_i kN	$\frac{N_i l_i}{EA_i}$ mm	n'_i N/N	$n'_i \Delta l_i$ mm	n''_i N/N	$n''_i \Delta l_i$ mm	
1	3,0	10	+1,9	+0,03	-0,50	-0,02	-0,50	-0,02	
2	3,0	10	-23,1	-0,35	0	0	0	0	
3	3,0	10	+96,2	+1,44	+0,58	0,83	-1,00	-1,44	
4	3,0	20	-96,2	-0,72	-0,58	0,42	1,00	-0,72	
5	3,0	10	+46,2	+0,69	+0,58	0,40	-1,00	-0,69	
6	3,0	10	-46,2	-0,69	-1,16	0,80	0	0	
7	3,0	10	+46,2	+0,69	0	0	0	0	
					$\sum n'_i \Delta l_i = 2,43$ mm	$\sum n''_i \Delta l_i = -2,87$ mm			

5. Jak zmieni się wynik zadania 4, gdy obciążenie zwiększymy m razy, a pola przekrojów zwiększymy n razy?
 Odp. Zmieni się w stosunku (m/n) razy.
6. Nie obliczając szczegółowo określić jak (do góry, na lewo itp.) przesuną się punkty A podanych ustrojów (rys. 9.28)?



Rys. 9.28.

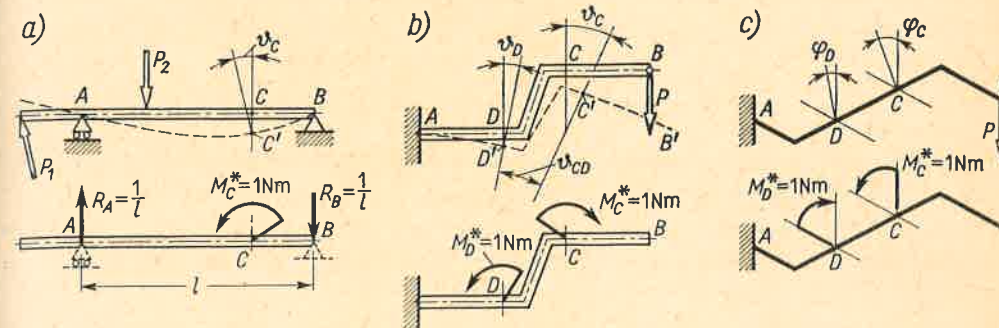
- Odp. a. Do dołu, gdyż M_g i m mają przeciwne znaki i przesunięcie f odpowiadające pionowej sile P_c jest ujemne; podobnie obciążając punkt A poziomą $P_c = 1$ N skierowaną na lewo mamy wszędzie jednakowe znaki M_g i m , a więc punkt A przesunie się na lewo.
- b. Do góry, poziomo nie przesunie się.
- c. Pytanie jest bez sensu, dopóki nie unieruchomi się ustroju jako ciała sztywnego. Zależnie od unieruchomienia punkt A ma różne przemieszczenia. Gdy utwierdzić przekrój B , punkt A przesunie się do dołu i na prawo (patrz rys. 9.28a), gdy w narożu C jest podpora przegubowa nieprzesuwna, a w D przegubowa dająca swobodę pionowego przesuwu, wówczas przesunięcie A jest na lewo bez składowej pionowej (o ile pominąć wpływ sił N) itd.

9.4. Wyznaczanie przemieszczeń (c.d.): uogólnienie wyników

Metodą Maxwella–Mohra (w skrócie M–M) można wyznaczać nie tylko przesunięcia punktów ustroju, lecz i inne wielkości, jak kąt obrotu przekroju względem podłoża, względne przemieszczenie kątowe lub liniowe dwóch różnych przekrojów itp. Warunkiem

tego uogólnienia jest wprowadzenie zamiast siły P_c innych jednostkowych obciążeń. Pamiętając, że metoda M–M opiera się na zasadzie prac przygotowanych, jako kryterium doboru tych nowych obciążeń przyjmujemy też pojęcie pracy. I tak, jeśli α oznacza szukane przemieszczenie, to odpowiadający jemu jednostkowy układ obciążenia $I_1 = 1$ jest ten, którego praca przygotowana na tym przemieszczeniu jest

$$L_1 = I_1 \alpha = 1 \cdot \alpha \quad \text{Nm} \quad (9.6)$$



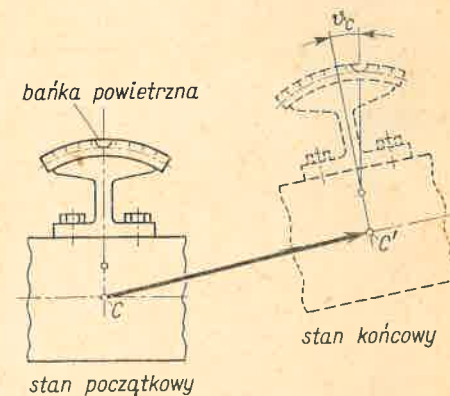
Rys. 9.29. Przykłady określenia jednostkowych uogólnionych sił odpowiadających zadanym uogólnionym współrzędnym

Ponieważ w tej definicji α może oznaczać różne rodzaje wielkości (kąt obrotu, przesunięcie itp.), nazywamy α uogólnionym przemieszczeniem lub uogólnioną współrzędną. Obciążenie I związane z α zależnością (9.6) jest uogólnioną siłą współrzędnej α . Wartość $I_1 = 1$ nazywamy jednostkową uogólnioną siłą współrzędnej α .

Dla przykładu: uogólnioną siłą odpowiadającą kątowi ϑ_C (rys. 9.29a), tj. obrotu przekroju C względem podłoża, jest obciążenie złożone z momentu $M_C^* = 1$ Nm i reakcji $R_A = R_B = 1/l$, gdyż jego praca $L = M_C^* \vartheta_C = 1 \cdot \vartheta_C$ spełnia kryterium (9.6). Podobnie kątowi ϑ_{CD} względnemu obrotu przekrojów C i D (rys. 9.29b) odpowiada uogólniona siła w postaci dwóch przeciwnych momentów $M_C^* = M_D^* = 1$ Nm przyłożonych w tych przekrojach. Zauważając bowiem, że $\vartheta_{CD} = \vartheta_C - \vartheta_D$, mamy spełnienie warunku (9.6)

$$L = M_C^* \vartheta_C - M_D^* \vartheta_D = 1 \cdot (\vartheta_C - \vartheta_D) = 1 \cdot \vartheta_{CD}.$$

W zastosowaniu do badania przemieszczeń pojęcie uogólnionej siły można przyrównać do czujnika reagującego tylko na dany rodzaj przemieszczenia. Dla przykładu: w poziomnicy (rys. 9.30) bańka powietrza reaguje tylko na obrót o kąt ϑ_C , a nie reaguje zupełnie na przesunięcie CC' . Nie wpływa to jednak na postępowanie, które zostaje jak podano w art. 9.3. I tak, chcąc znaleźć kąt obrotu naroża C w ustroju (rys. 9.20a) obciążamy to



Rys. 9.30. Analogia mechaniczna do jednostkowego obciążenia momentem w punkcie C

naroże jednostkowym momentem $M_C^* = 1 \text{ N m}$. Odpowiadające temu wielkości m, t, n są oczywiście inne, niż gdy „czujnikiem” była siła P_c (rys. 9.20b). Dalsze jednak etapy, jak badanie wpływu deformacji jednego elementu EF , obliczenie pracy (wzór a z art. 9.3), zostają bez zmiany, z tym że praca jednostkowego obciążenia jest teraz

$$M_C^* d\vartheta_C = 1 d\vartheta_C, \tag{a}$$

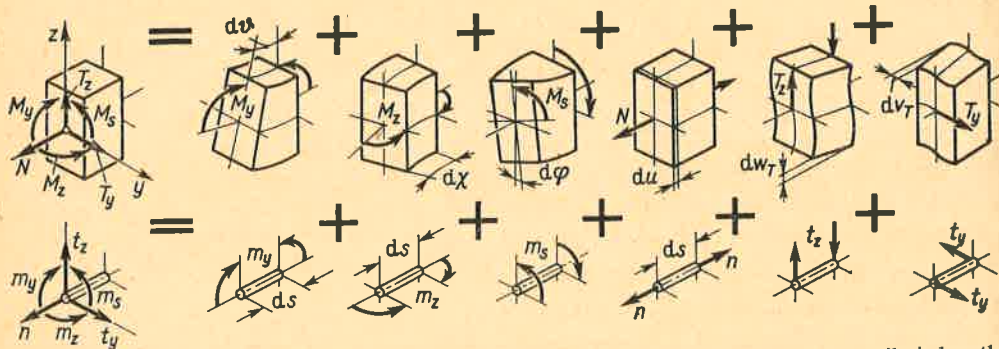
gdzie $d\vartheta_C$ — kąt obrotu naroża C odpowiadający deformacji elementu EF . Po dalszych przekształceniach otrzymujemy wynik

$$\vartheta_C = \int \frac{M_y m ds}{EJ_y} + \int \frac{\psi T t ds}{GA} + \int \frac{N n ds}{EA}, \tag{b}$$

będący kopią wzoru (9.2), z tym że wielkości $m \text{ N m/N m}$, $t \text{ N/N m}$, $n \text{ N/N m}$ odniesione są teraz do innej jednostki uogólnionego obciążenia, tj. $M_C^* = 1 \text{ N m}$. Tę samą zgodność otrzymamy i dla innych sił uogólnionych, z tym że lewa strona wzoru (9.2) jest odpowiednią dla danej siły uogólnioną współrzędną, a wielkości m, t, n w prawej stronie wzoru mają każdorazowo miana

$$m \left(\frac{\text{Nm}}{\text{miano siły uogólnionej}} \right), \quad t \left(\frac{\text{N}}{\text{miano siły uogólnionej}} \right), \quad n \left(\frac{\text{N}}{\text{miano siły uogólnionej}} \right).$$

W świetle tych uogólnień podstawową zależność (9.1) i wynikający z niej wzór (9.2) ujmujemy, jak następuje: *szukana uogólniona współrzędna jest równa liczbowo pracy składowych wysiłku wywołanych uogólnioną dla tej współrzędnej siłą jednostkową na odkształceniach wywołanych rzeczywistym obciążeniem.*



Rys. 9.31. Określenie pracy poszczególnych składowych wysiłku wywołanych uogólnioną siłą jednostkową, na przemieszczeniach wywołanych obciążeniem rzeczywistym

Wykorzystując tę regułę rozszerzymy metodę M–M na ustroje przestrzenne. Jeśli bowiem w elemencie takiego ustroju (rys. 9.31) rzeczywiste obciążenie wywołuje odkształcenia $d\vartheta, d\chi, d\varphi, du, dw_T, dv_T$, a odpowiednia jednostkowa uogólniona siła daje składowe wysiłki m_y, m_z, m_s, n, t_z i t_y , to elementarna praca obliczona według powyższej reguły jest

$$m_y d\vartheta + m_z d\chi + m_s d\varphi + n du + t_z dw_T + t_y dv_T,$$

a szukane przemieszczenie f jest sumą tych prac, czyli

$$f = \int (m_y d\vartheta + m_z d\chi + m_s d\varphi + n du + t_z dw_T + t_y dv_T). \tag{9.7}$$

Dla ustroju sprężystego odkształcenia $d\vartheta, \dots, dv_T$ są związane ze składowymi M_y, \dots, T_y wysiłku wywołanego rzeczywistym obciążeniem następującymi znanymi już zależnościami:

$$d\vartheta = \frac{M_y ds}{EJ_y}, \quad d\chi = \frac{M_z ds}{EJ_z}, \quad d\varphi = \frac{M_s ds}{C},$$

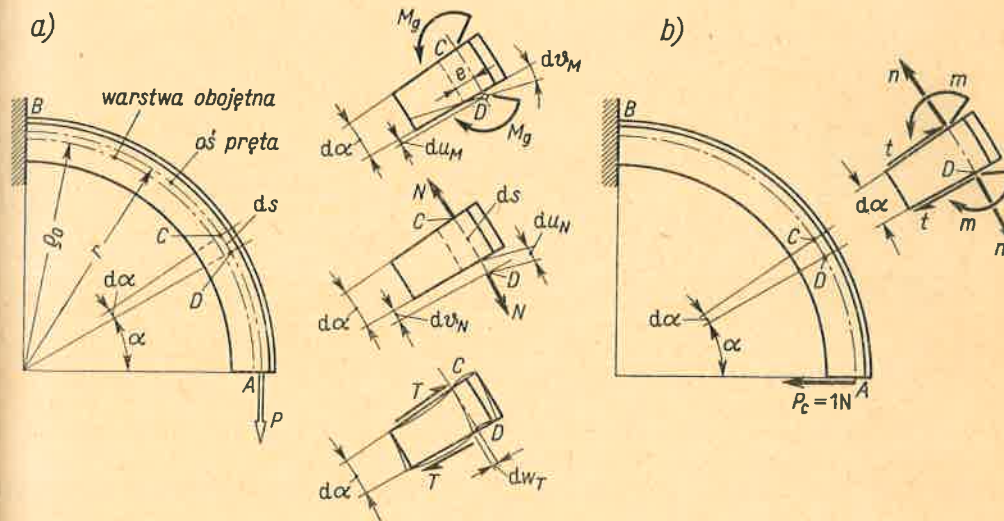
$$du = \frac{N ds}{EA}, \quad dw_T = \frac{\psi_z T_z ds}{GA}, \quad dv_T = \frac{\psi_y T_y ds}{GA},$$

gdzie J_y, J_z — główne centralne momenty bezwładności przekroju, C — sztywność na skręcanie, A — pole przekroju. Po podstawieniu tych zależności do (9.7) mamy

$$f = \int \left(\frac{M_y m_y}{EJ_y} + \frac{M_z m_z}{EJ_z} + \frac{M_s m_s}{C} + \frac{N n}{EA} + \frac{\psi_z T_z t_z}{GA} + \frac{\psi_y T_y t_y}{GA} \right) ds \tag{9.8}$$

jako uogólnienie wzoru (9.2). Z licznych rachunków okazuje się, że podobnie jak w ustrojach płaskich, trzy ostatnie składniki wzoru (9.9) są pomijalne w porównaniu z trzema pierwszymi i dlatego w większości zagadnień przyjmujemy przybliżenie

$$f \approx \int \left(\frac{M_y m_y}{EJ_y} + \frac{M_z m_z}{EJ_z} + \frac{M_s m_s}{C} \right) ds, \tag{9.9}$$



Rys. 9.32. Wyznaczenie przemieszczeń w pręcie silnie zakrzywionym

pod warunkiem, że te momenty nie są tożsamościowo równe zero. Jeśli, jak w kratownicach, jedynymi składowymi wysiłku są siły N , to człon Nn/EA nie wolno zaniedbać, gdyż oznaczałoby to fizyczny nonsens, tj. nieodkształcalność ustroju.

Te same wzory (9.8) bądź (9.9) stosujemy dla prętów słabo zakrzywionych, w których rozkład naprężeń z techniczną dokładnością jest jak w prętach prostych (patrz art. 6.6).

Dla prętów silnie zakrzywionych (rys. 9.32a) przy określeniu odkształceń elementu CD należy uwzględnić, że warstwa obojętna jest przesunięta o odcinek e do środka krzywizny. Siły N wywołują tu nie tylko wydłużenie $du_N = N ds/EA$, lecz i obrót przekrojów C i D o kąt $d\theta_N = du_N/r$, gdyż naprężenia $\sigma = N/A$ powodują różne wydłużenia włókien z racji ich różnej długości. Podobnie moment M_g wywołuje obrót przekrojów C i D o kąt⁽¹⁾

$$d\theta_M = (ds/r) [(e_0/e'_0) - 1]$$

oraz wydłużenie $du_M = e d\theta_M$. Ponieważ z art. 6.6 wiemy, że $(e_0/e'_0) - 1 = M_g/EAe$, w wyniku całkowite odkształcenia du i $d\theta$ są

$$du = du_N + du_M = \frac{N ds}{EA} + \frac{M_g ds}{EAe}, \quad d\theta = d\theta_M + d\theta_N = \frac{M_g ds}{EAer} + \frac{N ds}{EAer} \quad (c)$$

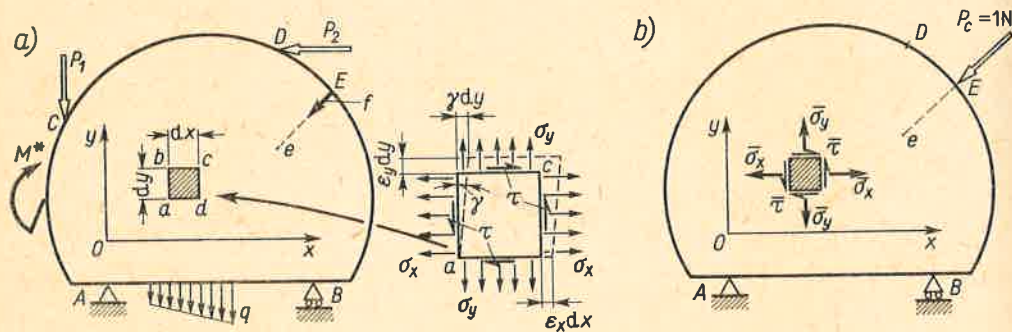
Na koniec, z uwagi na małą jego wartość, przyjmujemy przesunięcie $dw_T = \psi T ds/GA$, jak dla prętów prostych.

Dalsze etapy postępowania są podobne do już opisanych. I tak, dla wyznaczenia poziomego przesunięcia punktu A obciążamy go „czujnikiem” $P_c = 1$ N (rys. 9.32b), określamy wielkości m , n , t i obliczamy ich pracę na odkształceniach $d\theta$, du , dw_T otrzymując poszukiwane przesunięcie f jako

$$f = \int \frac{(M_g + Ne) m ds}{EAe} + \int \left(N + \frac{M_g}{r} \right) \frac{n ds}{EA} + \int \frac{\psi T t}{GA} ds, \quad (9.10)$$

gdzie całkowanie obejmuje całą długość pręta.

Jako ostatni przykład zastosowania metody M-M rozpatrzmy tarczę sprężystą o grubości δ (rys. 9.33a), w której dane obciążenie P_1, P_2, \dots, M^* wywołuje naprężenia σ_x, σ_y i τ . Chcąc znaleźć towarzyszące temu obciążeniu przesunięcie punktu E w kierunku Ee wykonamy czynność pomocniczą polegającą na przyłożeniu „czujnika” $P_c = 1$ N (rys. 9.33b), w wyniku czego powstają w tarczy naprężenia⁽²⁾



Rys. 9.33. Zastosowanie zasady prac przygotowanych dla ustroju dwuwymiarowego

$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$ i $\bar{\tau}$. Przyjmijmy przy tym, że wszystkie te naprężenia, tj. $\sigma_x, \dots, \bar{\tau}$, będące na ogół funkcjami x i y , są znane, a więc znane są też odkształcenia

$$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E, \quad \epsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E, \quad \gamma = \tau/G \quad (d)$$

każdej elementarnej kostki (art. 7.5). Obliczmy teraz pracę elementarnych sił $\bar{\sigma}_x dy \delta$, $\bar{\sigma}_y dx \delta$ i $\bar{\tau} dx \delta$ oraz $\bar{\tau} dy \delta$ wywołanych „czujnikiem” P_c na odpowiednich przesunięciach $\epsilon_x dx$, $\epsilon_y dy$ i γdy odpowiadających rzeczywistemu obciążeniu. Widać od razu, że praca sił $\bar{\sigma}_x dy \delta$ jest

$$\bar{\sigma}_x dy \delta \cdot \epsilon_x dx = \bar{\sigma}_x \epsilon_x \delta dx dy$$

(1) Symbole e_0 i e'_0 oznaczają promienie krzywizny warstwy obojętnej przed i po odkształceniu (rys. 6.28).

(2) Ich miana odniesione do jednostki P_c są N/m^2 $N = 1/m^2$.

i podobnie praca sił $\bar{\sigma}_y \delta dx$ jest $\bar{\sigma}_y \epsilon_y \delta dx dy$. Z czterech sił stycznych pracę $\bar{\tau} \gamma \delta dx dy$ wykonuje tylko siła $\bar{\tau} dx \delta$ działająca na przesunięciu γdy boku bc , gdyż bok ad przyjęto nieruchomy, a przesunięcia pozostałych są prostopadłe do odpowiednich sił stycznych. W wyniku mamy całkowitą elementarną pracę

$$dL = (\bar{\sigma}_x \epsilon_x + \bar{\sigma}_y \epsilon_y + \bar{\tau} \gamma) \delta dx dy. \quad (e)$$

Sumując prace dL dla wszystkich kostek składających się na tarczę i uwzględniając przy tym zależność (d) otrzymamy, zgodnie z ogólną regułą, szukane przesunięcie f jako

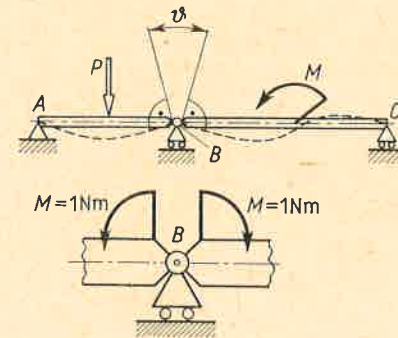
$$f = \iint_F \left[\frac{1}{E} (\sigma_x \bar{\sigma}_x - \nu \sigma_x \bar{\sigma}_y - \nu \bar{\sigma}_x \sigma_y + \sigma_y \bar{\sigma}_y) + \frac{\bar{\tau} \tau}{G} \right] \delta dx dy, \quad (9.11)$$

gdzie całkowanie obejmuje całe pole F tarczy.

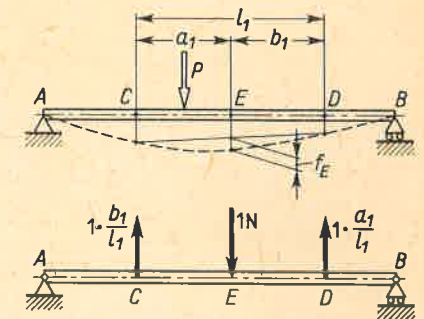
Zadania

1. Określić uogólnioną siłę I_1 „mierzącą” kąt θ względnego obrotu belek AB i BC połączonych przegubem na podporze B (rys. 9.34).

Odp. Dwa przeciwne momenty $M = 1$ N m, z których jeden obciąża belkę AB , drugi belkę BC .



Rys. 9.34.



Rys. 9.35.

2. W belce AB (rys. 9.35) chcemy znaleźć pionowe przesunięcie f_E punktu E względem prostej przechodzącej przez punkty C i D . Jaka jest uogólniona siła I_1 dla tego przesunięcia?

Odp. Oznaczmy f_C^*, f_D^*, f_E^* pionowe przesunięcia punktów C, D i E w nieruchomym układzie odniesienia. Z rysunku

$$f_E = f_E^* - (f_C^* b_1/l_1) - (f_D^* a_1/l_1)$$

i po wstawieniu do (9.6) otrzymujemy

$$I_1 \alpha = 1 \cdot f_E = 1 \cdot f_E^* - (1 \cdot b_1/l_1) f_C^* - (1 \cdot a_1/l_1) f_D^*.$$

Tak więc szukana uogólniona siła składa się z trzech sił: jednostkowej w E skierowanej do dołu (praca dodatnia) i sił $(1 \cdot b_1/l_1)$, $(1 \cdot a_1/l_1)$ przyłożonych odpowiednio w C i D skierowanych do góry (praca ujemna). Widać, że te siły są w równowadze.

3. Obliczyć kąt względnego obrotu przekrojów A i B w belce (rys. 9.24).

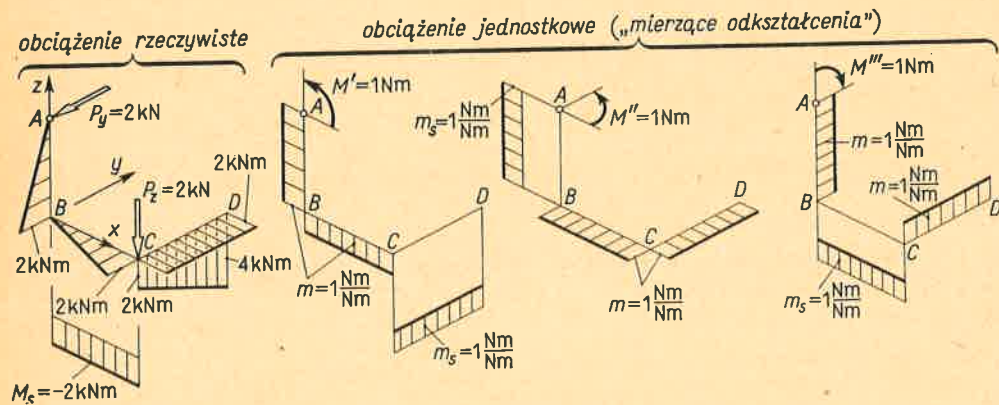
Odp. Uogólniona siła jak na rys. 9.29b; $\theta_{AB} = Pl^2/8EJ$.

4. Wyznaczyć kąt obrotu w płaszczyznach xy, yz i zx przekroju A konstrukcji (rys. 9.16), jeśli $P_x = 0, P_y = P_z = -2$ kN, $a = b = c = 1$ m, a pręty wykonane z rury ($D_z = 10$ cm, $D_w = 9$ cm, $E = 2,56 G = 2 \cdot 10^5$ MPa).

Rozwiązanie. Wykorzystując wyniki z rys. 9.16 ustalamy najpierw przebieg momentów gnących i skręcających dla obciążenia rzeczywistego (rys. 9.36), przy czym rzędne M_θ odkładamy w płaszczyznach ich działania po stronie włókien ściskanych, a znak M_s ustalamy jak na rys. 3.5. Ponadto obliczamy sztywności

$$EJ_y = EJ_z = \pi (D_z^4 - D_w^4) E / 64 = 3,48 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2, \quad C = GJ_0 = 2,64 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2,$$

jednakowe dla wszystkich prętów.



Rys. 9.36. Przykład określenia kątów obrotu przekroju A w konstrukcji z rys. 9.16

„Czujnikami” mierzącymi szukane kąty są jednostkowe momenty M', M'', M''' , którymi kolejno obciążamy przekrój A i dla których oddzielnie określamy przebieg momentów gnących i skręcających, jak podaje rysunek. Stosując teraz wzór (9.9) i uwzględniając, że sztywności są stałe, widzimy, że obliczenie sprowadza się do określenia całek z iloczynów rzędnych odpowiadających sobie wykresów. Wynika stąd bez żadnych rachunków, że

$$(\theta_A)_{xz} = 0,$$

gdyż w żadnym z prętów odpowiadające sobie wykresy M_θ i m bądź M_s i m_s nie są jednocześnie różne od zera. Dla przykładu, w pręcie BC M_θ działa w płaszczyźnie xy, a wywołany przez $M' = 1 \text{ Nm}$ moment m jest w płaszczyźnie xz i odpowiednie składniki wzoru (9.9) są równe zero. Podobnie mamy tu $M_s \neq 0$, ale $m_s = 0$.

Przy określeniu pozostałych kątów stosujemy skrócony sposób całkowania według wzoru (9.3).

I tak

$$(\theta_A)_{xy} = \left[\underbrace{\left(\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1}{2} \right)}_{\text{pręt BC}} \cdot \underbrace{1}_{\text{pręt CD}} + \underbrace{2 \cdot 10^3 \cdot 1}_{\text{pręt BC}} \right] \frac{1}{3,48 \cdot 10^5} = 0,86 \cdot 10^{-2} \text{ rad},$$

$$(\theta_A)_{yz} = \underbrace{\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1}{2} (-1)}_{\text{pręt AB}} \frac{1}{3,48 \cdot 10^5} + \underbrace{(-2 \cdot 10^3 \cdot 1) \cdot 1}_{\text{pręt BC}} \frac{1}{2,64 \cdot 10^5} + \underbrace{\left(\frac{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3}{2} \cdot 1 \right) (-1)}_{\text{pręt CD}} \frac{1}{3,48 \cdot 10^5},$$

skąd $(\theta_A)_{yz} = -1,91 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. Dodatnia wartość $(\theta_A)_{xy}$ świadczy, że obrót w tej płaszczyźnie jest zgodny ze zwrotem M''' , natomiast kąt $(\theta_A)_{yz}$ jest ujemny, a więc ma zwrot przeciwny niż M''' .

5. W rozwiązaniu zadania 4 zastosowano uproszczony wzór (9.9). Czy zastosowanie pełnego wzoru (9.5) zmieni wynik?

Odp. Nie, albowiem przy działaniu M', M'' i M''' siły $n \equiv 0$ i $t \equiv 0$.

6. Wyznaczyć poziome i pionowe przesunięcia przekroju A pręta (rys. 9.32a) przyjmując, że jest on słabo zakrzywiony.

Odp. Dla rzeczywistego obciążenia siłą P w przekroju D mamy

$$M_\theta = Pr (1 - \cos \alpha), \quad N = P \cos \alpha, \quad T = P \sin \alpha,$$

a przy obciążeniu siłą $P_c = 1 \text{ N}$, jak na rys. 9.32b,

$$m = r \sin \alpha \text{ Nm/N}, \quad n = -\sin \alpha \text{ N/N}, \quad t = \cos \alpha \text{ N/N}.$$

Ponieważ pręt jest słabo zakrzywiony, stosujemy wzór (9.9), z którego zostaje tylko pierwszy składnik, przy czym $ds = r d\alpha$ i

$$f_{\text{poziome}} \approx \int_0^{\pi/2} \frac{M_\theta m r d\alpha}{EJ_y} = \frac{Pr^3}{EJ_y} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha = \frac{Pr^3}{2EJ_y}.$$

Przykładając pionową siłę $P_c = 1 \text{ N}$ o zwrocie jak siła P mamy

$$m = r (1 - \cos \alpha) \text{ Nm/N}, \quad n = \cos \alpha \text{ N/N}, \quad t = \sin \alpha \text{ N/N},$$

i z wzoru (9.9) poszukiwane pionowe przesunięcie

$$f_{\text{pionowe}} \approx \int_0^{\pi/2} \frac{Pr^2 (1 - \cos \alpha)^2 r d\alpha}{EJ_y} = \frac{Pr^3}{EJ_y} \frac{3\pi - 8}{4} \approx 0,356 \frac{Pr^3}{EJ_y}.$$

Tak więc przekrój A przesuwa się na lewo i do dołu.

7. Wyznaczyć kąt obrotu θ_A przekroju A pręta (rys. 9.32a).

Odp. $\theta_A = (Pr^2 / 2EJ_y) (\pi - 2)$, zwrot współzegarowy.

8. Zbadać wpływ sił wzdłużnych i tnących oraz wpływ krzywizny na wyniki zadania 6, jeśli $r = 50 \text{ cm}$, $J_y = 179 \text{ cm}^4$, $A = 21 \text{ cm}^2$, $E/G = 2,6$, $\psi = 1,6$.

Odp. Z wzoru (6.22) $e = J_y / Ar = 0,111 \text{ cm}$ i wzoru (9.10) mamy

$$f_{\text{poziome}} = \frac{Pr^3}{2EJ_y} \left[1 + \frac{e}{r} \left(2\psi \frac{E}{G} - 1 \right) \right] = \frac{Pr^3}{2EJ_y} \cdot 1,016,$$

$$f_{\text{pionowe}} = \frac{3\pi - 8}{4} \frac{Pr^3}{EJ_y} \left[1 + \frac{e}{(3\pi - 8)r} \left(8 - \pi + \frac{\pi\psi E}{G} \right) \right] = \frac{3\pi - 8}{4} \frac{Pr^3}{EJ_y} \cdot 1,028.$$

Tak więc wpływy te są $\sim 1,5\%$ i $\sim 3\%$ wartości poprzednich.

9. Obliczyć pionowe przesunięcie punktu A pierścienia (rys. 9.17) przyjmując, że wymiary przekroju są małe w stosunku do r.

Odp. Przebieg M_θ i M_s jest już znany (patrz wzory b i c art. 9.2). Z tychże wzorów dla $P_c = 1 \text{ N}$ przyłożonej w A mamy

$$m = r \sin \alpha \text{ Nm/N}, \quad m_s = -r (1 - \cos \alpha) \text{ Nm/N}$$

i z wzoru (9.9), przy wprowadzeniu $ds = r d\alpha$, otrzymujemy po wykonaniu całkowania w granicach $\alpha (0; 3\pi/2)$

$$f_A = \frac{Pr^3}{4EJ_y} \left[3\pi + \frac{EJ_y}{C} (9\pi + 8) \right] - \frac{qr^4}{8EJ_y} \left[4 + \frac{3EJ_y}{C} (3\pi^2 + 4\pi - 4) \right],$$

gdzie EJ_y – sztywność na zginanie względem głównej osi y leżącej w płaszczyźnie pierścienia, $C =$ sztywność na skręcanie.

10. Dowieść, że w obciążonym przestrzennie ustroju płaskim, jak na rys. 9.14, 9.17, nie ma żadnych drzemiszczeń w jego płaszczyźnie, jeśli w niej leżą główne centralne osie przekrojów wszystkich prętów.

Odp. Przy obciążeniu jednostkowym („czujniku”) leżącym w tej płaszczyźnie mamy: $m_x \neq 0$, $n \neq 0$, $t \neq 0$, ale $m_y \equiv 0$, $m_z \equiv 0$, $t_x \equiv 0$ (rys. 9.31). Przy obciążeniu rzeczywistym jest na odwrót: $M_x \neq 0$, $M_s \neq 0$ i $T_x \neq 0$, zaś $M_z \equiv 0$, $N \equiv 0$, $T_y \equiv 0$, wobec czego we wzorze (9.8) wszystkie iloczyny M, m, \dots są tożsamościowo równe zero i $f \equiv 0$, c.b.d.d.

11. We wzorze (9.2) pierwszy i trzeci składnik otrzymano jako pracę wypadkowej siły n i momentu m na przesunięciach du i db (rys. 9.21). Dowieść, że wynik ten można otrzymać z wzoru (9.11).

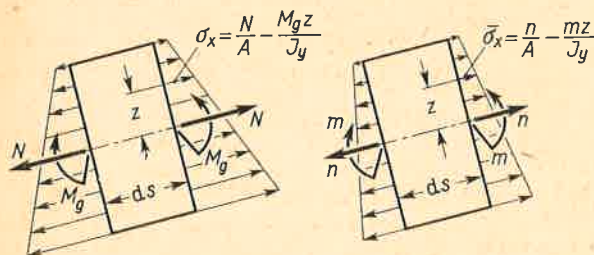
Rozwiązanie. W elemencie pręta (rys. 9.37) pod działaniem M_g i N oraz m i n powstają tylko naprężenia σ_x i $\bar{\sigma}_x$ podane na rysunku i wzór (9.11) przybiera postać

$$df = \frac{ds}{E} \int_A [(-M_g z/J_y) + (N/A)] [(-mz/J_y) + (n/A)] dA,$$

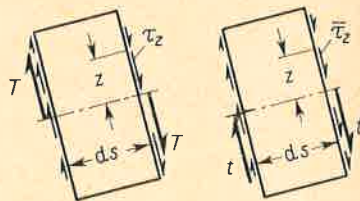
gdzie całkowanie obejmuje całe pole A przekroju pręta. Po wymnożeniu i uwzględnieniu, że $\int_A z^2 dA = J_y$, $\int_A z dA = 0$, otrzymujemy

$$df = (M_g m ds/EJ_y) + (Nn ds/EA),$$

a dla całego pręta sumę tych wyrażeń jak w art. 9.3.



Rys. 9.37. Oznaczenia do zadania 11



Rys. 9.38. Oznaczenia do zadania 12

12. Stosując postępowanie jak w zadaniu 11 obliczyć pracę siły tnącej t na przesunięciu dw_T (rys. 9.21) i określić stąd wartość ψ .

Rozwiązanie. W elemencie pręta (rys. 9.38) działanie sił T i t wywołuje tylko naprężenia styczne określone z wzoru (5.18)

$$\tau_z = TS_y^{(z)}/J_y b_z, \quad \bar{\tau}_z = tS_y^{(z)}/J_y b_z$$

i z wzoru (9.11) otrzymujemy dla elementu pręta

$$df_T = \frac{ds}{G} \int_A \frac{TS_y^{(z)}}{J_y b_z} \frac{tS_y^{(z)}}{J_y b_z} dA = \frac{Tt ds}{GA} \frac{A}{J_y^2} \int_A \left[\frac{S_y^{(z)}}{b_z} \right]^2 dA;$$

konfrontując ten wynik z środkowym członem wzoru (9.2) mamy

$$\psi = \frac{A}{J_y^2} \int_A \left[\frac{S_y^{(z)}}{b_z} \right]^2 dA \tag{9.12}$$

jako wartość bezwymiarowego współczynnika ψ . Dla przekroju na przykład prostokątnego mamy według rys. 5.40

$$A = bh, \quad J_y = bh^3/12, \quad S_y^{(z)} = (b/2) [(h^2/4) - z^2], \quad b_z = b = \text{const}, \quad dA = b dz$$

i granice całkowania $(-h/2; +h/2)$, skąd w wyniku $\psi = 1,2$. Podobnie postępujemy w przypadku innych przekrojów. Wiarygodność tak obliczonych wartości ψ jest rzędu 10% z uwagi na upraszczające założenia leżące u podstaw wzoru (5.18).

13. Pomijając wpływ sił wzdłużnych i tnących orzec, jak zmieniają się przemieszczenia punktów danej ramy obciążonej siłami skupionymi, na przykład z rys. 9.16, jeśli zwiększyć dwukrotnie tylko długości prętów?

Odp. Wzrosną ośmiokrotnie, gdyż w odpowiadających sobie punktach ustrojów rzędne wykresów M_y, \dots, m_x wzrosną dwukrotnie, a zamiast długości ds wystąpi $2 ds$ i wszystkie wyrażenia podcałkowe wzrosną ośmiokrotnie, a granice całkowania nie zmienią się.

14. Jak zmieniają się kąty obrotu odpowiadających sobie przekrojów pierwotnej i powiększonej ramy z zadania 13?

Odp. Wzrosną 4-krotnie, bo m_y, m_z i m_x nie zmieniają się.

15. Czy wynik zadania 13 jest słuszny dla kratownicy?

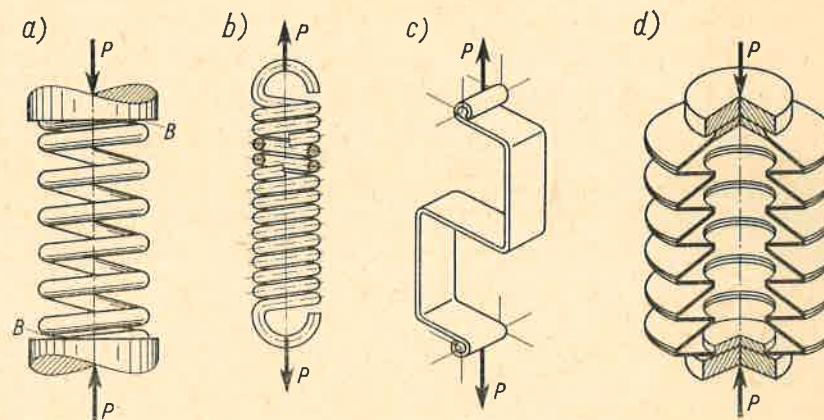
Odp. Nie; patrz zadania 4 i 5 art. 9.3.

16. Zakładając w zadaniu 9, że $P = 0$, mamy f proporcjonalne do r^4 i dwukrotny wzrost r daje 16-krotny wzrost f , a nie 8-krotny jak w zadaniu 13. Skąd się bierze ta różnica?

Odp. Momenty M_y i M_z są tu kwadratowymi funkcjami r , a nie liniowymi, jak to było w zadaniu 13.

9.5. Naprężenia i odkształcenia w sprężynach śrubowych

Ogólnie biorąc sprężyną nazywamy każdy taki element łączący dwie części, który nie doznając sam trwałych odkształceń, zezwala na duże względne przemieszczenia tych części. Aby to osiągnąć, co najmniej jeden z wymiarów sprężyny, np. grubość, musi być mały w porównaniu do innych. Tę ogólną cechę widać wyraźnie na pokazanych przykładach (rys. 9.39).



Rys. 9.39. Przykłady konstrukcji sprężyn
a), b) sprężyny śrubowe; c) sprężyna taśmowa; d) talerzowa.

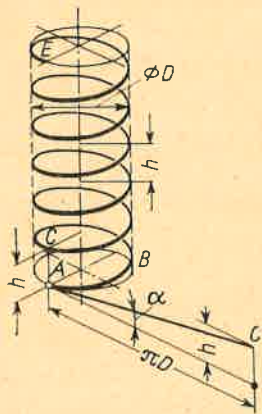
Z wszystkich rodzajów najczęściej stosuje się sprężyny śrubowe. Sprężynę tę traktujemy jako przestrzennie zakrzywiony pręt. Jego oś jest linią śrubową o średnicy D , skoku h (rys. 9.40). Kąt α nachylenia tej linii określony z zależności

$$\text{tg } \alpha = h/\pi D \tag{a}$$

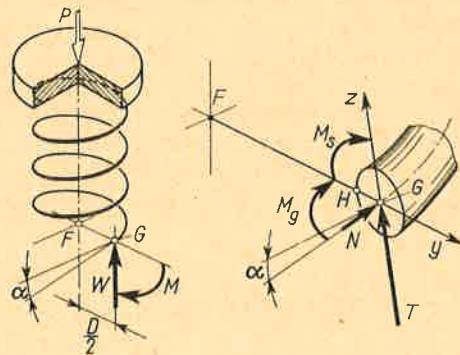
jest z reguły mały ($\alpha < 5^\circ$). Najczęściej sprężyny te wykonujemy z drutu okrągłego. Jego średnica d jest z reguły znacznie mniejsza od średnicy nawinięcia D .

Jeśli sprężyna taka obciążona jest siłami wzdłużnymi P (rys. 9.39a), to badając równowagę jej części (rys. 9.41) widzimy, że wysiłek przekroju składa się z siły $W = P$ równoległej

do osi sprężyny i momentu $M = PD/2$ działającego w płaszczyźnie pary sił W i P . Ta płaszczyzna tworzy kąt α z płaszczyzną przekroju pręta, gdyż przekrój ten jest prostopadły



Rys. 9.40. Geometria sprężyny śrubowej



Rys. 9.41. Określenie wysiłku przekroju w sprężynie śrubowej

do osi drutu. To powoduje, że składowe wysiłku odniesione do układu osi yz w tym przekroju są inne niż znalezione już W i M . Z rozłożenia siły W otrzymujemy

$$N = W \sin \alpha = P \sin \alpha, \quad T = W \cos \alpha = P \cos \alpha, \quad (b)$$

jako siłę wzdłużną i tnącą. Podobnie z rozłożenia M mamy

$$M_s = (PD/2) \cos \alpha, \quad M_g = (PD/2) \sin \alpha, \quad (c)$$

jako moment skracający i gnący. Tak więc mamy tu do czynienia z ogólnym przypadkiem złożonej wytrzymałości pręta. Ponieważ jednak kąt α jest mały, można przyjąć $\sin \alpha \approx 0$, a $\cos \alpha \approx 1$ i wtedy pozostaje jedynie moment skracający

$$M_s \approx PD/2 \quad (d)$$

oraz siłą tnącą $T \approx P$. Ponieważ także $d \ll D$, zatem z techniczną dokładnością możemy obliczyć naprężenia jak w pręcie prostym. I tak moment M_s wywołuje naprężenia τ (rys. 3.11b), których ekstremalna wartość według wzoru (3.14) jest

$$\tau_M \approx \frac{M_s}{W_0} = \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (e)$$

Naprężenia styczne τ_T odpowiadające sile T mają wartość rzędu T/A (art. 5.6) i są znacznie mniejsze od τ_M . Z tego powodu zadowalamy się przybliżeniem:

$$\tau_T \approx \frac{T}{A} = \frac{4P}{\pi d^2} \quad (f)$$

Łatwo spostrzec, że maksymalne naprężenie τ_{\max} wystąpi w punkcie H , przy konturze przekroju, gdyż tam naprężenia τ_M i τ_T mają zgodne kierunki, a jego wartość

$$\tau_{\max} = \tau_M + \tau_T \approx \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right) \quad (9.13)$$

Jak widać, wpływ siły tnącej, tj. składnik $d/2D$, jest większy dla sprężyn krępych. Punkty, jak punkt H na wewnętrznej stronie zwojów, są w gorszych warunkach niż pozostałe punkty konturu. Jest to potwierdzone doświadczalnie, gdyż w tych właśnie miejscach występują pierwsze pęknięcia, o ile drut sprężyny nie ma ukrytych wad, jak wtrącenia niemetaliczne, które w przeciąganym drucie mają postać nitek (włosowin).

Inną przyczyną powodującą, że wewnętrzne włókna drutu mają naprężenia większe niż określone wzorem (9.13), jest zakrzywienie drutu (rys. 9.42). Przy jego skręcaniu, czyli obrocie przekroju ac względem be , przesunięcia punktu a względem b i c punktu względem e są te same, ale kąty γ odkształcenia postaciowego są różne, gdyż odcinek ab jest krótszy niż ce . Wynika stąd, że $\gamma_{ab} > \gamma_{ce}$, a więc $\tau_a > \tau_c$. Rozwiązanie tego zadania daje teoria sprężystości. W wyniku zamiast (9.13) mamy

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(\frac{4\xi - 1}{4\xi - 4} + \frac{0,615}{\xi} \right), \quad (9.14)$$

przy czym $\xi = D/d > 1$. Łatwo sprawdzić, że korygujący czynnik podany w nawiasach jest zawsze większy od jedności.

Miarą odkształcenia sprężyny jest zazwyczaj przesunięcie poosiowe f jej talerzy (rys. 9.39a). Aby je wyznaczyć, przykładamy zamiast sił P dwie jednostkowe siły (czujniki). Odpowiadające im składowe wysiłku są jak na rys. 9.41, tylko że są one P razy mniejsze niż poprzednio, czyli

$$m_g = D \sin \alpha/2, \quad m_s = D \cos \alpha/2, \quad n = \sin \alpha, \quad t = \cos \alpha. \quad (g)$$

Wartości te oraz poprzednie M_g, \dots, T należy wstawić do (9.8). Jak już jednak mówiono, wpływ sił tnących i wzdłużnych jest mały. Również z uwagi na małą wartość kąta α można pominąć wpływ zginania i wtedy z wzoru (9.8) oraz (d) mamy

$$f = \int_l \frac{M_s m_s ds}{C} = \frac{PD^2 l}{4GJ_0}, \quad (h)$$

gdzie $C = GJ_0$ — sztywność drutu na skręcanie, a l — jego długość. Dla sprężyny mającej n czynnych zwojów⁽¹⁾

$$l = \pi D n / \cos \alpha \approx \pi D n, \quad (i)$$

wobec czego wyrażenie (h), przy $GJ_0 = \pi G d^4 / 32$, ma postać

$$f = \frac{8PD^3 n}{Gd^4}. \quad (9.15)$$

Dodatnia wartość f oznacza dla sprężyny ściskającej jej skrócenie, a dla rozciąganej — jej wydłużenie. Widać, że odkształcenie f jest proporcjonalne do siły P (rys. 9.43), czyli

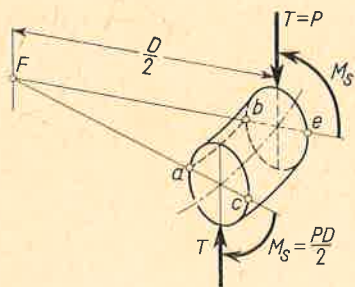
$$f = P/K, \quad (j)$$

gdzie $K = Gd^4 / 8nD^3$ — tzw. stała sprężyny. Wykres $P(f)$ nazywamy charakterystyką sprężyny. Pole OAB obrazuje na tym wykresie pracę L wykonaną przy stopniowym

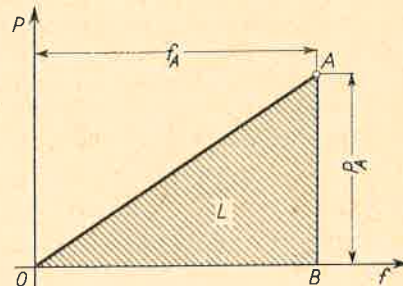
⁽¹⁾ Jako czynne zwoje uważamy te, których odkształcenia nie są skrępowane przez talerze lub uchwyty. Dla sprężyn rozciąganych (rys. 9.39b) czynne są wszystkie zwoje prócz zagiętych końców, których odkształcenie pomijamy. W sprężynach ściskanych jako n bierzemy liczbę zwojów między punktami B (rys. 9.39a) zmniejszoną o jeden, gdyż na końcach zwoje są podkrępowane i nie mają pełnej swobody odkształcenia.

wzroście siły P od zera do wartości końcowej P_A (art. 2.4 i rys. 2.14). Praca ta zamienia się na energię odkształcenia U sprężyny, a jej wartość jest

$$U = L = \frac{P_A f_A}{2} = \frac{P_A^2}{2K} = \frac{K f_A^2}{2}. \quad (9.16)$$



Rys. 9.42. Dokładniejsza analiza pracy odcinka zwoju



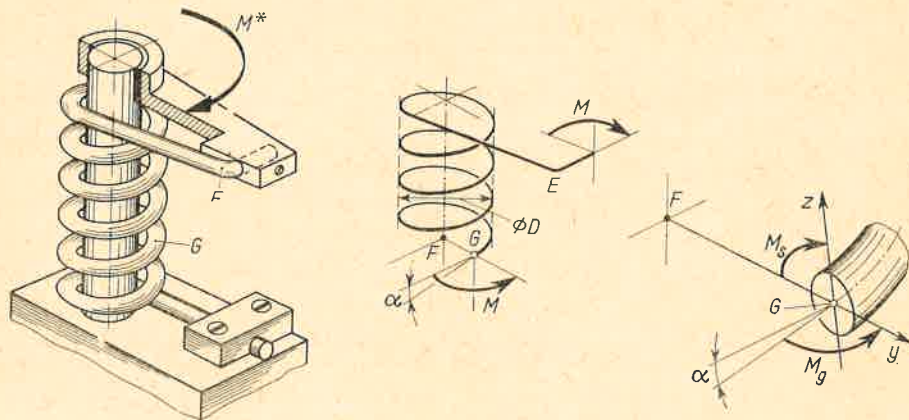
Rys. 9.43. Charakterystyka sprężyny

Jeśli drut sprężyny ma przekrój inny niż kołowy, to analiza zostaje ta sama, z tym tylko, że we wzorach (e) i (h) zamiast W_0 i GJ_0 wstawiamy odpowiednio

$$W_s \quad \text{oraz} \quad C = GJ_s,$$

o których mówiono w art. 3.4 (także tabl. 3.1).

Z kolei rozpatrzmy przypadek obciążenia sprężyny momentem M^* (rys. 9.44). Z równowagi myślowo odciętej górnej części wynika, że wysiłek przekroju G stanowi moment



Rys. 9.44. Analiza „skręcanej” sprężyny śrubowej

$M = M^*$ działający w płaszczyźnie prostopadłej do osi sprężyny, a jego składowe w układzie osi yz są

$$M_g = M^* \cos \alpha, \quad M_s = M^* \sin \alpha.$$

Ponieważ kąt α jest mały, główną składową wysiłku jest

$$M_g \approx M^*,$$

któremu odpowiadają ekstremalne naprężenia normalne

$$\sigma_e = \pm M^*/W_z = \pm 32M/\pi d^3. \quad (k)$$

Przy takim obciążeniu odkształceniem zasadniczym jest kąt φ obrotu dźwigni względem korpusu. Aby go obliczyć, obciążamy dźwignię momentem $M^* = m = 1 \text{ N m}$, który wywołuje w tymże przekroju G momenty:

$$\text{gnący} \quad m_g = \cos \alpha \text{ Nm/Nm} \quad \text{i} \quad \text{skręcający} \quad m_s = \sin \alpha \text{ Nm/Nm},$$

o zwrotach jak M_g i M_s na rys. 9.44. Zakładając jak poprzednio, że $\sin \alpha \approx 0$, otrzymujemy z wzoru (9.8)

$$\varphi \approx \int \frac{M_g m_g ds}{EJ_z} = \frac{M^* l}{EJ_z} \approx \frac{\pi M^* D n}{EJ_z}, \quad (9.17)$$

gdzie $EJ_z = \pi d^4 E/64$ — sztywność drutu na zginanie, $l \approx \pi D n$ — czynna jego długość. Tak jak poprzednio wynik (9.17) piszemy jako

$$\varphi = M^*/K \quad (l)$$

gdzie $K = EJ_z/\pi D n$ — stała sprężyny. Podobnie wprowadzamy pojęcie charakterystyki sprężyny $M^*(\varphi)$ oraz energii

$$U = L = \frac{M^* \varphi}{2} = \frac{M^{*2}}{2K} = \frac{K \varphi^2}{2}. \quad (9.18)$$

Przytoczone przykłady wyraźnie ilustrują różnicę między charakterem obciążenia sprężyny jako całości a pracą drutu. I tak o sprężynach (rys. 9.39a, b) mówimy, że pracują one jako całość na ściskanie lub rozciąganie, natomiast drut w nich pracuje głównie na skręcanie. Podobnie o sprężynie (rys. 9.44) powiemy, że blokuje ona skręcanie (obrót) dźwigni względem korpusu, a potocznie, że „pracuje na skręcanie”, jej drut jednak jest głównie zginany. Istotne przy tym jest podobieństwo wzorów (j) i (l) wyrażających po prostu wzór Hooke’a dla sprężyn, który uogólniamy i na inne przypadki (rys. 9.39a). Logiczną konsekwencją tego jest uogólnienie wyników (9.16) i (9.18) w tym sensie, że energia U zgromadzona w sprężynie równa się połowie iloczynu obciążenia i odpowiedniego przemieszczenia.

Zadania

- Określić współczynnik bezpieczeństwa n_e i odkształcenie sprężyny (rys. 9.39a), jeśli $P = 400 \text{ N}$, $D = 5 \text{ cm}$, $d = 6 \text{ mm}$, $R_e = 10^3 \text{ MPa}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, a liczba zwojów między punktami B jest $6\frac{1}{2}$.
Odp. Z wzoru (9.13) $\tau_{\max} = 250 \text{ MPa}$, z (9.15) dla $n \approx 6\frac{1}{2} - 1 \approx 5,5$ mamy $f \approx 2,1 \text{ cm}$; $\sigma_{\text{red}} = \tau_{\max} \sqrt{3}$ i $n_e = R_e/\sigma_{\text{red}} = 2,3$.
- Rozwiązać poprzednie zadanie, gdy drut ma przekrój kwadratowy o boku $b = 6 \text{ mm}$.
Odp. Z tablicy 3.1 jest $W_s = 0,208b^3$, skąd $\tau_M = PD/2W_s = 221 \text{ MPa}$, zaś $\tau_T \approx P/b^2 = 11 \text{ MPa}$ i $\tau_{\max} = 232 \text{ MPa}$, $n_e = R_e/\tau_{\max} \sqrt{3} \approx 2,5$. Z tejże tablicy $C = GJ_s = 0,141 Gb^4$ i z wzoru (h) $f \approx 1,5 \text{ cm}$.

3. Skorygować wyniki zadania 1 uwzględniając analizę z rys. 9.42.

Odp. $\tau_{\max} = 277 \text{ MPa}$; $\sigma_{\text{red}} = 480 \text{ MPa}$; $n_c \approx 2,1$.

4. Z jednakowych odcinków drutu zwinięto dwie sprężyny (rys. 9.39b), przy czym $D_{II} = 2D_I$. Określić stosunek naprężeń i odkształceń w tych sprężynach, jeśli P jest to samo.

Odp. Pomijając długość uszu, mamy $f_{II} = 4f_I$; jeśli pominąć wpływ siły tnącej, to $(\tau_{\max})_{II} = 2(\tau_{\max})_I$.

5. Powtórzyć zadanie 4, gdy sprężyny są „skęcane” (rys. 9.44).

Odp. Przy jednakowym obciążeniu $\sigma_I = \sigma_{II}$, $\varphi_I = \varphi_{II}$.

6. Na rysunku warsztatowym sprężyny z zadania 1 stolerowano wymiary $\varnothing D = 50 \pm 0,2$, $\varnothing d = 6 \pm 0,1$ (w mm). Uwzględniając ponadto rozrzut $\pm 0,25$ zwoju w liczbie czynnych zwojów n i $\pm 3\%$ w module⁽¹⁾ G określić rozrzut siły P odpowiadającej $f_I = 1,5 \text{ cm}$.

Odp. Wykorzystując wynik z zadania 1, określamy nominalną wartość siły $P_{\text{nom}} = Pf_I/f = 283 \text{ N}$. Następnie wzór (9.15) przedstawiamy w postaci logarytmicznej

$$\ln P = \ln G + 4 \ln d - 3 \ln D - \ln n - \ln 8 + \ln f$$

i obliczamy przyrost ΔP , traktując P jako funkcję zmiennych G , d , D i n (liczba 8 i f są stałe), skąd mamy

$$\Delta P/P = (\Delta G/G) + 4(\Delta d/d) - 3(\Delta D/D) - (\Delta n/n).$$

Biorąc najniekorzystniejszy zbieg okoliczności, gdy wszystkie podane w zadaniu odchyłki sumują się, mamy

$$(\Delta P/P)_{\text{ekstr}} = \pm 3\% \pm 4(0,1/6) \pm 3(0,2/50) \pm (0,25/5,5) = \pm 15,5\%.$$

Tak więc siła P może oscylować między

$$P_{\min} = P_{\text{nom}} - \Delta P = 239 \text{ N}, \quad P_{\max} = P_{\text{nom}} + \Delta P = 326 \text{ N}.$$

Rzeczywiste odchyłki są znacznie mniejsze od obliczonych, gdyż tak niekorzystny przypadek jest mało prawdopodobny. Ten interesujący praktyczny temat wchodzi w zakres kontroli jakości produkcji oraz technologii.

9.6. Zasady wzajemności

Przy badaniu przemieszczeń w ustrojach duże ułatwienie daje zastosowanie zasady wzajemności prac (Bettięgo) głoszącej, że

jeśli na dany sprężysty i liniowy ustrój (ciało) działają kolejno dwa różne obciążenia, to praca pierwszego obciążenia na przemieszczeniach wywołanych drugim obciążeniem jest równa pracy drugiego obciążenia na przemieszczeniach wywołanych przez pierwsze obciążenie.

Aby udowodnić słuszność tej zasady, weźmy płaski ustrój, w którym dwa różne obciążenia P_C i M_D^* wywołują w tym samym elemencie ds wysiłki o składowych odpowiednio $M'_g, \dots, M''_g, \dots$ (rys. 9.45). Obliczmy teraz kąt obrotu ϑ'_D wywołany obciążeniem stanu I . Rolę „czujnika” spełnia moment $M_D^* = 1 \text{ N m}$, odpowiadający mu wysiłek przekroju ma składowe zmniejszone M_D^* razy, czyli

$$m = M'_g/M_D^*, \quad n = N'/M_D^*, \quad t = T'/M_D^*,$$

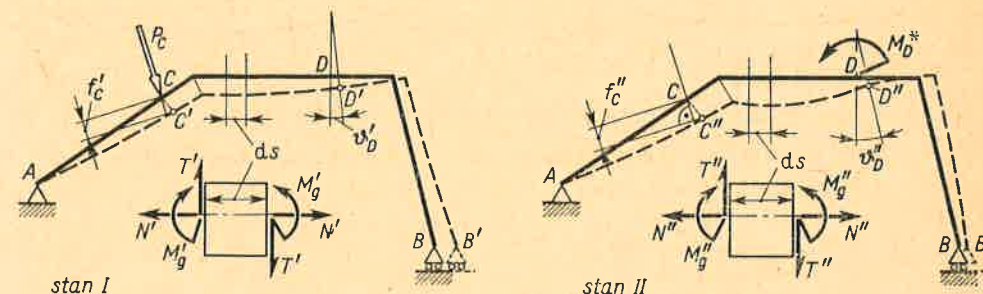
a poszukiwany kąt obrotu ϑ'_D jest według wzoru (9.2)

$$\vartheta'_D = \int \frac{M'_g M''_g ds}{EJ_y M_D^*} + \int \frac{\psi T' T'' ds}{G A M_D^*} + \int \frac{N' N'' ds}{E A M_D^*}. \quad (a)$$

⁽¹⁾ Z racji choćby niejednorodności materiału, stopnia zgniotu itp.

Podobnie, gdy obliczamy przesunięcie f'_C wywołane obciążeniem stanu II , wówczas rolę „czujnika” spełnia siła $P_C = 1 \text{ N}$ i analogiczne rozumowanie daje wynik

$$f'_C = \int \frac{M'_g M''_g ds}{EJ_y P_C} + \int \frac{\psi T' T'' ds}{G A P_C} + \int \frac{N' N'' ds}{E A P_C}. \quad (b)$$



Rys. 9.45. Ilustracja zasady wzajemności prac

Jeśli teraz pomnożymy równości (a) i (b) odpowiednio przez stałe czynniki M_D^* i P_C , to widać, że prawe strony tak przekształconych zależności są identyczne, wobec czego mamy związek

$$M_D^* \vartheta'_D = P_C f'_C, \quad (c)$$

którego lewa strona jest pracą obciążenia II na przesunięciu (uogólnionym) wywołanym obciążeniem I , a prawa strona to praca obciążenia I na przesunięciu w II stanie obciążenia. Oznaczając⁽¹⁾ odpowiednio $L_{2,1}$ i $L_{1,2}$ lewą i prawą stronę związku (c) nadajemy jemu ogólną postać

$$L_{2,1} = L_{1,2}, \quad (9.19)$$

wyrażającą matematycznie zasadę Bettięgo. Identycznie dowodzimy słuszności tego wyniku dla dowolnego ciała sprężystego i dowolnego obciążenia.

Szczególnym przypadkiem zasady Bettięgo jest zasada wzajemności przemieszczeń (Maxwella). Załóżmy mianowicie, że uogólnione obciążenia P_C i M_D^* są liczbowo równe, czyli że $P_C = B \text{ N}$, $M_D^* = B \text{ N m}$. Z równania (c) wynika

$$B \text{ N m} \cdot \vartheta'_D \text{ rad} = B \text{ N} \cdot f'_C \text{ m} \quad \text{lub} \quad \vartheta'_D \text{ rad/N} = f'_C \text{ m/Nm}, \quad (d)$$

czyli że te uogólnione przemieszczenia są liczbowo równe. Ich miana są ilorazem mian: danego przemieszczenia do obciążenia wywołującego to przemieszczenie. Oznaczając ogólnie⁽²⁾ $\vartheta'_D = \alpha_{2,1}$ oraz $f'_C = \alpha_{1,2}$ zapisujemy wynik (d) w postaci

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,1}, \quad (9.20)$$

wyrażającej matematycznie zasadę Maxwella, a mianowicie:

⁽¹⁾ W symbolice tej wskaźnik pierwszy to obciążenie pracujące, wskaźnik drugi to przyczyna (obciążenie) wywołująca przemieszczenia.

⁽²⁾ W symbolice tej α jest przemieszczeniem odpowiadającym uogólnionej sile podanej przez wskaźnik pierwszy, a wywołanym przez uogólnioną siłę określoną przez wskaźnik drugi.

jeśli na ustrój sprężysty działają kolejno dwie uogólnione siły liczbowo równe, to wzajemne uogólnione przemieszczenia odpowiadające jednej sile, a wywołane drugą siłą, są też równe.



Rys. 9.46. Przykład zastosowania zasady wzajemności prac

Zilustrujemy te dwie zasady na przykładzie belki (rys. 9.46), w której siła P i moment M_B^* reprezentują kolejne stany obciążenia. Jak wiemy⁽¹⁾, kąt ϑ_P i ugięcie f_M są:

$$\vartheta_P = Pl^2/16EJ_y, \quad f_M = M_B^* l^2/16EJ_y,$$

skąd od razu otrzymujemy identyczność prac

$$L_{2,1} = M_B^* \vartheta_P = M_B^* Pl^2/16EJ_y = P f_M = L_{1,2}.$$

Podobnie biorąc $P = 1 \text{ N}$, $M_B^* = 1 \text{ Nm}$, mamy

$$\vartheta_P = l^2/16EJ_y \text{ rad/N}, \quad f_M = l^2/16EJ_y \text{ m/Nm}$$

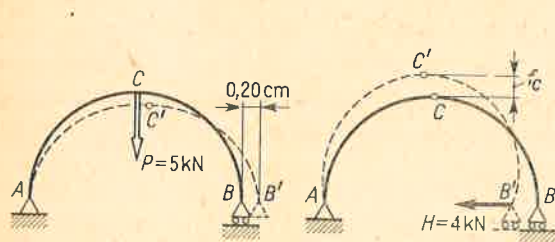
lub w ogólnej symbolice $\vartheta_P = \alpha_{2,1} = f_M = \alpha_{1,2}$.

Od strony poznawczej zasady wzajemności prac i przemieszczeń informują o ciekawych i uniwersalnych właściwościach ciał sprężystych. Zasadę wzajemności przemieszczeń można przy tym przyrównać do czynności nadawania i odbioru sygnału, jeśli za czynność nadawania przyjąć przyłożenie siły, a za odbiór przemieszczenie innego punktu. W takim „radiowym” ujęciu ta zasada wzajemności stwierdza, że sygnał odebrany w jednym miejscu z nadajnika umieszczonego w drugim miejscu nie zmienia się, gdy nadajnik i odbiornik zamienić miejscami.

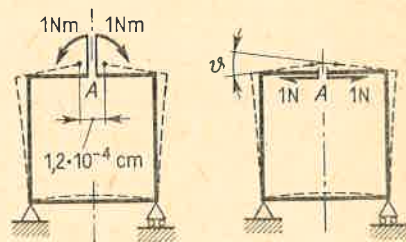
Zadania⁽²⁾

1. Pionowa siła $P = 5 \text{ kN}$ wywołuje przesunięcie $0,2 \text{ cm}$ podpory B półpięścienia (rys. 9.47). Znaleźć pionowe przesunięcie f_C punktu C przy obciążeniu półpięścienia siłą $H = 4 \text{ kN}$.

Odp. Z wzoru (9.19): $-H \cdot 0,2 \text{ cm} = P \cdot (-f_C)$, skąd $f_C = 0,16 \text{ cm}$.



Rys. 9.47.



Rys. 9.48.

⁽¹⁾ Patrz wzór (e) zadania 2 i wzór (5.30) zadania 4 z art. 5.8.

⁽²⁾ Szereg podobnych zadań podano również w rozdz. 10.

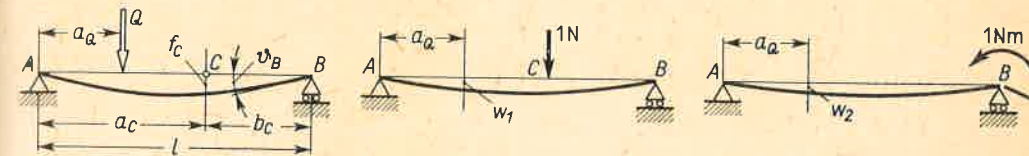
2. Dwa momenty 1 Nm działając na końce rozciętej w punkcie A ramy wywołują ich rozsuniecie o $1,2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ (rys. 9.48). O jaki kąt ϑ obróć się te końce pod działaniem dwóch przeciwnych sił jednostkowych?

Odp. $\vartheta = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$.

3. Znaleźć poziome rozsuniecie końców A symetrycznej ramy (rys. 9.48), gdy momenty 1 Nm mają zgodne zwroty.

Odp. Zero, widać bowiem, że kąty obrotu końców wywołane przeciwnymi siłami 1 N są jednakowe i praca zgodnych momentów na tych kątach jest równa zero, wobec czego praca sił 1 N na rozsunieciu wywołanym tymi zgodnymi momentami jest też równa zero.

4. Po belce o stałej sztywności przesuwa się siła Q (rys. 9.49). Znaleźć ugięcie f_C i kąt ϑ_B w funkcji a_Q .



Rys. 9.49. Zastosowanie zasady wzajemności prac do analizy obciążeń przesuwnych

Odp. Obciążmy belkę siłą 1 N w stałym przekroju C i zastosujmy zasadę wzajemności prac. W wyniku mamy

$$1 \cdot f_C = Q w_1, \quad (e)$$

gdzie w_1 — ugięcie przy obciążeniu siłą 1 N , znane już z zadania 4 art. 5.8. Przyjmując podobnie za drugi stan obciążenie $M_B^* = 1 \text{ Nm}$ mamy znowu zależność

$$1 \cdot \vartheta_B = Q w_2,$$

gdzie w_2 — ugięcie znane z zadania 2 art. 5.8.

9.7. Energia odkształcenia ciała

Pojęcie energii odkształcenia od strony poznawczej opisywaliśmy już kilkakrotnie, jak w art. 2.4, 3.1, a ostatnio w art. 9.5. Ponadto pojęcie to wykorzystano (art. 3.5) do obliczenia kąta skręcenia rury o dowolnym obrysie. Prostota tego rozwiązania wyraźnie ilustruje korzyści zastosowania pojęcia energii w analizie konstrukcji. Warunkiem tego jest ogólne zbadanie zależności energetycznych w ciałach sprężystych.

Jak zbadaliśmy dotąd, energia odkształcenia U była kwadratową funkcją obciążeń lub przemieszczeń. Ten sam wynik słuszny jest dla dowolnego liniowego ustroju sprężystego, czyli takiego, w którym obowiązuje zasada superpozycji. Załóżmy, że w takim ustroju (rys. 9.50) wszystkie obciążenia P_1, \dots, M_1, \dots rosną jednakowo od stanu początkowego do końcowego, co można wyrazić parametrem k

$$0 \leq k \leq 1, \quad (a)$$

przy czym na początku procesu $k = 0$, a na końcu $k = 1$. W stadium pośrednim wartości poszczególnych obciążeń (symbole z gwiazdkami) są

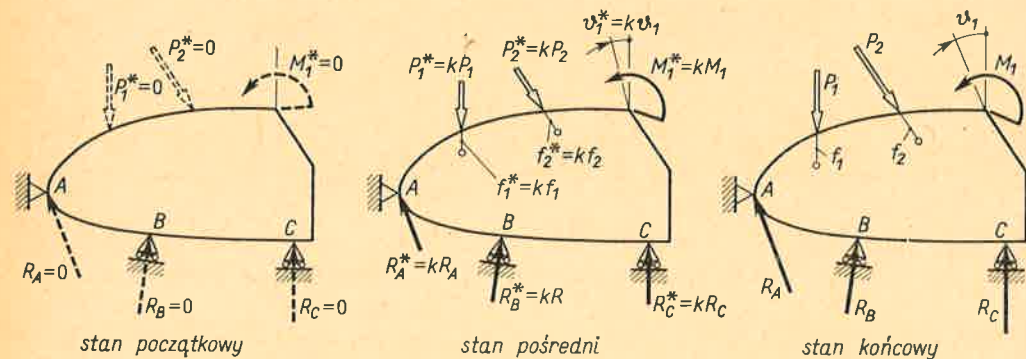
$$P_1^* = kP_1, \quad P_2^* = kP_2, \dots, \quad M_1^* = kM_1, \dots,$$

a odpowiednie przemieszczenia są, według zasady superpozycji, równe

$$f_1^* = k f_1, \quad f_2^* = k f_2, \dots, \quad \vartheta_1^* = k \vartheta_1, \dots \quad (b)$$

Gdy w procesie obciążania parametr k wzrasta o dk , wówczas elementarna praca poszczególnych obciążeń jest

$$P_1^* df_1^* = P_1 k f_1 dk = P_1 f_1 k dk, \dots, \quad M_1^* d\vartheta_1^* = M_1 \vartheta_1 k dk, \dots$$



Rys. 9.50. Proces jednostajnego wzrostu obciążenia ciała

Całkowita elementarna praca wszystkich obciążeń

$$dL = (P_1 f_1 + P_2 f_2 + \dots + M_1 \vartheta_1 + \dots) k dk \quad (c)$$

jest równa na zasadzie zachowania energii przyrostowi dU energii odkształcenia, tj. $dL = dU$. Ilość energii zgromadzona w całym procesie jest całką wyrażenia (c), gdy k zmienia się od $k = 0$ do $k = 1$, przy czym wartość w nawiasie odpowiada stanowi w końcu procesu i jest stała. Ponieważ

$$\int_0^1 k dk = \frac{1}{2},$$

zatem energia U zgromadzona w ciele jest

$$U = \frac{1}{2} (P_1 f_1 + P_2 f_2 + \dots + M_1 \vartheta_1 + \dots). \quad (9.21)$$

Wynik (9.21) nosi nazwę *twierdzenia Clapeyrona*. Głosi ono, że energia sprężystego ciała jest połową sumy iloczynów wszystkich obciążeń przez odpowiednie przemieszczenia. Do tego bilansu nie wchodzi reakcje, gdyż ich praca jest równa zeru⁽¹⁾.

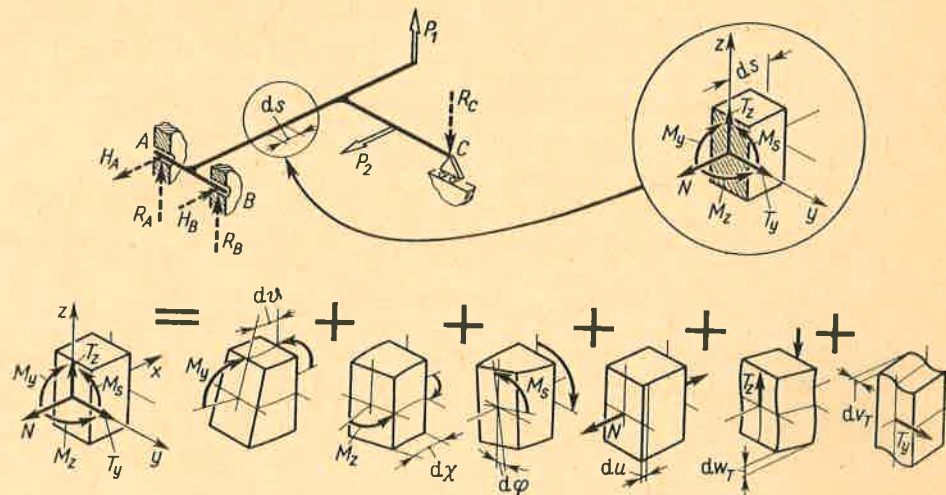
Łatwo spostrzec, że przemieszczenia $f_1, f_2, \dots, \vartheta_1, \dots$ są uogólnione, gdyż spełniają one kryterium (9.6). Przemieszczenia te wywołane są *jednoczesnym* działaniem wszystkich obciążeń i dlatego są one jednorodnymi liniowymi funkcjami tych wszystkich sił, gdyż nie mają wyrazów wolnych (niezależnych od sił). Jeśli te funkcje podstawić do (9.21), to U staje się kwadratową jednorodną funkcją uogólnionych sił. Gdyby na odwrót z tych linio-

⁽¹⁾ Gdy nie ma tarcia, reakcje, jak R_B, R_C (rys. 9.50), są prostopadłe do ewentualnych przesunięć. Gdy tarcie istnieje, część energii zostaje rozproszona i wbrew założeniu układ nie jest idealnie sprężysty.

wych funkcji określić siły za pomocą przemieszczeń i podstawić je do (9.21), wówczas U staje się jednorodną kwadratową funkcją przemieszczeń.

Należy jeszcze raz podkreślić, że twierdzenie Clapeyrona i wypływające stąd wnioski o postaci funkcji U są słuszne tylko wtedy, gdy ustrój jest sprężysty i podlega zasadzie superpozycji. Jeśli, jak przy jednoczesnym zginaniu i ściskaniu prętów smukłych (art. 6.3), nie obowiązuje zasada superpozycji, to twierdzenie Clapeyrona traci ważność.

Dowodząc twierdzenia Clapeyrona nie wnikaliśmy w mechanizm pracy ustroju i nie interesowało nas, czy ustrój jest ramą, tarczą, bryłą itd. Jeśli wnikamy głębiej w tę budowę i w wyniku mamy informacje o pracy każdego elementu ustroju, to zamiast ogólnego bilansu (9.21) możemy określić energię U wykorzystując te bardziej szczegółowe informacje. Jeśli na przykład badamy ramę (rys. 9.51), to w wyniku znamy sześć składowych wysiłku,



Rys. 9.51. Określenie energii odkształcenia konstrukcji prętowej przy wykorzystaniu znanych wartości składowych wysiłku

tj. M_y, \dots, T_z , dla każdego elementu ds ustroju. Traktując taki element jako odrębne ciało, a składowe wysiłku jako jego obciążenia, obliczmy z twierdzenia Clapeyrona ich pracę. Dla momentów M_y jest ona

$$\frac{1}{2} M_y d\vartheta,$$

gdzie $d\vartheta = M_y ds/EJ_y$ — względny obrót przekrojów w płaszczyźnie xz , znany już z art. 9.4. Tak więc praca ta jest

$$\frac{1}{2} M_y d\vartheta = M_y^2 ds/2EJ_y.$$

Podobnie obliczamy pracę pozostałych obciążeń, tj. M_z, \dots, T_z . Łatwo zauważyć, że obliczenie to stanowi kopię procesu zilustrowanego na rys. 9.31, z tym tylko, że rolę składowych m_y, m_z, \dots pełnią tym razem te same składowe M_y, M_z, \dots , a ponadto, z racji stopniowego wzrostu obciążeń, zjawia się współczynnik $\frac{1}{2}$. W wyniku mamy więc zależność

$$dL = dU = \frac{M_y^2 ds}{2EJ_y} + \frac{M_z^2 ds}{2EJ_z} + \frac{M_s^2 ds}{2C} + \frac{N^2 ds}{2EA} + \frac{\psi_z T_z^2 ds}{2GA} + \frac{\psi_y T_y^2 ds}{2GA}$$

określającą ilość energii zgromadzonej w badanym elemencie, przy czym oznaczenia sztywności są jak we wzorze (9.8). Całkowita ilość energii w ustroju jest oczywiście

$$U = \int \left(\frac{M_y^2}{2EJ_y} + \frac{M_z^2}{2EJ_z} + \frac{M_s^2}{2C} + \frac{N^2}{2EA} + \frac{\psi_z T_z^2}{2GA} + \frac{\psi_y T_y^2}{2GA} \right) ds, \quad (9.22)$$

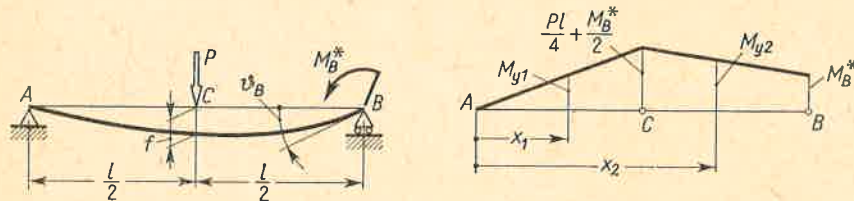
gdzie całkowanie⁽¹⁾ obejmuje wszystkie elementy ustroju.

Wykorzystując analogię wzorów określających energię U do wzorów dla przemieszczeń można przenieść od razu szereg wyników z art. 9.3 i 9.4. I tak w większości zagadnień można we wzorze (9.22) pominąć trzy ostatnie składniki (analogia do wzoru 9.9). Podobnie wstawiając do wzoru (9.10) zamiast m, n, t odpowiednio M_g, N i T oraz współczynnik $\frac{1}{2}$ otrzymujemy dla pręta silnie zakrzywionego energię U jako

$$U = \int \frac{M_g^2 ds}{2EAer} + \int \frac{M_g N ds}{EA r} + \int \frac{N^2 ds}{2EA} + \int \frac{\psi T^2 ds}{2GA}. \quad (9.23)$$

Jako ilustrację rozważań obliczmy energię belki (rys. 9.52). Według art. 5.8 (zadanie 2 i wzory 5.30) ugięcie f i kąt ϑ_B przy podanym obciążeniu są

$$f = w_C = \frac{Pl^3}{48EJ_y} + \frac{M_B^* l^2}{16EJ_y}, \quad \vartheta_B = \frac{Pl^2}{16EJ_y} + \frac{M_B^* l}{3EJ_y} \quad (d)$$



Rys. 9.52. Przykład określenia energii

i podstawienie ich do (9.21) daje energię

$$U = \frac{1}{2} (Pf + M_B^* \vartheta_B) = \frac{l^3}{96EJ_y} \left[P^2 + \frac{6}{l} PM_B^* + \frac{16}{l^2} (M_B^*)^2 \right] \quad (e)$$

jako jednorodną kwadratową funkcję obciążeń P i M_B^* . Jeśli z zależności (d) określić P i M_B^* w funkcji f i ϑ_B i te wyniki podstawić do (9.21), to energia

$$U = \frac{24EJ_y}{7l^3} (16f^2 - 6lf\vartheta_B + l^2\vartheta_B^2) \quad (f)$$

jest teraz określona jako jednorodna kwadratowa funkcja uogólnionych przemieszczeń f i ϑ_B .

Wynik (e) otrzymujemy również z wzoru (9.22), w którym podstawiamy $M_z = M_s = 0$ i

$$\left. \begin{aligned} M_{y1} &= [(P/2) + (M_B^*/l)] x_1, & 0 \leq x_1 \leq l/2, \\ M_{y2} &= [(P/2) + (M_B^*/l)] x_2 - P[x_2 - (l/2)], & l/2 \leq x_2 \leq l, \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

⁽¹⁾ Gdy funkcje $M_y(s), M_z(s), \dots$ są liniowe, a sztywności stałe, wówczas można wykorzystać uproszczony sposób całkowania według wzoru (9.3) i tabl. 9.1, z tym że mamy tu $Y(s) \equiv y(s)$.

a ponadto pomijamy siłę tnącą. W wyniku tego mamy

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{l/2} \frac{[(P/2) + (M_B^*/l)]^2 x_1^2 dx_1}{2EJ_y} + \int_{l/2}^l \frac{\{[(P/2) + (M_B^*/l)] x_2 - P[x_2 - (l/2)]\}^2 dx_2}{2EJ_y} = \\ &= \left(\frac{P}{2} + \frac{M_B^*}{l} \right)^2 \frac{l^3}{6EJ_y} - \frac{P}{EJ_y} \left(\frac{P}{2} + \frac{M_B^*}{l} \right) \frac{5l^3}{48} + \frac{P^2 l^3}{48EJ_y} = \\ &= \frac{l^3}{96EJ_y} \left[P^2 + \frac{6}{l} PM_B^* + \frac{16}{l^2} (M_B^*)^2 \right]. \end{aligned}$$

Widać, że ten drugi sposób obliczenia jest lepszy niż poprzedni, gdyż nie wymaga uprzedniego określenia przemieszczeń, tj. f i ϑ_B , wymaga natomiast wniknięcia w sposób pracy ustroju, tj. określenia M_y, M_z, \dots

Zadania

1. Pomijając wpływ sił N i T i stosując tabl. 9.1 obliczyć energię U ramy (rys. 9.2), jeśli $EJ_y = \text{const} = 4 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$.

Odp.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^6} \left[\underbrace{\frac{(12 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,41}{3}}_{\text{odcinek AB}} + \underbrace{\frac{6 \cdot 10^3 (12 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^3) + 8 \cdot 10^3 (6 \cdot 10^3 + 16 \cdot 10^3)}{6}}_{\text{odcinek BC}} \cdot 1,00 + \right. \\ &+ \underbrace{\frac{8 \cdot 10^3 (16 \cdot 10^3 - 10 \cdot 10^3) - 10 \cdot 10^3 (-20 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^3)}{6}}_{\text{odcinek CD}} \cdot 1,00 + \underbrace{\frac{(-10 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,00}{3}}_{\text{odcinek DE}} \cdot 1,00 + \\ &\left. \underbrace{\frac{(-10 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,00}{3}}_{\text{odcinek EF}} \right] = 34,8 \text{ J}. \end{aligned}$$

2. Pomijając wpływ sił N i T i wpływ krzywizny obliczyć energię U pierścienia (rys. 9.12). $q = 0,3 \text{ kN/m}$, $E = 1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Odp. Wykorzystując wynik zadania 5 art. 9.2 mamy

$$U = \frac{1}{2EJ_y} \int_0^{2\pi} [q r_z r (1 - \cos \alpha)]^2 r d\alpha = \frac{3\pi q^2 r_z^2 r^3}{2EJ_y} = 0,231 \text{ J}.$$

3. Pomijając wpływ sił T i wpływ krzywizny obliczyć ilość energii w pierścieniu (rys. 9.17), gdy przekrój jego jest kołowy.

Odp. Wykorzystując wzory (b) i (c) z art. 9.2 mamy

$$\begin{aligned} U &= \frac{P^2 r^3}{16EJ_y} [6\pi + (9\pi + 16) \xi] - \frac{Pqr^4}{8EJ_y} [6 + (4 + 12\pi + 9\pi^2) \xi] + \\ &+ \frac{q^2 r^5}{16EJ_y} [(16 + 9\pi) + (16 + 3\pi + 9\pi^2) \xi], \end{aligned}$$

gdzie $EJ_y = \pi Ed^4/64$, $C = \pi Gd^4/32$, zaś $\xi = EJ_y/C$.

4. Biorąc dane jak w zadaniu 4 art. 9.3 obliczyć energię odkształcenia kratownicy (rys. 9.27).

$$\text{Odp. } U = \sum_1^7 (N_i^2 l_i / 2EA_i) = 156,5 \text{ N m} = 156,5 \text{ J.}$$

5. W ustroju (rys. 9.51) podwojono: a) siły P_1 i P_2 , b) długości wszystkich prętów zostawiając te same przekroje i obciążenia. Jak zmieni się energia odkształcenia ustroju?

Odp. a) wzrośnie 4 razy; b) wzrośnie 8 razy, jeśli pominąć wpływ sił wzdłużnych i tnących (patrz zadanie 12 art. 9.4).

6. Podać wzór na energię odkształcenia tarczy (rys. 9.33a).

$$\text{Odp. } U = \iint_F \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2) + \frac{\tau^2}{2G} \right] \delta x dy.$$

7. Wyrażenie (e) można przedstawić jako sumę 3 składników: $P^2 l^3 / 96EJ_y, \dots$ Wyjaśnić sens fizyczny każdego składnika.

Odp. Składniki I i III to energia U_P i U_M przy oddzielnym obciążeniu belki siłą P bądź momentem M_B^* . Składnik środkowy, $PM_B^* l^2 / 16EJ_y = P(M_B^* l^2 / 16EJ_y) = M_B^* (Pl^2 / 16EJ_y)$, to praca jednego obciążenia na przesunięciu wywołanym przez drugie obciążenie przy ich *kolejnym* działaniu na tę samą belkę.

9.8. Twierdzenie Castigliana

Jak widzieliśmy na przykładzie belki (rys. 9.52), energię odkształcenia U można wyrazić (wzór e art. 9.7) jako funkcję obciążeń P i M_B^* . Traktując te obciążenia jako *zmiennie niezależne* obliczymy cząstkowe pochodne $\partial U / \partial P$ i $\partial U / \partial M_B^*$, czyli

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{l^3}{96EJ_y} \left(2P + \frac{6M_B^*}{l} \right) = \frac{Pl^3}{48EJ_y} + \frac{M_B^* l^2}{16EJ_y}, \quad (a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_B^*} = \frac{l^3}{96EJ_y} \left(\frac{6P}{l} + \frac{32M_B^*}{l^2} \right) = \frac{Pl^2}{16EJ_y} + \frac{M_B^* l}{3EJ_y}. \quad (b)$$

Widać, że wyniki te są identyczne z wzorami (d) art. 9.7. Zapisując to spostrzeżenie w postaci

$$\frac{\partial U}{\partial P} = f, \quad \frac{\partial U}{\partial M_B^*} = \vartheta_B \quad (c)$$

i uświadamiając sobie, że f i ϑ_B są uogólnionymi przemieszczeniami odpowiednio dla P i M^* , możemy zależności (c) ująć w *twierdzenie Castigliana*, a mianowicie:

pochodna energii odkształcenia względem uogólnionej siły jest równa uogólnionemu przemieszczeniu dla tej siły.

Ogólny dowód tego twierdzenia dla dowolnego sprężystego linowego ustroju sprowadza się do analizy dwóch różnych co do kolejności procesów obciążenia tego ustroju dwoma układami sił (rys. 9.53). Pierwszy z nich stanowią siły $P_1, \dots, P_n, M^*, \dots$ wraz z odpowiednimi reakcjami R_A i R_B . Układ drugi to *współkierunkowa* z P_1 siła ΔP_1 oraz odpowiednie (nie podane na rysunku) elementarne reakcje ΔR_A i ΔR_B . W pierwszym procesie przykładamy najpierw pierwszy układ, w wyniku czego ustrój gromadzi energię U , która jest funkcją sił $P_1, \dots, P_n, M^*, \dots$. Przyłożenie w drugiej kolejności nieskończenie małej siły ΔP_1 daje w wyniku stan końcowy, w którym siła P_1 wzrosła do wartości $P_1 + \Delta P_1$, a energia U według prawideł różniczkowania funkcji wielu zmiennych wzrosła do wartości

$$U' = U + (\partial U / \partial P_1) \Delta P_1. \quad (d)$$

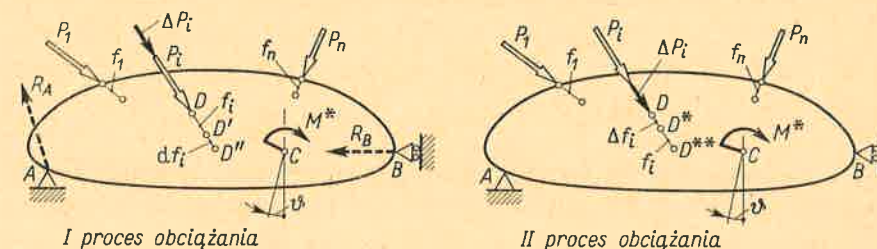
W drugim procesie kolejność obciążenia jest odwrotna. Siłę ΔP_1 przykładamy najpierw, przy czym ustrój akumuluje energię $\Delta P_1 \Delta f_i / 2$. Przyłożenie z kolei układu sił $P_1, \dots, P_n, M^*, \dots$ gromadzi w ustroju energię U zwiększoną o pracę $\Delta P_1 f_i$ istniejącej już siły ΔP_1 , przy czym $\Delta f_i = D^* D^{**}$ jest równe

DD' w pierwszym procesie z racji liniowości ustroju. W końcowym stadium drugiego procesu obciążenia cała energia U' jest

$$U' = (\Delta P_1 \Delta f_i / 2) + U + \Delta P_1 f_i \quad (e)$$

i równa się wartości określonej poprzednio, gdyż stany końcowe obydwóch procesów są te same. Wynika stąd, że

$$(\partial U / \partial P_1) \Delta P_1 = (\Delta P_1 \Delta f_i / 2) + \Delta P_1 f_i.$$



Rys. 9.53. Ilustracja do dowodu twierdzenia Castigliana

Odrzucając składnik $(\Delta P_1 \Delta f_i / 2)$ jako małą wyższego rzędu w porównaniu z pozostałymi, mamy ostatecznie

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = f_i \quad (9.24)$$

jako matematyczne ujęcie twierdzenia Castigliana.

W powyższym rozumowaniu założono, że przyrost jednej siły, tj. P_i , nie zmienia wartości sił pozostałych, czyli że te siły $P_1, \dots, P_n, M^*, \dots$ są *niezależne*. Warunku tego nie spełniają reakcje, jak R_A i R_B na rys. 9.53, uzależnione od sił $P_1, \dots, P_n, M^*, \dots$ równaniami statyki. Aby więc nie popełnić błędu, należy przed stosowaniem wzoru (9.24) orzec, które siły uważamy za *statycznie niezależne*, a energię U wyrazić jako funkcję tylko tych właśnie sił.

Nałożone na początku ograniczenia, że ustrój jest liniowy i sprężysty, nie występują jawnie, lecz ukryte są w toku dowodu. W większości wypadków założenia te są spełnione i wtedy naturalnym zastosowaniem twierdzenia Castigliana jest wyznaczanie przemieszczeń. Otrzymane stąd wyniki można doprowadzić do formalnej zgodności z wzorami art. 9.3 i 9.4, opartymi na metodzie Maxwella–Mohra. Ta formalna zgodność nie oznacza jednak zgodności pojęciowej. Metoda Maxwella–Mohra jest w swej istocie analitycznym ujęciem pomiaru warsztatowego, w którym wyraźnie oddzielone są dwa czynniki: jeden wywołujący odkształcenia i drugi mierzący odkształcenia. Twierdzenie natomiast Castigliana konstatuje pewną właściwość energii odkształcenia sprężystego. Różnice występują wyraźniej, gdy porównać zakres stosowania. W metodzie M–M przynajmniej z początku przyczyna odkształceń ustroju była nieistotna, a wzory (9.1) i (9.7) są słuszne niezależnie, czy odkształcenia te są wynikiem obciążenia, ogrzania czy błędnego wykonania, pod które można również podciągnąć trwale odkształcenia elementów. W tym ujęciu twierdzenie Castigliana stanowi tylko fragment metody M–M i dlatego w tej książce twierdzenie Castigliana omówiono wyłącznie od strony poznawczej.

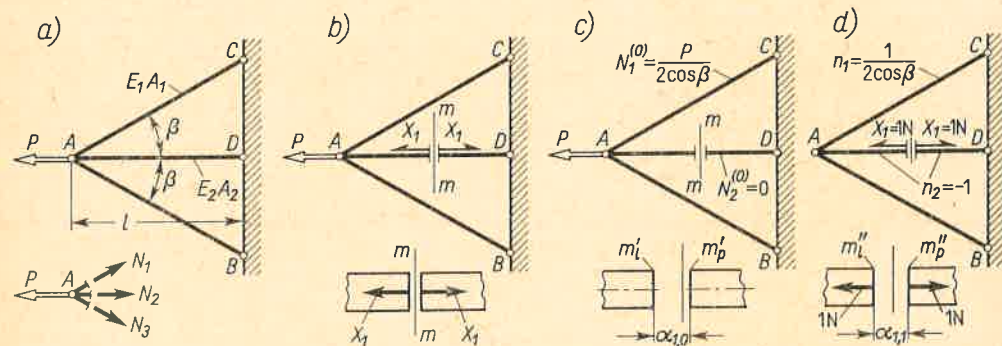
10 STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE USTROJE PRĘTOWE

Wszystkie badane dotąd ustroje były statycznie wyznaczalne. W ustrojach tych siły biernie, składające się wraz z czynnymi na obciążenie, można określić z równań statyki, a wysiłek każdego przekroju można wyznaczyć metodą przecięć. W praktyce jednak spotykamy często ustroje statycznie niewyznaczalne, w których określenie reakcji bądź wysiłku przekrojów z samych tylko równań równowagi nie jest możliwe i do ich wyznaczenia potrzeba uwzględnić odkształcenia ustroju.

10.1. Zasady i metody rozwiązania

Przebieg rozwiązania takich ustrojów prześledzimy na przykładzie płaskiej kratownicy, której węzeł A łączy się z nieodkształcalnym podłożem prętem AD i dwoma jednakowymi AB i AC (rys. 10.1a). Pręty te zakończone idealnymi przegubami mogą przenosić tylko siły wzdłużne N_1, N_2 i N_3 . Badając równowagę węzła A możemy napisać tylko dwa równania rzutów:

$$N_1 \sin \beta - N_3 \sin \beta = 0, \quad N_1 \cos \beta + N_2 + N_3 \cos \beta - P = 0, \quad (a)$$



Rys. 10.1. Wprowadzenie do metody sił

gdyż trzecie równanie (równowagi momentów) jest spełnione tożsamościowo. Zadanie jest więc statycznie niewyznaczalne, gdyż liczba niewiadomych jest większa niż liczba będących do dyspozycji równań równowagi. Nadwyżkę liczby niewiadomych nad liczbą równań

nazywamy *stopniem statycznej niewyznaczalności*. W danym przypadku różnica ta wynosi jedność i mówimy, że zadanie jest *jednokrotnie* statycznie niewyznaczalne.

Aby sformułować trzecie równanie konieczne dla określenia sił N , musimy zbadać odkształcenia ustroju. W tym celu potraktujmy jedną z nich, np. N_2 , za wchodzącą w skład obciążenia⁽¹⁾ (rys. 10.1b). Dzięki temu chwytowi *ustrój jest już statycznie wyznaczalny z nieznanej na razie co do wartości części obciążenia*, tj. układem sił⁽²⁾ X_1 . Siły w prętach tego ustroju określamy oddzielnie dla znanej części obciążenia, tj. siły P (rys. 10.1c), i dla nieznanej na razie części *przyjmując chwilowo*, że $X_1 = 1$ N (rys. 10.1d). Widać, że działanie siły P , nazywane odtąd *stanem zerowym* (stan „0”) wywołuje w prętach siły

$$N_1^{(0)} = P/2 \cos \beta, \quad N_2^{(0)} = 0, \quad N_3^{(0)} = P/2 \cos \beta, \quad (b)$$

a działanie sił $X_1 = 1$ N, tzw. *stan pierwszy* (stan „1”)

$$n_1 = 1/2 \cos \beta \text{ N/N}, \quad n_2 = -1 \text{ N/N}, \quad n_3 = 1/2 \cos \beta \text{ N/N}. \quad (c)$$

W każdym z tych stanów siły $N^{(0)}$ bądź n wywołują odkształcenie prętów, a w konsekwencji i rozejście się końców myślowo przeciętego w przekroju $m-m$ pręta AD . Nie obliczając na razie oznaczmy, jak w art. 9.6 (wzór 9.20), te względne przemieszczenia odpowiednio przez $\alpha_{1,0}$ i $\alpha_{1,1}$. Jeśli zamiast obranych chwilowo sił $X_1 = 1$ N będą działały siły rzeczywiste X_1 razy większe, to przemieszczenie $\alpha_{1,1}$ powiększy się tyleż razy i będzie $\alpha_{1,1} X_1$. Całkowite względne przemieszczenie α_1 przy łącznym działaniu siły P i rzeczywistych sił X_1 jest według zasady superpozycji

$$\alpha_1 = \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0}. \quad (d)$$

Łatwo spostrzec, że $\alpha_1 = 0$, gdyż w rzeczywistości nie ma względnego przemieszczenia w miejscu myślowego przecięcia, skąd otrzymujemy równanie

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0 \quad (10.1)$$

wyrażające tzw. *warunek ciągłości odkształceń*. Aby ten wynik wykorzystać, należy tylko określić przemieszczenia $\alpha_{1,0}$ i $\alpha_{1,1}$. Czynność ta nie sprawi trudności jeśli, nawiązując do art. 9.4, zauważymy, że grupa sił $X_1 = 1$ N jest uogólnioną jednostkową siłą („czujnikiem”) dla przemieszczeń $\alpha_{1,0}$ i $\alpha_{1,1}$. I tak z wzoru (9.5) mamy

$$\alpha_{1,0} = \sum_1^3 \frac{\bar{N}_i n_i l_i}{EA_i} = 2 \cdot \frac{P}{2 \cos \beta} \frac{1}{2 \cos \beta} \frac{l}{E_1 A_1 \cos \beta} + \frac{0 \cdot (-1) \cdot l}{E_2 A_2}. \quad (e)$$

Przy obliczeniu $\alpha_{1,1}$ jednostkowy układ $X_1 = 1$ N spełnia podwójną rolę: obciążenia i „czujnika”, wobec czego

$$\alpha_{1,1} = \sum_1^3 \frac{\bar{n}_i^2 l_i}{EA_i} = \left(\frac{1}{2 \cos \beta} \right)^2 \frac{l}{E_1 A_1 \cos \beta} + \frac{(-1)^2 l}{E_2 A_2}. \quad (f)$$

⁽¹⁾ Sił N_2 , jako wewnętrznych, jest dwie, z których lewa to działanie pręta mD na lewą część ustroju, a prawa to działanie całej lewej części ustroju na pręt mD .

⁽²⁾ Dla przejrzystości rysunków przyjęto tu, że siły $N_2 = X_1$ są ściskające. Rzeczywisty ich zwrot mamy z wyniku końcowego.

Podstawiając wyrażenia (e) i (f) do (10.1) mamy

$$X_1 = - \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \beta (E_1 A_1 / E_2 A_2)}, \quad (g)$$

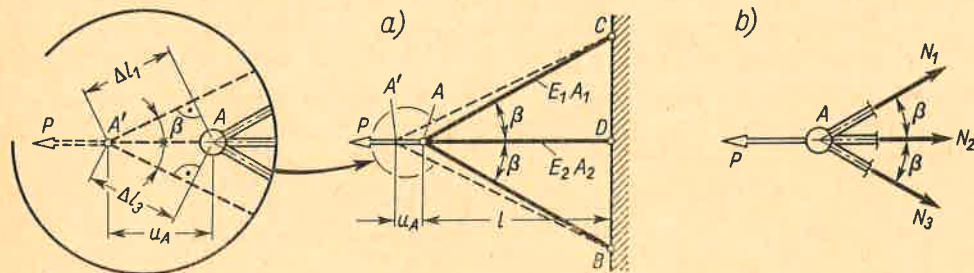
przy czym $X_1 < 0$ oznacza, że zwroty nie znanej dotąd grupy sił X_1 są przeciwne niż założono, a więc że pręt AD jest w rzeczywistości rozciągany. Jest to zgodne z fizycznym wycuciem, gdyż w pierwotnym stanie (rys. 10.1a) węzeł A przesuwają się na lewo i pręt AD wydłuża się.

Mając wartość siły $N_2 = -X_1$ możemy z równań (a) określić pozostałe siły N_1 i N_3 . Prościej jednak jest superponować wyniki (b) i zwiększone X_1 razy wyniki (c), tj.

$$N_1 = N_1^{(0)} + n_1 X_1 = P \frac{(E_1 A_1 / E_2 A_2) \cos^2 \beta}{1 + 2 (E_1 A_1 / E_2 A_2) \cos^3 \beta} = N_3, \quad N_2 = -X_1.$$

Zbadajmy zgodność tych wyników z fizycznym obrazem zjawisk. Gdy pręt AD jest bardzo solidny w porównaniu z bocznymi, wówczas ich rola jest nieistotna i całą prawie siłę P powinien przenosić pręt AD , czyli że $N_2 \approx P$, a $N_1 = N_3 \approx 0$. Na odwrót, gdy pręt AD jest wiotki w porównaniu z bocznymi, to w prętach bocznych powinny być siły $N_1 = N_3 \approx P/2 \cos \beta$, a $N_2 \approx 0$. Taki właśnie wynik dają powyższe wzory, jeśli wstawić w nich $(E_1 A_1 / E_2 A_2) \approx 0$ dla pierwszego przypadku, a $(E_1 A_1 / E_2 A_2) = \infty$ dla drugiego. Nie rozszerzając tej dyskusji widzimy, że w badanym ustroju wysiłek przekrojów zależy nie tylko od obciążenia i kształtu, lecz także od sztywności elementów. Jest to zasadnicza cecha ustrojów statycznie niewyznaczalnych.

W przedstawionej metodzie sił zasadniczą niewiadomą jest siła X_1 , a warunek (10.1) ciągłości odkształceń jest końcowym etapem rozwiązania. Zamiast tego jako niewiadome można przyjąć odkształcenia ustroju, a w etapie końcowym zbadać warunki równowagi.



Rys. 10.2. Wprowadzenie do metody przemieszczeń

Ten drugi sposób rozwiązania, tzw. *metodę przemieszczeń*, zilustrujemy na tym samym ustroju. Z racji symetrii i ustroju, i obciążenia węzeł A przemieści się o u_A po osi symetrii (rys. 10.2a), przy czym pręty doznają wydłużeń

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = u_A \cos \beta, \quad \Delta l_2 = u_A. \quad (h)$$

Tym wydłużeniem odpowiadają siły wzdłużne w prętach

$$N_1 = N_3 = E_1 A_1 \Delta l_1 / l_1 = E_1 A_1 u_A \cos^2 \beta / l, \quad N_2 = E_2 A_2 u_A / l \quad (i)$$

zapewniające równowagę węzła A (rys. 10.2b), czyli

$$2N_1 \cos \beta + N_2 - P = 0.$$

Wstawiając wyrażenia (i) w powyższe równanie mamy

$$u_A = Pl / (2E_1 A_1 \cos^3 \beta + E_2 A_2), \quad (j)$$

a po wstawieniu u_A do równań (i) określamy wartości N_1, N_2 , które, jak łatwo sprawdzić, są identyczne z poprzednimi.

W bardziej złożonych ustrojach metoda przemieszczeń jest wygodniejsza niż metoda sił, gdyż daje prostsze równania. Jednocześnie jest ona trudniejsza, gdyż wymaga określenia obrazu odkształceń. Z tego powodu będziemy częściej stosować metodę sił. Jak widzieliśmy na przykładzie (rys. 10.1), metoda ta ma następujące etapy:

I. *Określenie stopnia statycznej niewyznaczalności* ustroju. Etap ten wyrażał się w sformułowaniu równań równowagi (a) i stwierdzeniu, o ile więcej jest niewiadomych sił niż tych równań.

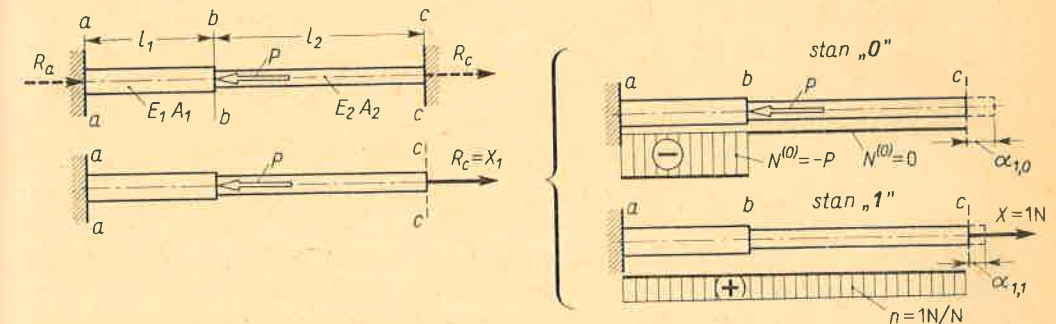
II. *Zamiany ustroju statycznie niewyznaczalnego na statycznie wyznaczalny z nie znanymi na razie co do wartości niektórymi obciążeniami o znanym jednak charakterze i miejscu działania*. Etapem tym było uznanie za niewiadomą siły wzdłużnej X_1 (znany charakter) w przekroju $m-m$ (znane miejsce działania). Wbrew pozorom etap ten nie jest żonglerką słowną, lecz jest zmianą pojęciową, sprowadza bowiem ustrój do klasy znanych już ustrojów.

III. *Określenie nie znanych wartości sił X , tzw. statycznie niewyznaczalnych, z warunku ciągłości przemieszczeń w tym miejscu ustroju, w którym te siły X wprowadzono*. Etapem tym było sformułowanie równania (10.1) i obliczenie wartości jego współczynników $\alpha_{1,1}$ i $\alpha_{1,0}$.

Konsekwentne przestrzeganie tych etapów powinno być regułą postępowania, daje bowiem rękojmię prawidłowego wyniku. Osobną kwestią jest dyskusja wyników rozwiązania i ich wykorzystanie do oceny bezpieczeństwa bądź do kształtowania ustroju.

Zadania

1. Metodą sił wyznaczyć siły wzdłużne w pręcie obustronnie utwierdzonym i obciążonym poosiową siłą P (rys. 10.3).



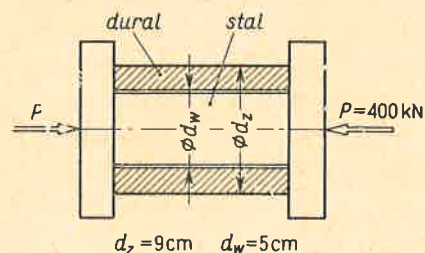
Rys. 10.3.

Odp. Wartość $R_c = X_1$ otrzymujemy z równania (10.1), w którym $\alpha_{1,0} = -Pl_1/E_1A_1$, $\alpha_{1,1} = (l_1/E_1A_1) + (l_2/E_2A_2)$. W wyniku:

$$\text{na odcinku } bc \quad N_{bc} = X_1 = P/[1 + (E_1A_1/E_2A_2)(l_2/l_1)],$$

$$\text{na odcinku } ab \quad N_{ab} = X_1 - P = -P/[(E_2A_2/E_1A_1)(l_1/l_2) + 1].$$

2. Stalowy walec i współosiowa z nim duralowa tuleja ściskane są siłą P między nieodkształcalnymi płytami prasy (rys. 10.4). Metodą przemieszczeń określić względne skrócenie ε oraz naprężenia w tulei i walcu. $E_s = 2,05 \cdot 10^5$ MPa, $E_d = 7,0 \cdot 10^4$ MPa.



Rys. 10.4.

Odp. Ponieważ $\varepsilon_s = \varepsilon_d = \varepsilon$, zatem $N_{stal} = E_s \varepsilon (\pi d_w^2/4)$, $N_{dural} = E_d \varepsilon \pi (d_z^2 - d_w^2)/4$, a równanie równowagi płyty $N_{stal} + N_{dural} - P = 0$, skąd $\varepsilon = P/[(EA)_s + (EA)_d] = 0,563 \cdot 10^{-3}$ i dalej $\sigma_s = E_s \varepsilon = 115$ MPa, $\sigma_d = E_d \varepsilon \approx 38$ MPa.

3. W konstrukcji (rys. 10.1) $E_1 = E_2$, $\beta = 30^\circ$. Znaleźć stosunek A_2/A_1 , aby były równe: a) siły wzdłużne, b) naprężenia.

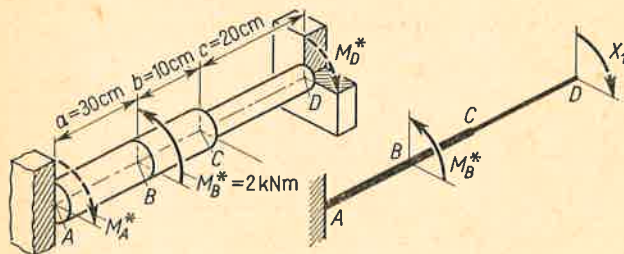
Odp. a) $A_2/A_1 = 0,75$; b) zadanie nie ma rozwiązania, gdyż z (h) mamy: $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \Delta l_1/l_1 = u_A \cos^2 \beta/l$, $\Delta l_2 = u_A/l$ i gdy $\beta \neq 0$, zawsze $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, a więc i $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

4. Obliczyć naprężenia τ_{max} w wałku (rys. 10.5) utwierdzonym na końcach, a obciążonym momentem M_B^* . Średnice na odcinkach AC i CD są $d_{AC} = 5$ cm i $d_{CD} = 4$ cm.

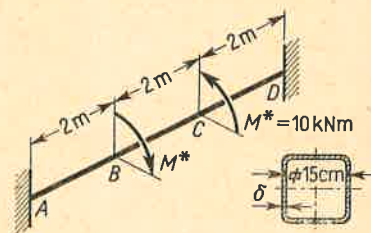
Odp. Po myślowym rozcięciu utwierdzenia D i oznaczeniu $M_D^* = X_1$ mamy znowu warunek ciągłości (10.1), w którym

$$\alpha_{1,1} = [32(a+b)/\pi G d_{AC}^4] + (32c/\pi G d_{CD}^4), \quad \alpha_{1,0} = -32M_B^* a/\pi G d_{AC}^4$$

kąty obrotu przekroju D wywołane przez $X_1 = 1$ Nm, lub przez M_B^* . W wyniku $X_1 = 675$ Nm i niebezpieczne są przekroje odcinka AB , gdzie $M_s = M_B^* - X_1 = 1325$ N m, zaś $\tau_{max} = 54,1$ MPa.



Rys. 10.5.



Rys. 10.6.

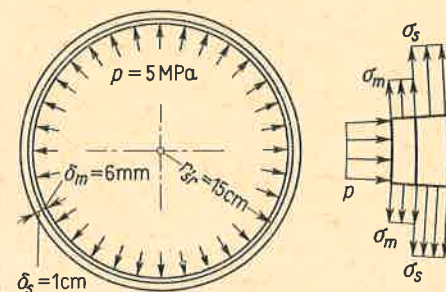
5. Utwierdzoną na końcach pryzmatyczną cienkościenną rurę obciążono dwoma przeciwnymi momentami M^* (rys. 10.6). Dobrac grubość δ ścianki, aby $\sigma_{red} \leq 80$ MPa.

Odp. $(M_s)_{max} = 0,6M^* = 6 \cdot 10^3$ N m działa w części BC i z warunku $\tau = (M_s)_{max}/2F\delta \leq \sigma_{red}/\sqrt{3}$ mamy $\delta \approx 3$ mm.

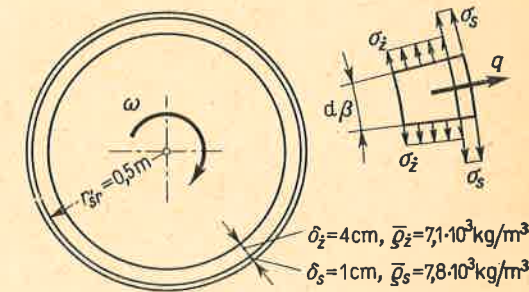
6. Dwie rury: wewnętrzna miedziana ($E_m = 1 \cdot 10^5$ MPa) i zewnętrzna stalowa ($E_s = 2,0 \cdot 10^5$ MPa) o tej samej długości włożono na siebie bez luzu (rys. 10.7). Pomijając tarcie między rurami określić metodą przemieszczeń naprężenia w rurach wywołane działaniem ciśnienia $p = 5$ MPa.

Odp. W obydwóch rurach wydłużenie obwodowe ε jest to samo, skąd $\sigma_s = E_s \varepsilon$ i $\sigma_m = E_m \varepsilon$. Warunek równowagi paska o jednostkowej długości $\sigma_s \delta_s + \sigma_m \delta_m = pr_{sr}$, skąd

$$\varepsilon = pr_{sr}/(E_s \delta_s + E_m \delta_m) = 2,88 \cdot 10^{-4} \quad \text{oraz} \quad \sigma_s \approx 58 \text{ MPa}, \quad \sigma_m \approx 29 \text{ MPa}.$$



Rys. 10.7.



Rys. 10.8.

7. Cienki pierścień żeliwny ($E_z = 7 \cdot 10^4$ MPa) z nałożonym na niego bez luzu bandażem stalowym ($E_s = 2,0 \cdot 10^5$ MPa) o tej samej szerokości wiruje z $\bar{n} = 1500$ obr/min (rys. 10.8). Określić naprężenia σ_z w pierścieniu i σ_s w bandażu.

Odp. Rolę p z zadania poprzedniego spełnia teraz siła bezwładności $q = (\bar{q}_z \delta_z + \bar{q}_s \delta_s) (\pi \bar{n}/30)^2 r_{sr}$. Reszta jak poprzednio i $\sigma_z = 32,5$ MPa, $\sigma_s = 93,0$ MPa.

10.2. Równania kanoniczne metody sił

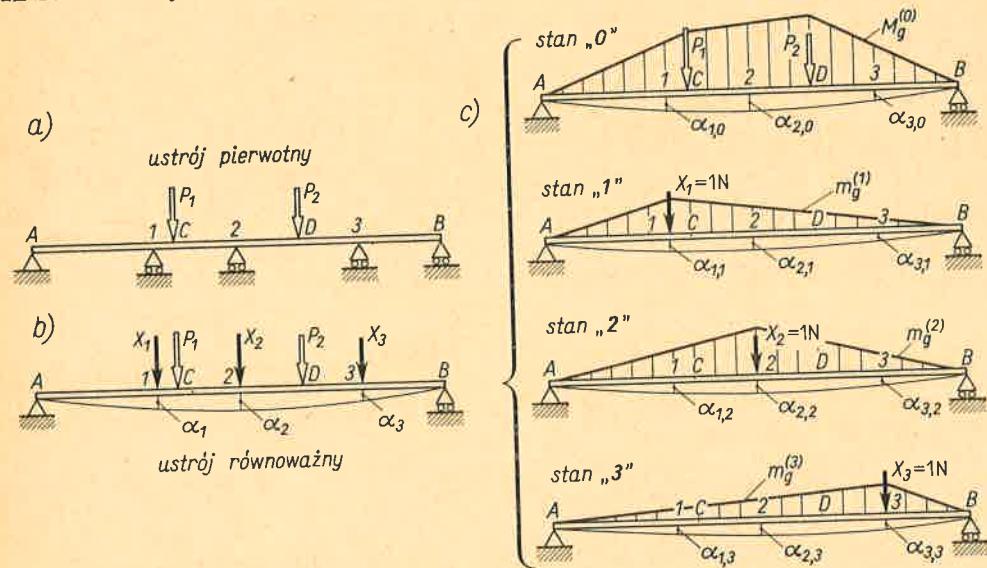
Metodę sił uogólnimy obecnie na przypadek, gdy badany sprężysty i liniowy ustrój jest wielokrotnie statycznie niewyznaczalny. Metodę objaśnimy na przykładzie tzw. *belki ciągłej* (rys. 10.9a), w której podpory pośrednie 1, 2 i 3 dzielą całą belkę na tzw. *przęsła*. Jeśli te podpory myślowo usunąć zostawiając tylko podpory skrajne A i B, to dla zachowania pierwotnego stanu ustroju musimy poza znanymi siłami P_1 i P_2 przyłożyć nie znane na razie siły X_1 , X_2 i X_3 stanowiące reakcje usuniętych podpór na belkę (rys. 10.9b). Wyznaczenie tych sił X z równań równowagi nie jest możliwe, albowiem łącznie z reakcjami podpór A i B mamy sześć niewiadomych, a tylko trzy równania równowagi. Tak więc badany ustrój jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalny, a nie znane siły X_1 , X_2 i X_3 *statycznie niewyznaczalne*. Początkowy stan ustroju, tj. belkę na pięciu podporach, nazywamy *ustrojem pierwotnym*. Tę samą belkę po usunięciu podpór pośrednich, a więc statycznie wyznaczalną, nazywamy *ustrojem podstawowym*. Ustrój podstawowy obciążony siłami (P_1, P_2) i statycznie niewyznaczalnymi (X) nazywamy *ustrojem równoważnym*.

Oznaczenie wielkości statycznie niewyznaczalnych oraz określenie ustroju podstawowego i równoważnego zamyka I i II etap rozwiązania (art. 10.1). Aby określić wartości sił X (III etap rozwiązania), rozpatrzmy przemieszczenia (ugięcia) ustroju równoważnego, a w szczególności ugięcia $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ w punktach 1, 2, 3, w których działają siły X . Ugięcia te są funkcjami znanych obciążeń (P_1, P_2) i nie znanych sił X i jeśli badany ustrój ma

być rzeczywiście równoważny pierwotnemu, to te przemieszczenia muszą być równe zero, czyli

$$\alpha_1(P_1, P_2, X_1, X_2, X_3) = 0, \quad \alpha_2(P_1, \dots, X_3) = 0, \quad \alpha_3(P_1, \dots, X_3) = 0. \quad (a)$$

Warunki (a) wyrażają w swej istocie *ciągłość przemieszczeń* między belką a pośrednimi podporami. Aby w tych zależnościach ujawnić rolę poszczególnych obciążeń, rozdzielamy stan równoważny na cztery stany składowe (rys. 10.9c). Stan obciążenia znanymi siłami



Rys. 10.9. Ilustracja do sformułowania równań kanonicznych

(P_1, P_2) nazywamy zerowym (stan „0''”), a kolejne stany obciążenia siłami *jednostkowymi* $X_1 = 1 \text{ N}$, $X_2 = 1 \text{ N}$, $X_3 = 1 \text{ N}$ odpowiednio stanami „1''”, „2''” i „3''”. Odpowiednie przemieszczenia oznaczamy przez $\alpha_{i,j}$ zachowując symbolikę wskaźników, jak w art. 9.6. Tak na przykład $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{1,0}$ są uogólnionymi przesunięciami (ugięciami) odpowiednio dla sił X_1, X_2, X_3 , a wywołanymi jednostkowymi obciążeniami $X_3 = 1 \text{ N}$, $X_2 = 1 \text{ N}$ i stanem obciążenia „0''”.

Przypominając teraz, że w stanie równoważnym zamiast sił jednostkowych X działają ich wielokrotności oznaczone jako $X_1 \neq 1 \text{ N}$, $X_2 \neq 1 \text{ N}$, $X_3 \neq 1 \text{ N}$ otrzymamy w punkcie 1 przemieszczenia $\alpha_{1,1} X_1$, $\alpha_{1,2} X_2$, $\alpha_{1,3} X_3$, $\alpha_{1,0}$ zachodzące w tym samym kierunku. Przy jednoczesnym działaniu wszystkich obciążeń całkowite przemieszczenie α_1 jest sumą tych składników i zgodnie z pierwszym warunkiem ciągłości (a) musi być równe zero, czyli

$$\alpha_1 = \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,3} X_3 + \alpha_{1,0} = 0.$$

Podobnie formułujemy warunki ciągłości przemieszczeń i w rezultacie otrzymujemy układ trzech równań

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,3} X_3 + \alpha_{1,0} &= 0, \\ \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,3} X_3 + \alpha_{2,0} &= 0, \\ \alpha_{3,1} X_1 + \alpha_{3,2} X_2 + \alpha_{3,3} X_3 + \alpha_{3,0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Powyższe równania liniowe nazywamy *równaniami kanonicznymi* metody sił lub *równaniami Maxwella–Mohra*. Ich liczba jest taka, jak stopień statycznej niewyznaczalności ustroju, wystarcza więc do jednoznacznego⁽¹⁾ określenia nie znanych dotąd wartości X i stanowi formalne rozwiązanie zadania. Jest rzeczą oczywistą, że wybrany tu przykład ustroju nie wpływa zupełnie na ogólność rozważań. Podobną postać równań kanonicznych otrzymamy dla każdego ustroju, z tym tylko, że liczba równań może być inna, zależnie od stopnia statycznej niewyznaczalności.

Tak zwane *przemieszczenia jednostkowe* $\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots$ obliczamy metodą Maxwella–Mohra. Ponieważ $\alpha_{i,j}$ jest uogólnionym przesunięciem dla uogólnionej siły X_i wywołanym przez jednostkowe uogólnione obciążenie $X_j = 1$, zatem dla badanej tu konstrukcji płaskiej mamy z wzoru (9.2)

$$\alpha_{i,j} = \int \frac{m_g^{(j)} m_g^{(i)} ds}{EJ_y} + \int \frac{n^{(j)} n^{(i)} ds}{EA} + \psi \int \frac{t^{(j)} t^{(i)} ds}{GA}, \quad (10.3)$$

gdzie $m_g^{(j)}, n^{(j)}, t^{(j)}$ oznaczają odpowiednio moment gnący, siłę wzdłużną i siłę tnącą wywołaną obciążeniem $X_j = 1$, a więc w stanie „j''”. Podobne oznaczenia ze wskaźnikiem (i) odpowiadają $X_i = 1$, a więc stanowi „i''”, spełniającemu rolę „czujnika”. Dla współczynników $\alpha_{i,i}$ uogólniona siła $X_i = 1$ występuje w podwójnej roli: „czujnika” i obciążenia, co powoduje, że we wzorze (10.3) mamy zamiast iloczynów $m_g^{(j)} m_g^{(i)}, \dots$ kwadraty $[m_g^{(i)}]^2, \dots$. Wynika stąd, że $\alpha_{i,i}$ jest zawsze dodatnie, natomiast $\alpha_{i,j}$ ($i \neq j$) mogą być dodatnie, ujemne lub równe zero. Z budowy wzoru (10.3) widać, że

$$\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}, \quad (10.4)$$

co jest zresztą konsekwencją ogólnej zasady wzajemności (9.20). Wykorzystanie zależności (10.4) ułatwia obliczenia, gdyż redukuje liczbę określanych wyrazów.

Wyrazy wolne $\alpha_{i,0}$ układu (10.2) określamy z tego samego wzoru (9.2) dla obciążenia w stanie „0''”, czyli

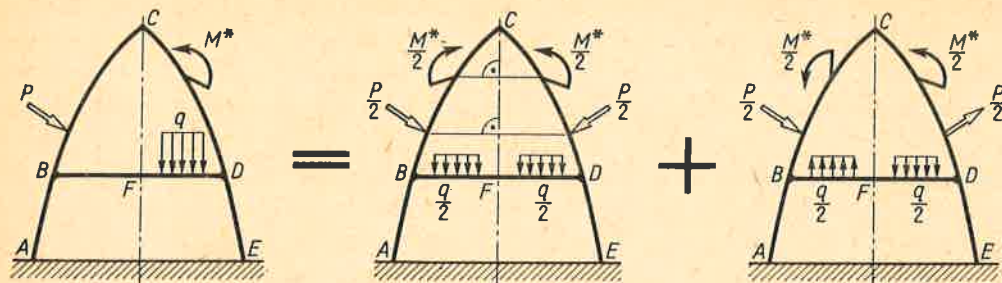
$$\alpha_{i,0} = \int \frac{M_g^{(0)} m_g^{(i)} ds}{EJ_y} + \int \frac{N^{(0)} n^{(i)} ds}{EA} + \psi \int \frac{T^{(0)} t^{(i)} ds}{GA}, \quad (10.5)$$

gdzie $M_g^{(0)}, N^{(0)}, T^{(0)}$ składowe wysiłki w stanie „0''”. Przy obliczeniu całek we wzorach (10.3) i (10.5) można korzystać, o ile spełnione są odpowiednie warunki, ze skróconego sposobu całkowania według (9.3). Podobnie wykorzystując wnioski z rozdz. 9, można często pominąć wpływ sił wzdłużnych i tnących zachowując w (10.3) i (10.5) tylko pierwszy składnik. Tak właśnie zrobiono na rys. 10.9c podając tylko $M_g^{(0)}, \dots$, co nie oznacza, że siły $N^{(0)}, T^{(0)}, n^{(i)}, t^{(i)}$ są równe zero.

Gdy badany ustrój ma oś lub płaszczyznę symetrii, wówczas duże uproszczenie daje wykorzystanie *zasady jednoznaczności* głoszącej, że w danym sprężystym i liniowym ustroju dane obciążenie wywołuje tylko jeden stan napięć i przemieszczeń.⁽²⁾ Zauważmy bowiem, że ustrój taki (rys. 10.10) stanowi zespół dwóch identycznych konstrukcji (połówek)

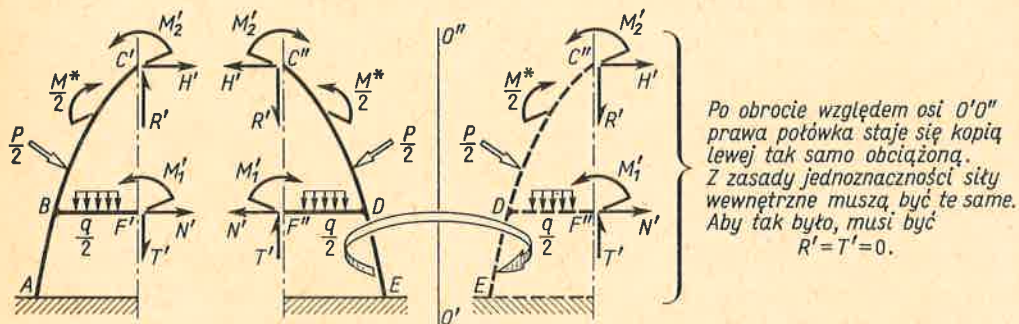
⁽¹⁾ Można udowodnić, że wyznacznik charakterystyczny układu (10.2) jest zawsze różny od zera, co jak wiemy z matematyki, wystarcza dla jednoznaczności rozwiązania.

⁽²⁾ Zakłada się, że ustrój nie może przemieszczać się jako ciało sztywne. Dowód zasady jednoznaczności podaje się w teorii sprężystości.

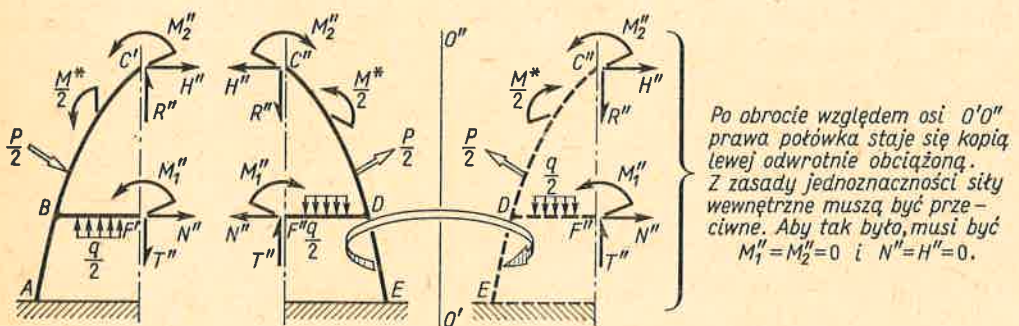


Rys. 10.10. Rozkład obciążenia na symetryczne i antysymetryczne

złączonych w płaszczyźnie symetrii, a każde jego obciążenie da się rozdzielić na symetryczne i antysymetryczne. Rozważając działanie każdego z nich osobno (rys. 10.11 i 10.12) poprowadzmy dodatkowo przecięcie ustroju w płaszczyźnie symetrii, dzięki czemu ujawniają



Rys. 10.11. Oddziaływania w płaszczyźnie symetrii przy obciążeniu symetrycznym



Rys. 10.12. Oddziaływania w płaszczyźnie symetrii przy obciążeniu antysymetrycznym

się odpowiednio układy wewnętrzne $R', H', M'_2, T', N', M'_1$ bądź R'', \dots, M''_1 podane tu w najogólniejszej postaci płaskiego układu sił. Traktując teraz każdą z połówek jako odrębny ustrój wykorzystamy zasadę jednoznaczności. W tym celu obrócimy względem osi $O'O'' \parallel C'F'$ prawe połówki wraz z ich obciążeniem tak, aby pokryły się one z lewymi.

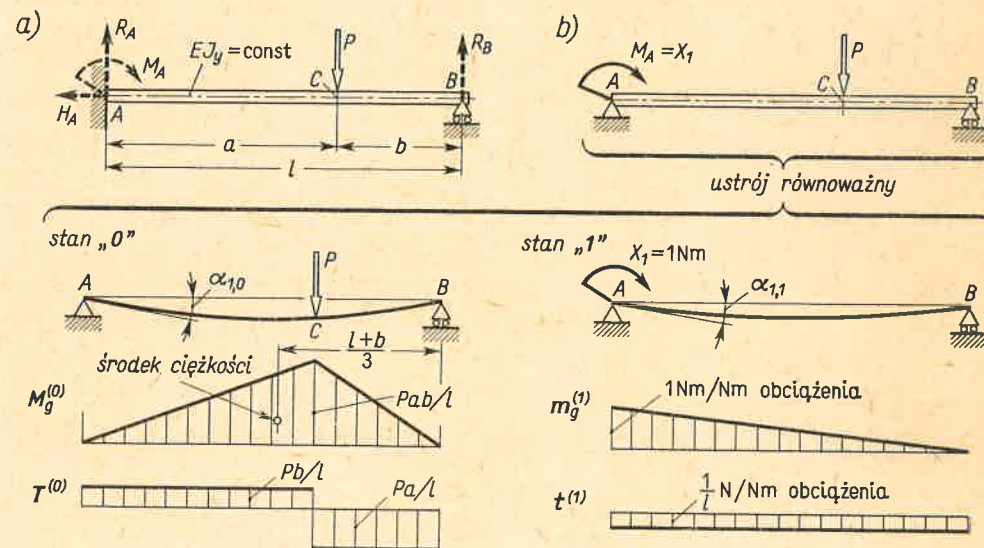
Dla obciążeń symetrycznych operacja ta daje dwa identyczne ustroje, identycznie obciążone, wobec czego w przekrojach C' i C'' oraz F' i F'' muszą być te same siły wewnętrzne. Widać, że ten warunek jednoznaczności spełniają M'_1, M'_2, N', H' , natomiast siły T' i R' istnieć nie mogą, gdyż przeczyłoby to wspomnianej zasadzie. Dla obciążeń antysymetrycznych (rys. 10.12) mamy po obrocie identyczne ustroje *odwrotnie* obciążone, wobec czego siły wewnętrzne dla lewej połówki i obróconej prawej powinny być przeciwne. Ten warunek jednoznaczności spełniają tylko siły T'' i R'' , a M''_1, M''_2, H'' i N'' istnieć nie mogą. Wszystkie te rozważania dają się ująć w jedną regułę, a mianowicie:

w przecięciu na osi symetrii ustroju przy obciążeniu symetrycznym istnieją tylko oddziaływania symetryczne względem tej osi, a przy antysymetrycznym tylko antysymetryczne. Użyte tu słowo „oddziaływanie” wskazuje, jak podano na rysunkach, że wielkości te muszą być zgodne z III prawem Newtona.

10.3. Przykłady belek statycznie niewyznaczalnych

Zastosowanie metody sił i ogólnych reguł z art. 10.1 i 10.2 prześledzimy naprzód na prostych przypadkach belek.

Pryzmatyczna belka utwierdzona na jednym, a podparta przegubowo na drugim końcu (rys. 10.13a). Zadanie to jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne, gdyż mamy tu



Rys. 10.13. Pierwszy podstawowy przypadek belki jednoprzęsłowej

4 reakcje R_A, H_A, M_A i R_B , a tylko trzy równania równowagi. Jako wielkość statycznie niewyznaczalną obieramy $M_A = X_1$, wobec czego ustrojem podstawowym (statycznie wyznaczalnym) staje się belka na przegubowych podporach A i B , a ustrój równoważny

ma postać według rys. 10.13b. Wyjaśnienia te zamykają I i II etap rozwiązania, o których mówiono w art. 10.1.

Wartość X_1 określamy z równania (10.1)

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0, \quad (a)$$

w którym $\alpha_{1,0}$ oraz $\alpha_{1,1} X_1$ są kątami obrotu przekroju A wywołanymi odpowiednio przez siłę P i moment $X_1 \neq 1 \text{ Nm}$, a całe równanie wyraża warunek ciągłości przemieszczeń w przekroju A . Wykorzystując podane wykresy $M_g^{(0)}$ i $m_g^{(1)}$ i pomijając wpływ sił tnących mamy z wzorów (10.3) i (10.5)

$$\alpha_{1,1} = \int_0^l \frac{[m_g^{(1)}]^2 dx}{EJ_y} = \frac{1}{EJ_y} \underbrace{\left(\frac{1 \cdot l}{2}\right)}_{\text{pole } m_g^{(1)}} \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{rzędna } m_g^{(1)}} = \frac{l}{3EJ_y} \left(\frac{\text{rad}}{\text{Nm}}\right), \quad (b)$$

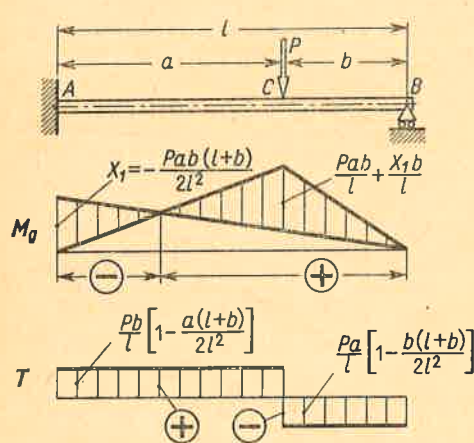
$$\alpha_{1,0} = \int_0^l \frac{M_g^{(0)} m_g^{(1)} dx}{EJ_y} = \frac{1}{EJ_y} \underbrace{\left(\frac{Pab}{l} \frac{l}{2}\right)}_{\text{pole } M_g^{(0)}} \underbrace{\left(\frac{l+b}{3l}\right)}_{\text{rzędna } m_g^{(1)}} = \frac{Pab(l+b)}{6lEJ_y} \text{ (rad)}, \quad (c)$$

przy czym do całkowania wykorzystano wzór (9.3). Wstawiając wyniki (b) i (c) do (a) mamy

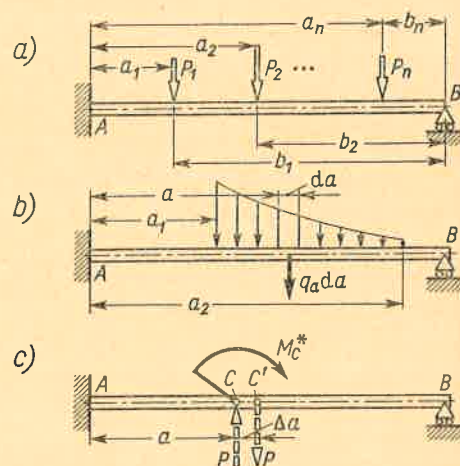
$$X_1 = - \frac{Pab(l+b)}{2l^2} \text{ (Nm)}, \quad (10.6)$$

przy czym $X_1 < 0$ oznacza, iż rzeczywisty zwrot $M_A = X_1$ jest przeciwny niż na rys. 10.14. Wypadkowy wykres M_g (rys. 10.14) otrzymujemy superponując wykres $M_g^{(0)}$ i zwiększony X_1 razy wykres $m_g^{(1)}$, czyli $m_g^{(1)} X_1$, którego rzędne są tu odwrócone (rys. 5.19). W postaci analitycznej

$$M_g = M_g^{(0)} + m_g^{(1)} X_1. \quad (d)$$



Rys. 10.14. Wynik rozwiązania belki z rys. 10.13



Rys. 10.15. Uogólnienie wyniku podstawowego na obciążenia złożone

Podobnie określamy rzędne wykresu siły tnącej T

$$T = T^{(0)} + t^{(1)} X_1. \quad (e)$$

Gdy na belkę działa szereg sił P_1, \dots, P_n (rys. 10.15a), wówczas, zgodnie z zasadą superpozycji, wypadkowy moment $M_A = X_1$ jest algebraiczną sumą wyrażeń (10.6) obliczonych dla każdej siły oddzielnie, czyli

$$X_1 = -(1/2l^2) \sum_1^n P_i a_i b_i (l + b_i). \quad (f)$$

Podobnie przy obciążeniu ciągłym (rys. 10.15b) wybranej elementarnej sile $q_a da$ odpowiada elementarny moment

$$dX_1 = -(q_a da) ab(l+b)/2l^2 = -q_a a(l-a)(2l-a) da/2l^2,$$

a całkowity moment $M_A = X_1$ jest znowu ich sumą, czyli

$$X_1 = - \int_{a_1}^{a_2} \frac{q_a a(l-a)(2l-a) da}{2l^2}, \quad (g)$$

przy czym a jest tu zmienną niezależną, od której zależy również samo obciążenie ciągłe q_a .

Aby wykorzystać wzór (10.6) przy obciążeniu belki momentem M_C^* (rys. 10.15c), zastępujemy go parą sił P o bardzo małym ramieniu $\Delta a = M_C^*/P$. Lewej, skierowanej do góry, siły P odpowiada moment $-X_1$, natomiast siły prawej przesuniętej o Δa odpowiada moment X_1'

$$X_1' = X_1 + (dX_1/da) \Delta a = X_1 - [P(2l^2 - 6la + 3a^2) \Delta a/2l^2].$$

Przy łącznym działaniu pary sił wypadkowy moment $(X_1)_M = X_1' - X_1$, a ponieważ $P \Delta a = M_C^*$, zatem ostatecznie

$$(X_1)_M = \frac{dX_1}{da} = - \frac{M_C^* (2l^2 - 6la + 3a^2)}{2l^2}. \quad (h)$$

Tak więc działanie każdego złożonego obciążenia sprowadza się do superpozycji podstawowego przypadku z rys. 10.13.

Pryzmatyczna belka utwierdzona na końcach (rys. 10.16a). Ponieważ koniec B ma swobodę przesunięć wzdłużnych, zadanie jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalne (pięć niewiadomych reakcji R_A, R_B, H_A, M_A i M_B a tylko trzy równania równowagi). Obierając za ustrój podstawowy belkę na przegubowych podporach A i B , desygnujemy tym momenty $M_A = X_1$ i $M_B = X_2$ jako statycznie niewyznaczalne, a ustrój (rys. 10.16b) jako równoważny.

Niewiadome X_1 i X_2 określamy z kanonicznego układu równań (10.2), który ma obecnie postać

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,0} &= 0, \\ \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

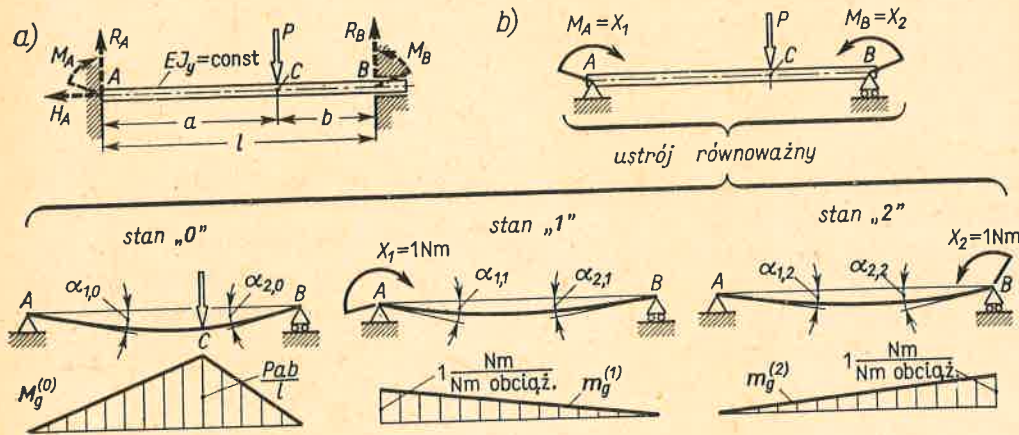
i wyraża ciągłość przemieszczeń w przekrojach A i B , a mianowicie, że całkowite kąty

ugięcia są w tych punktach równe zero. Wykorzystując wzory (10.3) i (10.5) mamy tym razem

$$\alpha_{1,1} = \int_0^l \frac{[m_g^{(1)}]^2 dx}{EJ_y} = \frac{l}{3EJ_y}, \quad \alpha_{1,2} = \int_0^l \frac{m_g^{(1)} m_g^{(2)} dx}{EJ_y} = \frac{l}{6EJ_y},$$

$$\alpha_{2,2} = \int_0^l \frac{[m_g^{(2)}]^2 dx}{EJ_y} = \frac{l}{3EJ_y}, \quad \alpha_{1,0} = \int_0^l \frac{M_g^{(0)} m_g^{(1)} dx}{EJ_y} = \frac{Pab(l+b)}{6lEJ_y},$$

$$\alpha_{2,0} = \int_0^l \frac{M_g^{(0)} m_g^{(2)} dx}{EJ_y} = \frac{Pab(l+a)}{6lEJ_y},$$



Rys. 10.16. Drugi przypadek podstawowy belki jednoprzęsłowej

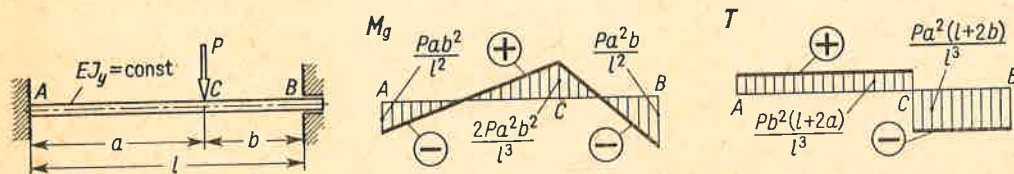
przy czym pominięto znowu wpływ sił tnących. Wstawiając powyższe wyrażenia do równań (i) mamy po uproszczeniach

$$2X_1 + X_2 + [Pab(l+b)/l^2] = 0,$$

$$X_1 + 2X_2 + [Pab(l+a)/l^2] = 0,$$

a po ich rozwiązaniu wartości X_1 i X_2 :

$$X_1 = -\frac{Pab^2}{l^2}, \quad X_2 = -\frac{Pa^2b}{l^2}. \quad (10.7)$$



Rys. 10.17. Wynik rozwiązania belki z rys. 10.16

Ujemne wartości X_1 i X_2 oznaczają, iż rzeczywiste zwroty momentów $M_A = X_1$ i $M_B = X_2$ są przeciwne niż na rys. 10.16b. Wypadkowe wykresy M_g i T (rys. 10.17) obliczone z superpozycji jak w zadaniu poprzednim mają rzędne

$$M_g = M_g^{(0)} + m_g^{(1)} X_1 + m_g^{(2)} X_2, \quad T = T^{(0)} + t^{(1)} X_1 + t^{(2)} X_2, \quad (j)$$

gdzie $T^{(0)}, t^{(1)}, t^{(2)}$ nie pokazane na rys. 10.16 rzędne wykresów sił tnących w stanie „0”, „1” i „2”. Tak jak poprzednio, wzory (10.7) oraz (j) można uogólnić na przypadki obciążenia złożonego i otrzymać wyniki podobne do wzorów (f)÷(h).

Zadania

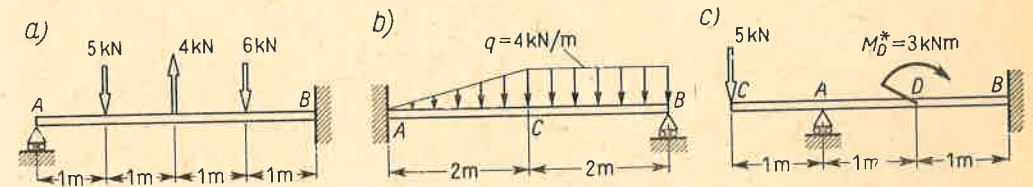
1. Znaleźć niebezpieczny przekrój w belce (rys. 10.14).

Odp. Gdy $b > l(\sqrt{2}-1)$, niebezpieczny jest przekrój A, bo $|M_A| > |M_C|$; gdy $b < l(\sqrt{2}-1)$, niebezpieczny jest przekrój C.

2. Znaleźć ekstremum momentu $M_A = X_1$ w belce (rys. 10.14), gdy siła P przesuwa się od punktu A do punktu B.

Odp. $(X_1)_{\text{ekstr}} = -Pl/3\sqrt{3} \approx -0,192Pl$, gdy $b = l/\sqrt{3}$.

3. Dla belek (rys. 10.18) wyznaczyć moment w utwierdzeniu.



Rys. 10.18.

Odp. a) z wzoru (f) $X_1 = M_B = -3,28 \text{ kNm}$; b) gdy $a(0; l/2)$, wówczas $q_a = 2qa/l$, gdy $a(l/2; l)$, wówczas $q_a = q = \text{const}$ i z wzoru (g) mamy $X_1 = M_A = -191ql^2/1920 \approx -6,36 \text{ kNm}$; c) belkę AB obciążają: moment M_D^* i zastępujący siłę 5 kN moment $M_A^* = 5 \text{ kNm}$; w stosunku do rys. 10.15c mamy tu $M_A^* > 0$ i $M_D^* < 0$; z wzoru (h) $M_B = X_1 = 2,13 \text{ kNm} > 0$, co odpowiada ścisnaniu górnych włókien belki.

4. Rozwiązać belkę (rys. 10.13a) przyjmując za statycznie niewyznaczalną reakcję $R_B = X_1$ (rys. 10.19).

Rozwiązanie. Po rozdzieleniu ustroju równoważnego na stan „0” i „1” formułujemy warunek ciągłości przemieszczeń

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0$$

wyrażający brak szpary między końcem B belki a podporą. Ugięcia $\alpha_{1,1}$ i $\alpha_{1,0}$ obliczone z wzorów (10.3) i (10.5) są

$$\alpha_{1,1} = \frac{l \cdot l}{2} \frac{2l}{3} \frac{1}{EJ_y} = \frac{l^3}{3EJ_y} \left(\frac{\text{m}}{\text{N}} \right), \quad \alpha_{1,0} = -\frac{Pa \cdot a}{2} \left(l - \frac{a}{3} \right) \frac{1}{EJ_y} \text{ (m)}$$

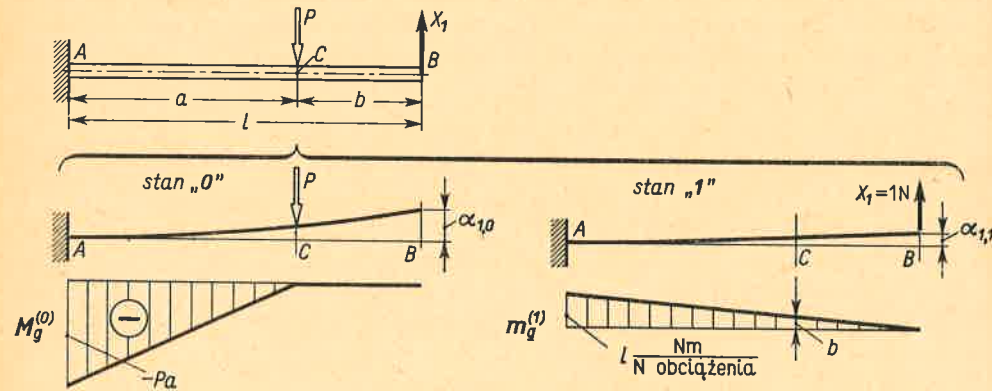
skąd wartość siły X_1

$$X_1 = \frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3}.$$

Moment gnący w przekroju A ma wartość

$$M_A = -Pa + X_1 l = -\frac{Pa(2l^2 - 3al + a^2)}{2l^2} = -\frac{Pab(l+b)}{2l^2}$$

identyczną jak podaje wzór (10.6). Niezależnie więc od przyjęcia ustroju podstawowego (statycznie wyznaczalnego) wynik końcowy (wypadkowy wysięk przekroju) jest ten sam.



Rys. 10.19. Drugi wariant rozwiązania belki z rys. 10.13

5. Jak zmieni się tok rozwiązania belki (rys. 10.13), gdy sztywność $EJ_y \neq \text{const}$. Obliczyć moment X_1 , gdy $a = b = l/2$, a EJ_y' na odcinku BC jest połową EJ_y'' na odcinku AC .

Od p. Równanie kanoniczne (a) to samo, a inne $\alpha_{1,1}$ i $\alpha_{1,0}$. Stosując we wzorach (b) i (c) skrócony sposób całkowania według wzoru (9.3) i tabl. 9.1 mamy

$$\alpha_{1,1} = \frac{a(l^2 + lb + b^2)}{3l^2 EJ_y'} + \frac{b^3}{3l^2 EJ_y''} = \frac{3l}{8 EJ_y'}, \quad \alpha_{1,0} = \frac{Pl^3}{12 EJ_y'}$$

oraz $X_1 = -2Pl/9 \approx -0,222Pl$. Wartość ta jest większa niż obliczona z (10.6) $X_1 = -0,187Pl$ dla belki pryzmatycznej.

6. Jak zmieniają się ekstremalne naprężenia w pryzmatycznej belce (rys. 5.10), gdy końce jej utwierdzimy?

Od p. Stosując superpozycję mamy z wzorów (10.7)

$$X_1 = -\left(\sum P_i a_i b_i^2\right)/l^2 = -[4 \cdot 1 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2 \cdot 2^2 + (-6) \cdot 3 \cdot 1^2]/4^2 = -2,62 \text{ kN m}$$

i podobnie $X_2 = 1,12 \text{ kN m}$. Z wykresu wypadkowego M_g wynika, że niebezpieczny jest przekrój A , w którym $M_A = X_1$. Redukcja $(M_g)_{\text{ekstr}}$ jest więc $2,62/3,0 = 0,87$ i w tym stosunku zmniejszą σ_{ekstr} .

7. Stosując zasadę superpozycji określić momenty w przekrojach A i B pryzmatycznych belek (rys. 10.20).

Od p. a. Stosując sposób jak na rys. 10.15b, mamy

$$X_1 = -\int_0^l \frac{q_0 a(l-a)^3}{l^3} da = -\frac{q_0 l^2}{20}, \quad X_2 = -\int_0^l \frac{q_0(l-a)^2 a^2}{l^3} da = -\frac{q_0 l^2}{30}$$

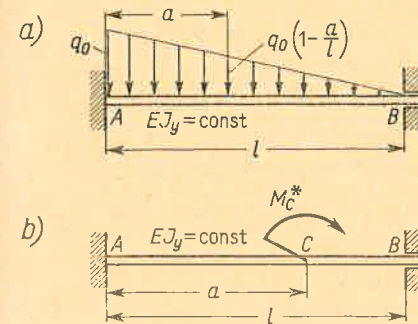
b. Stosując chwyt jak na rys. 10.15c, otrzymujemy

$$M_A = (X_1)_M = (dX_1/da) \Delta a = -M_C^* (l^2 - 4al + 3a^2)/l^2 = -M_C^* b(b-2a)/l^2,$$

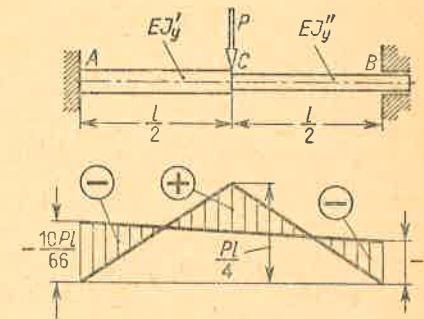
$$M_B = (X_2)_M = (dX_2/da) \Delta a = -M_C^* (2al - 3a^2)/l^2 = -M_C^* a(2b-a)/l^2.$$

8. Do którego etapu rozwiązanie belki o różnej sztywności odcinków AC i CB (rys. 10.21) pokrywa się z podanym na rys. 10.17. Przeprowadzić obliczenia, gdy $EJ_y' = 2EJ_y''$.

Od p. Równania kanoniczne (i) te same; zmieniają się wielkości α (porównaj zadanie 5). $X_1 = -10Pl/66$, $X_2 = -7Pl/66$.



Rys. 10.20.



Rys. 10.21.

9. Ktoś, rozwiązując zadanie z rys. 10.20a, zastąpił obciążenie ciągle siłą $P = q_0 l/2$ w odległości $a = l/3$ i te dane podstawił do wzorów (10.7). Czy takie postępowanie jest słuszne?

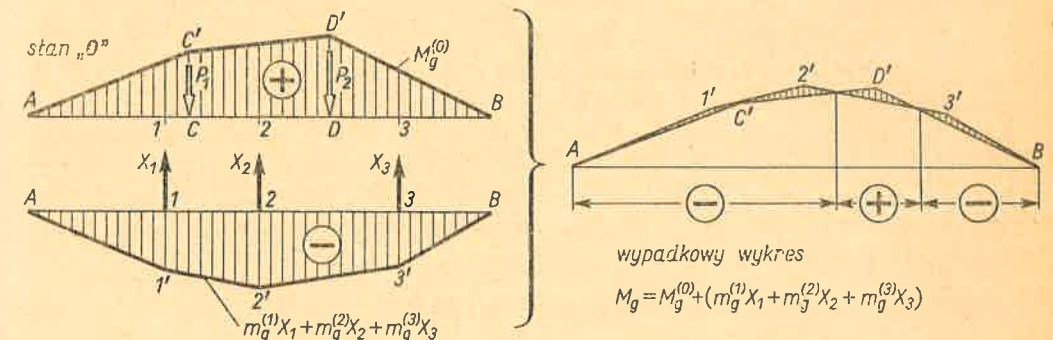
Od p. Jest błędne. Otrzymane tak wyniki $X_1 = -2q_0 l^2/27$ i $X_2 = -q_0 l^2/27$ różnią się znacznie od prawidłowych.

10. W pryzmatycznej belce (rys. 5.27), w której $a = l/8$, utwierdzono koniec A . Czy taka modyfikacja zwiększy, czy zmniejszy ekstremalne naprężenia w belce?

Od p. Zwiększy, gdyż moment $X_1 = 21Pl/128 \approx 0,164Pl$ jest większy od $Pa = Pl/8$ w wersji pierwotnej. Tak więc wprowadzenie statycznej niewyznaczalności nie zawsze oznacza redukcję naprężeń ekstremalnych.

10.4. Belki ciągle. Równania trzech momentów

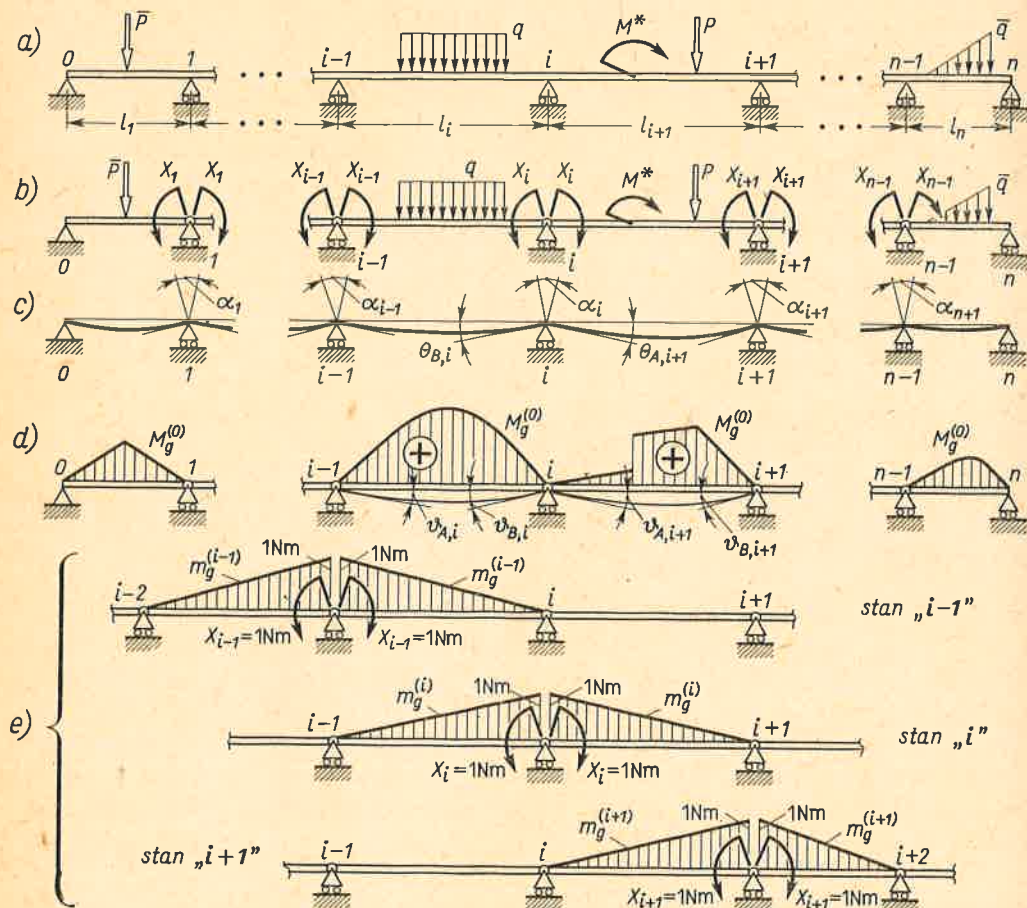
Podany w art. 10.2 sposób rozwiązania takich belek (rys. 10.9) ma w praktycznym zastosowaniu duże wady. Obliczone mianowicie z układu kanonicznego (10.2) rzeczywiste wartości X są takie, że odpowiadający im wykres momentów gnących $A1'2'3'B$ ma postać bardzo zbliżoną do wykresu $M_g^{(0)}$, tj. $AC'D'B$, o przeciwnym jednak znaku (rys. 10.22).



Rys. 10.22. Wynik rozwiązania belki ciągłej z rys. 10.9

W wyniku wypadkowy wykres M_0 jako różnica bliskich sobie wartości jest mało dokładny. Drugą wadą jest to, że każde z równań (10.2) zawiera wszystkie niewiadome X i przy dużej ich liczbie rozwiązanie układu (10.2) jest bardzo pracochłonne i kłopotliwe.

Wszystkie te trudności omijamy stosując inny schemat statyczny, a mianowicie rozcinając myślowo daną belkę ciągłą (rys. 10.23a) na dwupodporowe przęsła. W przecięciach



Rys. 10.23. Rozwiązanie belki ciągłej równaniami trzech momentów

tych ujawniają się oddziaływania sąsiadujących przekrojów pod postacią par momentów $X_1, \dots, X_{i-1}, X_i, \dots, X_{n-1}$ (rys. 10.23b), wywołujące wraz z obciążeniem zewnętrznym ugięcie każdego z przęseł (rys. 10.23c). Na skutek tego schodzące się na podporze i końce sąsiadujących przęseł l_i oraz l_{i+1} wykazują względny obrót

$$\alpha_i = \theta_{B,i} + \theta_{A,i+1}, \quad (a)$$

gdzie $\theta_{B,i}$ i $\theta_{A,i+1}$ są odpowiednio całkowitymi kątami ugięcia na prawej podporze

przęsła l_i i lewej przęsła l_{i+1} . W rzeczywistej belce ciągłej nie ma takiego obrotu względnego, czyli że

$$\alpha_i = 0, \quad (b)$$

dla każdej z $n-1$ podpór pośrednich. Zauważając, że kąt α_i jest uogólnionym przemieszczeniem dla pary momentów⁽¹⁾ X_i i stosując rozumowanie, jak w art. 10.2, możemy warunek (b) wyrazić w postaci

$$\alpha_{i,1} X_1 + \dots + \alpha_{i,i-1} X_{i-1} + \alpha_{i,i} X_i + \alpha_{i,i+1} X_{i+1} + \dots + \alpha_{i,n-1} X_{n-1} + \alpha_{i,0} = 0, \quad (c)$$

gdzie $\alpha_{i,j}$ jest kątem względnego obrotu końców na podporze i wywołanym grupą momentów $X_j = 1 \text{ Nm}$, a $\alpha_{i,0}$ takimż kątem wywołanym znanym obciążeniem zewnętrznym. Rozdzielając teraz stan równoważny z rys. 10.23b na poszczególne stany (rys. 10.23d i e) widzimy, że działanie każdego ze stanów $X_j = 1 \text{ Nm}$ obejmuje tylko dwa sąsiadujące przęsła l_j i l_{j+1} . Wynika stąd, że zgodnie z wzorem (10.3) jest

$$\alpha_{i,j} = 0, \quad \text{gdy } j \geq i-2 \text{ lub } j \leq i+2, \quad (d)$$

albowiem nie ma ani jednego przęsła, w którym $m_g^{(i)}, n^{(i)}, t^{(i)}$ oraz $m_g^{(j)}, n^{(j)}, t^{(j)}$ byłyby jednocześnie różne od zera i wtedy wartość wyrażenia (10.3) jest równa zero. Pozostaje zatem tylko współczynniki $\alpha_{i,i-1}, \alpha_{i,i}, \alpha_{i,i+1}$. Zakładając dla prostoty, że sztywność EJ , jest we wszystkich przęsłach jednakowa i stosując uproszczony sposób całkowania (9.3) mamy

$$\alpha_{i,i-1} = \frac{l_i}{6EJ_y}, \quad \alpha_{i,i} = \frac{l_i + l_{i+1}}{3EJ_y}, \quad \alpha_{i,i+1} = \frac{l_{i+1}}{6EJ_y}, \quad (e)$$

przy czym pominięto wpływ sił tnących. Z tą samą dokładnością wyraz wolny $\alpha_{i,0}$ jest według (10.5)

$$\alpha_{i,0} = \int_{l_i} \frac{M_g^{(0)} m_g^{(i)}}{EJ_y} ds + \int_{l_{i+1}} \frac{M_g^{(0)} m_g^{(i)}}{EJ_y} ds, \quad (f)$$

gdzie oznaczenia widoczne są z rysunku, a całkowanie obejmuje tylko przęsła l_i i l_{i+1} . Całki te są równe odpowiednio kątowi $\theta_{B,i}$ na prawej podporze przęsła l_i oraz $\theta_{A,i+1}$ na lewej podporze przęsła l_{i+1} wywołanym obciążeniem w stanie „0”, wobec czego zamiast (f) mamy

$$\alpha_{i,0} = \theta_{B,i} + \theta_{A,i+1}. \quad (g)$$

Wstawiając wyniki (d)-(g) do równania (c) otrzymujemy tzw. *równanie trzech momentów*

$$X_{i-1} l_i + 2X_i(l_i + l_{i+1}) + X_{i+1} l_{i+1} + 6EJ_y(\theta_{B,i} + \theta_{A,i+1}) = 0, \quad (10.8)$$

wiążące ze sobą momenty X na trzech kolejnych podporach i wyrażające ciągłość przemieszczeń (brak załomu) na podporze i . Równań takich możemy ułożyć tyle, ile jest podpór pośrednich, a więc tyle, ile jest niewiadomych X . W tym celu po wprowadzeniu oznaczeń jak na rys. 10.23a podstawiamy w (10.8) kolejno $i = 1, i = 2, \dots, i = n-1$, przy czym w równaniu pierwszym ($i = 1$) mamy $X_{i-1} = M_0 = 0$, i podobnie w ostatnim ($i = n-1$) jest $X_{i+1} = M_n = 0$. Dodatkowo kąty θ_A i θ_B mają zwroty jak na rys. 10.23d.

⁽¹⁾ Patrz zadanie 1 art. 9.4 (rys. 9.34).

Po wyznaczeniu wartości X z układu (10.8) wypadkowy wykres M_g otrzymujemy superponując wykresy $M_g^{(0)}$ oraz odpowiednio zwiększone wykresy m_g .

W maszynach i urządzeniach mechanicznych belki ciągle stosuje się stosunkowo rzadko z powodu trudności dokładnego montażu. Istnieją jednak przypadki, jak długie wały pędniowe, wałki rozrządowe silników, rurociągi, gdy ich zastosowanie pomimo tych trudności jest celowe, gdyż zmniejsza momenty gnące, a przede wszystkim zmniejsza znacznie odkształcenia ustroju (ugięcia). Ten ostatni wpływ może osiągnąć 75% i więcej od wartości w stanie „0”.

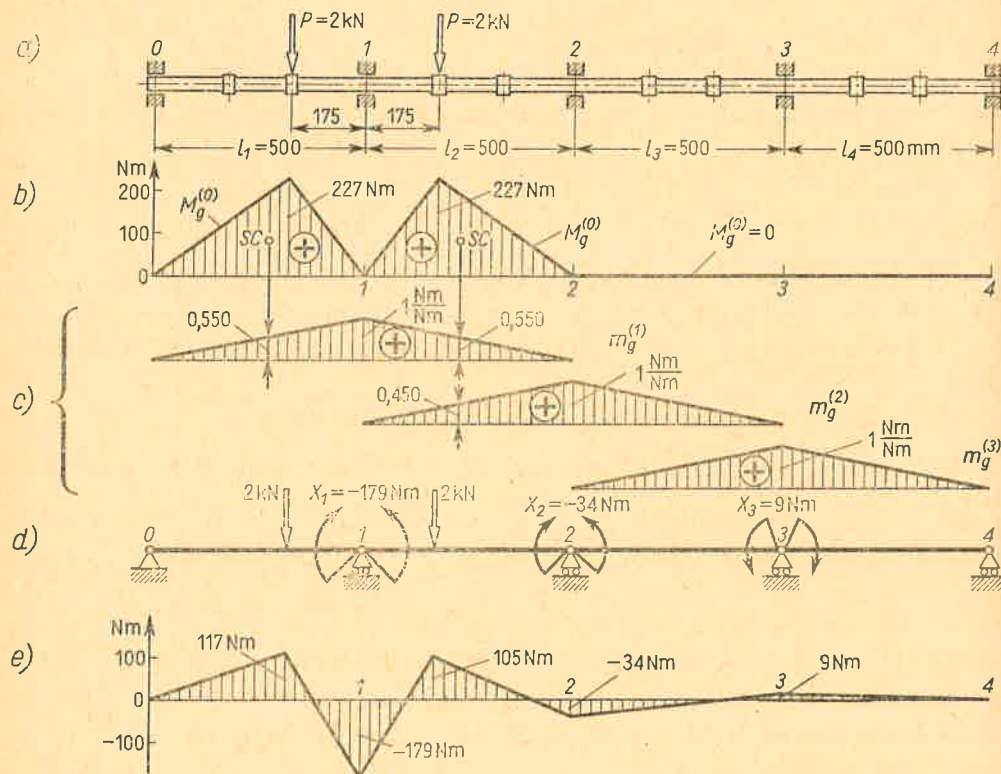
Zadania

1. Wyznaczyć wykres M_g w wałku rozrządczym (rys. 10.24a).

Rozwiązanie. Jeśli pominąć lokalne zmiany sztywności odpowiadające kulakom, to zadanie sprowadza się do rozwiązania układu (10.8) dla czteroprzęstowej belki. Traktując każde z przęseł jako belkę dwupodporową wyznaczamy $M_g^{(0)}$ (rys. 10.24b). Z kolei stosując uproszczony sposób całkowania (9.3) obliczamy z wzoru (f) wyrazy wolne:

$$\text{dla podpory 1, tj. } i = 1, \alpha_{1,0} = \left[\frac{1}{EJ_y} \cdot \frac{227l}{2} \cdot 0,55 \right] 2 = \frac{125l}{EJ_y},$$

pole $M_g^{(0)}$ rzędna $m_g^{(1)}$



Rys. 10.24. Przykład liczbowy rozwiązania belki ciągłej

$$\text{dla podpory 2, tj. } i = 2, \alpha_{2,0} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \frac{227l}{2} \cdot 0,45 = \frac{51l}{EJ_y},$$

pole $M_g^{(0)}$ rzędna $m_g^{(2)}$

$$\text{dla podpory 3, tj. } i = 3, \alpha_{3,0} = 0.$$

Ponieważ długości przęseł są te same, zatem równania (10.8) upraszczamy dzieląc je przez l i w wyniku

$$\begin{aligned} \text{dla } i = 1: & 4X_1 + X_2 + 6 \cdot 125 = 0, \\ \text{dla } i = 2: & X_1 + 4X_2 + X_3 + 6 \cdot 51 = 0, \\ \text{dla } i = 3: & X_2 + 4X_3 + 0 = 0, \end{aligned}$$

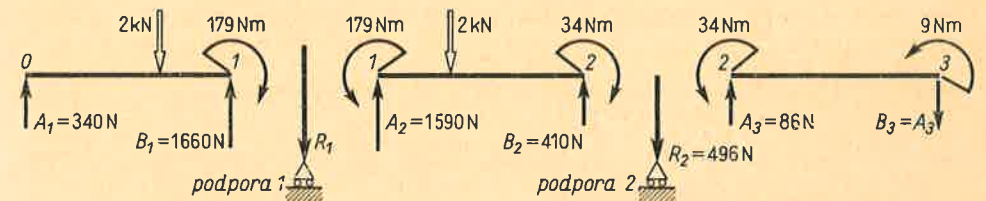
przy czym wyrazy wolne wyrażone są w N m. Stąd obliczamy

$$X_1 = -179 \text{ N m}, \quad X_2 = -34 \text{ N m}, \quad X_3 = 9 \text{ N m},$$

wobec czego ich rzeczywiste zwroty są jak na rys. 10.24d. Superponując wykres $M_g^{(0)}$ z odpowiednio powiększonymi wykresami $m_g^{(1)}$, $m_g^{(2)}$ i $m_g^{(3)}$ (rys. 10.24c) mamy ostatecznie obraz M_g (rys. 10.24e), wykazujący dość znaczną (~21%) redukcję ekstremalnego momentu w stosunku do $M_g^{(0)}$.

2. Wyznaczyć reakcję łożysk 1 i 2 wałka z zadania 1.

Rozwiązanie. Belkę rozcinamy na przęśla i biorąc wyniki z zadania 1 określamy obciążenie przęseł (rys. 10.25) oraz niezbędne do ich równowagi reakcje A_1, B_1 , na przykład

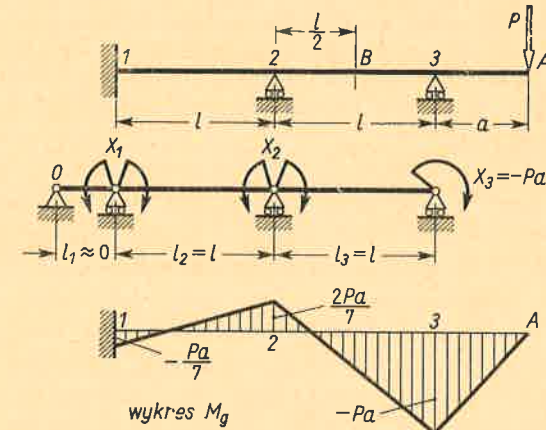


Rys. 10.25. Obliczenie reakcji belki ciągłej

$$B_1 = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,325 + 179}{0,50} = 1660 \text{ N}, \quad A_2 = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,325 + 179 - 34}{0,50} = 1590 \text{ N}.$$

Całkowitą reakcją podpory 1 jest algebraiczna suma

$$R_1 = A_2 + B_1 = 1660 + 1590 = 3,25 \text{ kN}$$



Rys. 10.26.

będąca łącznym oddziaływaniem obydwóch przęseł. Podobnie obliczamy $R_2 = 496 \text{ N} \approx 0,50 \text{ kN}$. Widać, że w belce ciągłej reakcja najbardziej obciążonego łożyska I jest *większa*, niż byłaby w stanie „0”. Jest to pewien minus belek ciągłych.

3. Wyznaczyć wykres M_x w belce ciągłej (rys. 10.26).

Rozwiązanie. Utwierdzenie przekroju I zastępujemy dodając na lewo od tego przekroju przęsło $0-I$ o $l_1 \rightarrow 0$. Działanie siły P zastępujemy w przekroju 3 momentem $X_3 = -Pa$ i siłą P przenoszącą się od razu na podporę. W ten sposób zadanie sprowadza się do poprzedniego schematu (rys. 10.23) z niewiadomymi momentami X_1, X_2 i znanym momentem $X_3 = -Pa$. Wyraży wolne $\alpha_{1,0}$ i $\alpha_{2,0}$ są tu równe zero, gdyż na przęsła nie działa żadne obciążenie poza momentami na podporach. Układ równań (10.8) przybiera postać

$$\begin{aligned} 2X_1(l_1+l_2)+X_2 l_2 &= 0, \\ X_1 l_2+2X_2(l_2+l_3)-Pa l_3 &= 0, \end{aligned}$$

a po wstawieniu $l_1 = 0, l_2 = l_3 = l$ i rozwiązaniu

$$X_1 = -Pa/7, \quad X_2 = 2Pa/7.$$

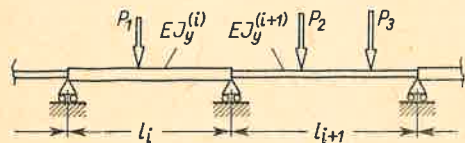
Ostateczny wykres M_x podaje rysunek.

4. Jak zmienią się wyniki zadania 1, jeśli dwukrotnie zwiększyć: a) siły P ; b) sztywność EJ_y ; c) wymiary wzdłużne?

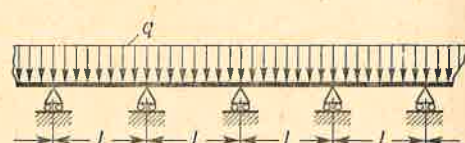
Odp. a) i c) M_x wzrośnie dwukrotnie; b) bez zmian.

5. Sformułować równanie trzech momentów, gdy sztywność belki jest różna na poszczególnych przęsłach (rys. 10.27).

$$\text{Odp. } \frac{X_{i-1} l_i}{EJ_y^{(i)}} + 2X_i \left(\frac{l_i}{EJ_y^{(i)}} + \frac{l_{i+1}}{EJ_y^{(i+1)}} \right) + \frac{X_{i+1} l_{i+1}}{EJ_y^{(i+1)}} + 6(\vartheta_{B,i} + \vartheta_{A,i+1}) = 0.$$



Rys. 10.27.



Rys. 10.28.

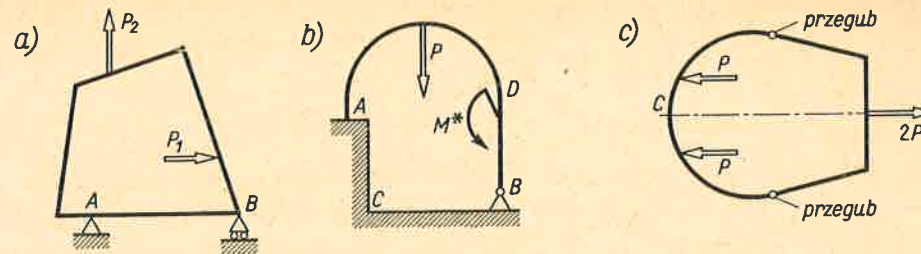
6. Rurociąg złożony z bardzo wielu jednakowych przęseł obciążony jest ciężarem własnym (rys. 10.28). Wyznaczyć momenty X na podporach odległych od obu końców rurociągu.

Rozwiązanie. Z racji dużej liczby przęseł warunki pracy na wszystkich podporach dostatecznie odległych od końców są praktycznie jednakowe, czyli $X_{i-1} = X_i = X_{i+1}$. Ponadto wiadomo (patrz zadanie 3 art. 5.8), że $\vartheta_A = \vartheta_B = ql^3/24EJ_y$. Podstawiając te dane do (10.8) mamy

$$6Xl + 6EJ_y(2ql^3/24EJ_y) = 0 \quad \text{lub} \quad X = -ql^2/12.$$

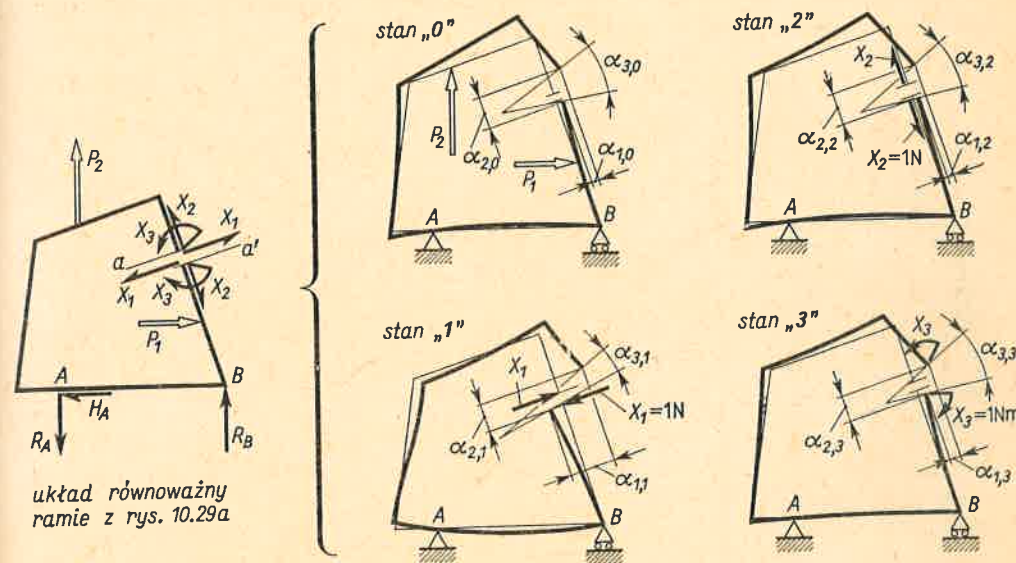
10.5. Statycznie niewyznaczalne ramy ściśle płaskie

Rozpatrzmy tu ramy tzw. *jednoobwodowe*, których pręty tworzą jeden płaski ciąg zamknięty w sobie, bądź zamknięty podłożem (rys. 10.29), przy czym główna oś bezwładności w każdym przekroju poprzecznym każdego pręta leży w płaszczyźnie ramy. Taką ramę nazywamy *ściśle płaską*. Zakładamy też, że rama jest płasko obciążona, czyli że siły zewnętrzne działają w płaszczyźnie ramy.



Rys. 10.29. Typy płaskich ram jednoobwodowych statycznie niewyznaczalnych a) bezprzegubowa; b) jednoprzegubowa, podłoże ABC zamyka obwód; c) dwuprzegubowa.

Jeśli badana rama jest *bezprzegubowa* (rys. 10.29a), to sprowadzenie jej do znanego już z art. 9.1 ustroju statycznie wyznaczalnego wymaga myślowego jej rozcięcia w jednym miejscu $a-a'$. W nowo powstałych przy tym przekrojach a i a' ujawniony zostaje ich wy-



Rys. 10.30. Rozwiązanie bezprzegubowej ramy ściśle płaskiej

siłek złożony z sił tnących X_1 , sił wzdłużnych X_2 i momentów gnących X_3 (rys. 10.30). Te składowe wysiłki przekrojów a i a' są na zasadzie działania i przeciwdziałania parami przeciwne, wobec czego nie można ich wyznaczyć z równań równowagi ramy jako całości.⁽¹⁾ Tak więc zadanie jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalne. Jego rozwiązanie jest powtórzeniem rozważań z art. 10.2. Po rozdzieleniu ustroju równowaznego na stany „0”, „1”, „2” i „3”, jak pokazuje rysunek, formułujemy równania kanoniczne (10.2), wyrażające ciągłość przesunięć w miejscu myślowego rozcięcia $a-a'$. Tak na przykład równanie

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,3} X_3 + \alpha_{1,0} = 0 \tag{a}$$

⁽¹⁾ Z równań tych wyznaczamy natomiast reakcje R_A, R_B i H_A .

oznacza brak względnego przesunięcia w kierunku działania sił X_1 . Podobnie pozostałe równania

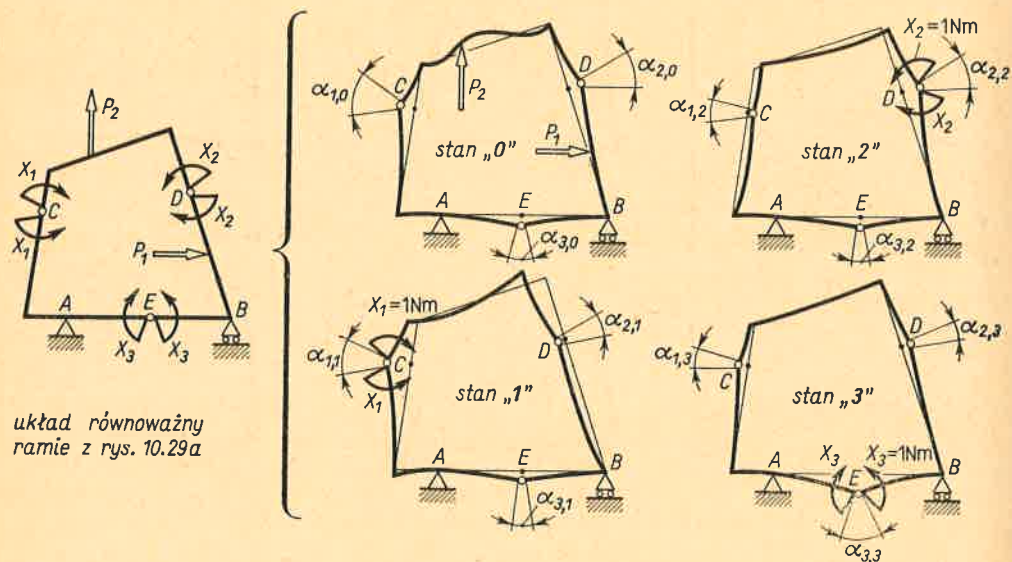
$$\left. \begin{aligned} \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,3} X_3 + \alpha_{2,0} &= 0, \\ \alpha_{3,1} X_1 + \alpha_{3,2} X_2 + \alpha_{3,3} X_3 + \alpha_{3,0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

wyrażają odpowiednio brak względnego przesunięcia w kierunku sił X_2 i względnego obrotu. Współczynniki $\alpha_{i,j}$ są nadal określone wzorami (10.3) ÷ (10.5), z tym że odpowiednie składniki dotyczą teraz prętów ramy. Po rozwiązaniu równań kanonicznych (a) i (b) obliczamy wypadkowy wysiłek w przekrojach prętów stosując zasadę superpozycji, otrzymując

$$M_g = M_g^{(0)} + \sum_1^3 m_g^{(i)} X_i, \quad N = N^{(0)} + \sum_1^3 n^{(i)} X_i, \quad T = T^{(0)} + \sum_1^3 t^{(i)} X_i, \quad (c)$$

gdzie oznaczenia są jak we wzorach (10.3) i (10.5).

Powyższy obiór ustroju równoważnego nie jest jedyny. Jeśli mianowicie zamiast rozcięcia $a-a'$ wprowadzimy w tejże ramie trzy myślowe przeguby C, D i E (rys. 10.31),



Rys. 10.31. Drugi wariant rozwiązania bezprzegubowej ramy płaskiej

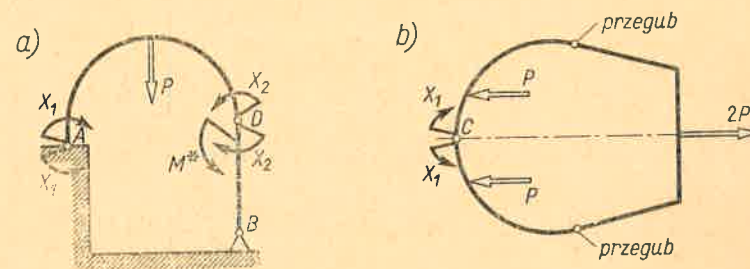
to otrzymujemy znany już z art. 9.1 ustrój statycznie wyznaczalny z nie znanymi na razie grupami momentów X przedstawiających oddziaływanie prętów schodzących się w danym przegubie. Wartości X_1, X_2 i X_3 obliczamy z tego samego co powyżej układu równań (a) i (b), mających jednak inny sens fizyczny. Tak na przykład $\alpha_{1,0}$ jest teraz kątem względnego obrotu (załomem) prętów w myślowym przegubie C i w stanie „0”. Podobnie $\alpha_{1,1} X_1, \alpha_{1,2} X_2, \alpha_{1,3} X_3$ są takimiż kątami odpowiadającymi wielokrotnościom stanów „1”, „2” i „3”. W wyniku superpozycji równanie (a) wyraża teraz brak względnego obrotu

(załomu) w myślowym przegubie C . Podobny sens w odniesieniu do myślowych przegubów D i E mają równania (b).

Jak wykazują przeliczenia, ten drugi sposób obioru układu równoważnego jest na ogół bardziej racjonalny niż pierwszy, gdyż korekta składników $M_g^{(0)}, N^{(0)}$ i $T^{(0)}$ stanu „0” we wzorze (c) przez czony $m_g^{(i)} X_i, \dots$ jest z reguły mniejsza przy sposobie drugim niż przy pierwszym. Ponadto sposób II ma tę zaletę, że wszystkie $\alpha_{i,j}$ oraz $\alpha_{i,0}$ są wymiarowo odpowiednio jednorodne. Z drugiej strony sposób I jest pojęciowo prostszy i prostsze jest na ogół obliczenie wyrazów α . Z tych powodów stosowanie sposobu II zaleca się dopiero po nabyciu pewnej wprawy w rozwiązywaniu takich zadań.

Podobnie rozwiążemy ramy jedno- i dwuprzegubowe (rys. 10.29). Jeśli stosujemy przy tym drugi sposób obioru układu równoważnego, to liczba myślowych przegubów, a więc i grup momentów X jest odpowiednio mniejsza. I tak dla ramy jednoprzegubowej (rys. 10.29b) wprowadzamy przeguby A i D (rys. 10.32a), a nie znane X_1 i X_2 określamy z równań

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,0} &= 0, \\ \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (d)$$



Rys. 10.32. Obiór układu równoważnego dla ram jedno- i dwuprzegubowych

warunkujących brak załomu w tych myślowych przegubach. Jest przy tym rzeczą jasną, że odpada tu trzecie równanie dla rzeczywiście istniejącego przegubu B , w którym taki względny obrót pręta jest dozwolony.

Podobnie dla ramy dwuprzegubowej (rys. 10.29c) zależność

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0$$

warunkuje brak załomu w jednym myślowym przegubie C (rys. 10.32b), podczas gdy w istniejących przegubach załomy takie są dozwolone.

Bardzo często ramy płaskie mają jedną lub więcej osi symetrii. W takich przypadkach rozwiązanie upraszcza się przez wykorzystanie zasady jednoznaczności omówionej w art. 10.2.

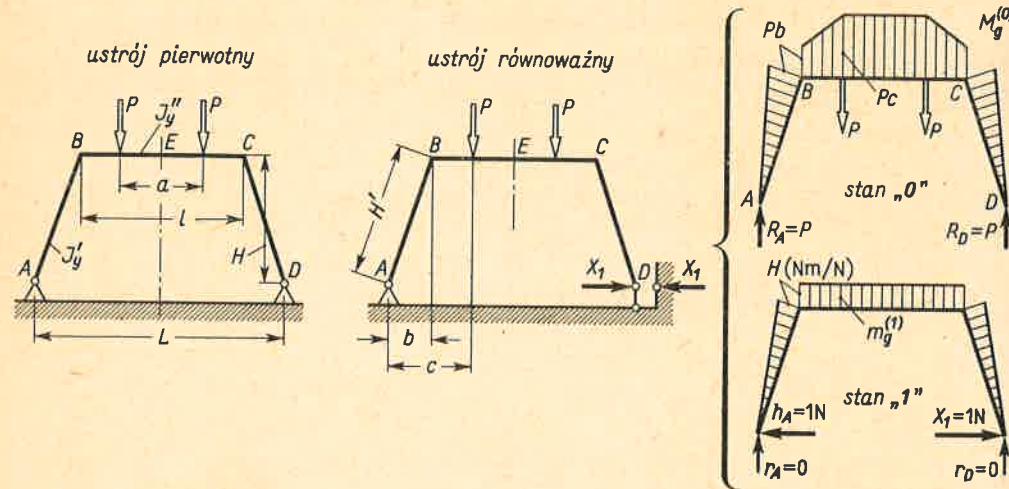
Zadania

1. Obliczyć przebieg wysiłku przekrojów w ramie (rys. 10.33). Dane: $L = 3$ m, $l = 2$ m, $a = 1$ m, $H = 1,5$ m, $J'_y = J''_y$, $P = 10$ kN.

Rozwiązanie. Ponieważ rama ma dwa przeguby, jest ona jednokrotnie statycznie niewyznaczalna. Jako niewiadomą X_1 bierzemy poziomą składową reakcji podpory D . Równanie kanoniczne

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0$$

oznacza brak poziomego przesunięcia punktu D względem podłoża. Po rozdzieleniu obciążenia ustroju równoważnego na stan „0” i „1”, określeniu $M_g^{(0)}$ i $m_g^{(1)}$ wyznaczamy $\alpha_{1,1}$ i $\alpha_{1,0}$



Rys. 10.33. Rozwiązanie ramy jednokrotnie statycznie niewyznaczalnej

$$\alpha_{1,1} = \int \frac{[m_g^{(1)}]^2 ds}{EJ_y} = 2 \frac{HH'}{2} \frac{2H}{3EJ_y'} + \frac{Hl \cdot H}{EJ_y''} \left(\frac{m}{N} \right);$$

pręty AB i CD pręt BC

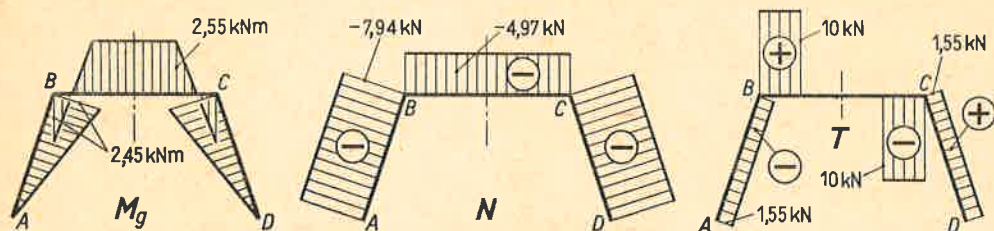
$$\alpha_{1,0} = \int \frac{M_g^{(0)} m_g^{(1)} ds}{EJ_y} = 2 \frac{PbH'}{2} \frac{2H}{3EJ_y'} + \left[Pca + \frac{P(b+c)(l-a)}{2} \right] \frac{H}{EJ_y''}$$

pręty AB i CD pręt BC

przy czym wykorzystano regułę (9.3) uproszczonego całkowania i wprowadzono oznaczenia b, c, H' widoczne z rysunku. Rozwiązanie równania kanonicznego daje

$$X_1 = - \frac{Pl}{4H} \frac{[(2L/l) - 1 - (a/l)^2] + (8bH'/3l^2) (J_y'/J_y)}{1 + (2H'/3l) (J_y'/J_y)} \quad (N)$$

Ponieważ $X_1 < 0$, rzeczywiste zwroty sił X_1 są przeciwne niż na rysunku. Zgadza się to z fizycznym odczuciem, gdyż w stanie „0” siły P zwiększają długość AD , wobec czego podpora D musi wyrzwać



Rys. 10.34. Wynik rozwiązania ramy z rys. 10.33

nacisk w kierunku od D do A . Z danych liczbowych określamy $X_1 = -0,497P = 4,97$ kN, a następnie superponujemy wykresy stanów „0” i „1” (rys. 10.34). Tak na przykład momenty gnące w narożu B i punkcie E są

$$(M_g)_B = Pb + X_1 H = 10 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m} - 4,97 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} = -2,45 \text{ kNm},$$

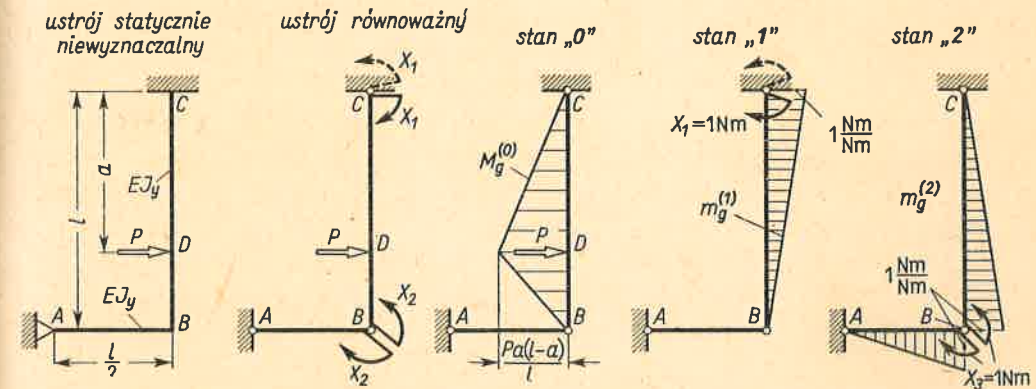
$$(M_g)_E = Pc + X_1 H = 10 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} - 4,97 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} = 2,55 \text{ kNm}.$$

Gdyby podpora D była przesuwana (ustrój statycznie wyznaczalny), wówczas w tych miejscach momenty gnące byłyby 5 kNm i 10 kNm. Widać więc dużą korzyść, jaką daje tu statyczna niewyznaczalność.

2. Dla ramy (rys. 10.33) zbadać przypadek, gdy siły P działają w narożach B i C . Jaki sens fizyczny ma wynik?

Odp. $a = l, X_1 = -Pb/H$ niezależnie od wartości (J_y''/J_y') . Wypadkowy $M_g = 0$. Rama działa tu jak kratownica.

3. Określić momenty gnące w narożu B i przekroju C ramy (rys. 10.35). Wyznaczyć przebieg wypadkowego M_g .



Rys. 10.35. Przykład rozwiązania ramy jednoprzegubowej

Rozwiązanie. Po wprowadzeniu myślowych przegubów B i C mamy ustrój równoważny jak na rys. 10.32a z niewiadomymi grupami momentów X_1 i X_2 określonych układem równań (d). Dla obliczenia współczynników α rysujemy wykresy $M_g^{(0)}, m_g^{(1)}$ i $m_g^{(2)}$, jak podaje rysunek. Widać, że w stanie „0” i „1” na zginanie pracuje tylko pręt BC jak belka na dwóch podporach obciążona bądź siłą P , bądź momentem $X_1 = 1$ N m. W stanie „2” na zginanie pracują obydwie pręty AB i BC . Stosując regułę całkowania (9.3) mamy:

$$\alpha_{1,1} = \frac{l}{3EJ_y} \left(\frac{\text{rad}}{\text{Nm}} \right), \quad \alpha_{1,2} = \frac{l}{6EJ_y} \left(\frac{\text{rad}}{\text{Nm}} \right), \quad \alpha_{2,2} = \frac{l}{2EJ_y} \left(\frac{\text{rad}}{\text{Nm}} \right),$$

a wyrazy wolne $\alpha_{1,0}$ i $\alpha_{2,0}$ przy wykorzystaniu tabl. 9.1

$$\alpha_{1,0} = - \frac{Pa(l-a)(2l-a)}{6lEJ_y} \quad (\text{rad}), \quad \alpha_{2,0} = - \frac{Pa(l-a)(l+a)}{6lEJ_y} \quad (\text{rad}).$$

Po podstawieniu tych danych do równań (d) otrzymujemy

$$X_1 = \frac{Pa(l-a)(5l-4a)}{5l^2} \quad (\text{Nm}), \quad X_2 = \frac{3Pa^2(l-a)}{5l^2} \quad (\text{Nm}).$$

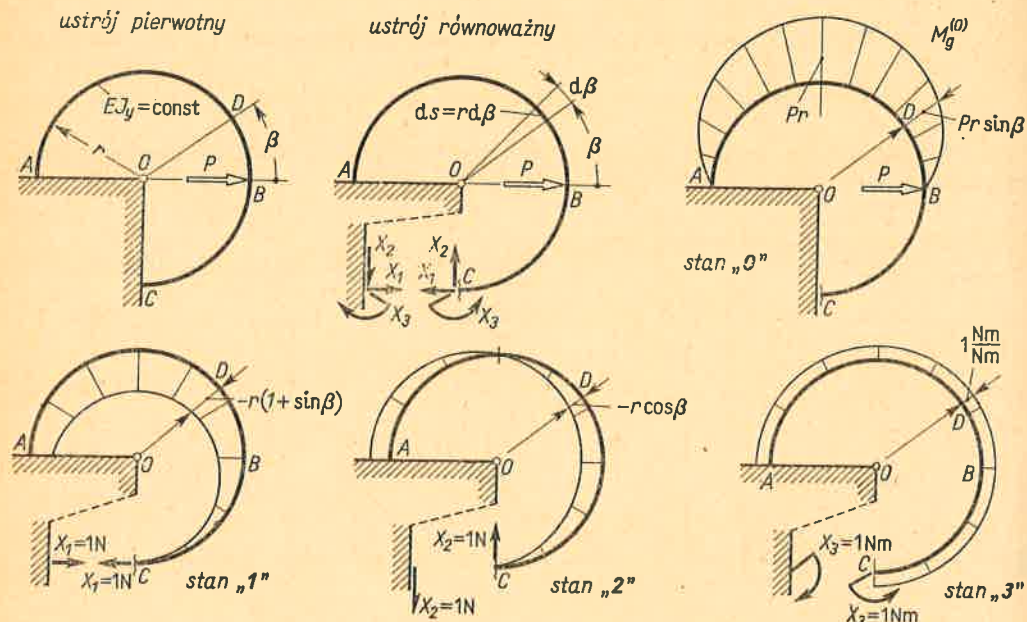
Ponieważ $X_1 > 0$ i $X_2 > 0$, zatem ich zwroty są jak na rysunku, przy czym X_1 jest momentem gnącym w przekroju C , a X_2 w narożu B . Wypadkowy wykres M_g otrzymamy superponując wykres $M_g^{(0)}$ i zwię-

kszone odpowiednio X_1 i X_2 razy wykresy $m_g^{(1)}$, $m_g^{(2)}$. Zależnie od wartości a niebezpieczny może być przekrój B, C lub D.

4. Wykorzystując wyniki zadania 3 obliczyć X_1 i X_2 , gdy obciążenie ramy (rys. 10.35) stanowią dwie siły P w odległościach $a_1 = l/3$ i $a_2 = 2l/3$.

Od p. Stosując superpozycję mamy $X_1 = 4Pl/15$, $X_2 = 2Pl/15$.

5. Wyznaczyć przebieg wysiłku przekroju w pierścieniu (rys. 10.36) o małej krzywiznie i stałej sztywności.



Rys. 10.36. Przykład rozwiązania ramy bezprzegubowej

Rozwiązanie. Po myślowym rozcięciu utwierdzenia w punkcie C i wprowadzeniu niewiadomych X_1 , X_2 i X_3 zadanie sprowadza się do rozwiązania układu równań kanonicznych (a) i (b). Przyjmując kąt $\beta (-\pi/2; \pi)$ jako zmienną niezależną, określamy moment gnący w stanie „0”,

$$M_g^{(0)} \equiv 0, \quad \text{gdy } -(\pi/2) < \beta < 0, \quad M_g^{(0)} = Pr \sin \beta, \quad \text{gdy } 0 < \beta < \pi,$$

oraz w całym zakresie $\beta (-\pi/2; \pi)$ dla stanów „1”, „2”, i „3”

$$m_g^{(1)} = -r(1 + \sin \beta) \text{ (Nm/N)}, \quad m_g^{(2)} = -r \cos \beta \text{ (Nm/N)}, \quad m_g^{(3)} = 1 \text{ (Nm/Nm)},$$

przy czym dodatni moment odpowiada ścisnaniu włókien zewnętrznych. Współczynniki α obliczamy z wzorów (10.3) i (10.4), gdyż pierścień jest słabo zakrzywiony.

$$\alpha_{1,1} = \int \frac{[m_g^{(1)}]^2 ds}{EJ_y} = \int_{-\pi/2}^{\pi} \frac{r^2(1 + \sin \beta)^2 r d\beta}{EJ_y} = \left(\frac{9\pi}{4} + 2\right) \frac{r^3}{EJ_y} \left(\frac{\text{m}}{\text{N}}\right),$$

$$\alpha_{2,2} = \int \frac{r^2 \cos^2 \beta r d\beta}{EJ_y} = \frac{3\pi r^3}{4EJ_y} \left(\frac{\text{m}}{\text{N}}\right), \quad \alpha_{3,3} = \int \frac{1^2 r d\beta}{EJ_y} = \frac{3\pi r}{2EJ_y} \left(\frac{\text{rad}}{\text{Nm}}\right),$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,1} = \frac{r^3}{2EJ_y}, \quad \alpha_{1,3} = \alpha_{3,1} = -\frac{(3\pi + 2)r^2}{2EJ_y}, \quad \alpha_{2,3} = \alpha_{3,2} = -\frac{r^2}{EJ_y}.$$

Przy obliczeniu $\alpha_{1,0} \div \alpha_{3,0}$ z wzoru (10.5) uwzględniamy, że w przedziale $\beta (0; -\pi/2)$ jest $M_g^{(0)} = 0$, wobec czego

$$\alpha_{1,0} = \int \frac{M_g^{(0)} m_g^{(1)} ds}{EJ_y} = \int_0^{\pi} \frac{Pr \sin \beta [-r(1 + \sin \beta)] r d\beta}{EJ_y} = -\frac{(4 + \pi) Pr^3}{EJ_y}$$

i podobnie $\alpha_{2,0} = 0$, $\alpha_{3,0} = 2Pr^2/EJ_y$. W rezultacie równania kanoniczne po skróceniu przez (r^2/EJ_y) są

$$\begin{aligned} [(9\pi + 8)/4] X_1 r + (1/2) X_2 r - [(3\pi + 2)/2] X_3 - [(4 + \pi)/2] Pr &= 0, \\ (1/2) X_1 r + (3\pi/4) X_2 r - X_3 + 0 &= 0, \\ -[(3\pi + 2)/2] X_1 r - X_2 r + (3\pi/2) X_3 + 2Pr &= 0, \end{aligned}$$

skąd po rozwiązaniu mamy

$$X_1 \approx 0,528P, \quad X_2 \approx -0,023P, \quad X_3 \approx 0,210Pr.$$

Wypadkowe momenty gnące otrzymujemy z wzoru (c)

$$M_g = M_g^{(0)} + m_g^{(1)} X_1 + m_g^{(2)} X_2 + m_g^{(3)} X_3,$$

w którym wstawiamy znalezione X_i oraz dane z rys. 10.36

$$M_g \approx (-0,318 - 0,528 \sin \beta + 0,023 \cos \beta) Pr, \quad \text{gdy } \beta (-\pi/2; 0),$$

$$M_g \approx (-0,318 + 0,472 \sin \beta + 0,023 \cos \beta) Pr, \quad \text{gdy } \beta (0; \pi).$$

Podobnie obliczamy siłę wzdłużną N i tnącą T

$$N = -X_1 \sin \beta - X_2 \cos \beta = (-0,528 \sin \beta + 0,023 \cos \beta) P, \quad \text{gdy } \beta (-\pi/2; 0),$$

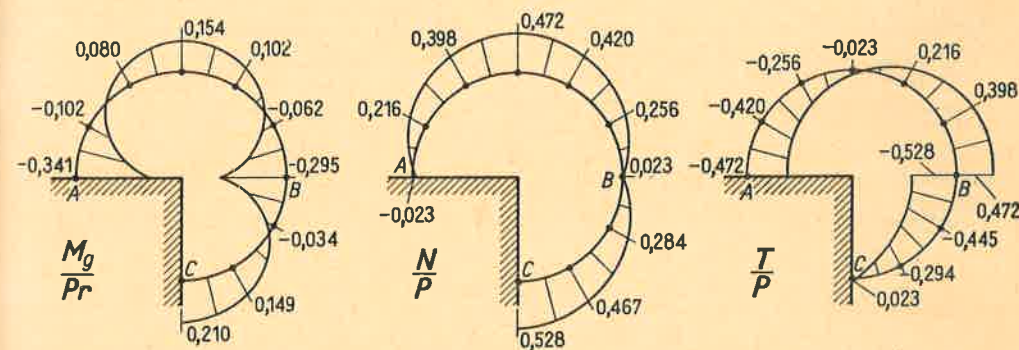
$$N = -X_1 \sin \beta - X_2 \cos \beta + P \sin \beta = (0,472 \sin \beta + 0,023 \cos \beta) P, \quad \text{gdy } \beta (0; \pi),$$

$$T = -X_1 \cos \beta + X_2 \sin \beta = (-0,528 \cos \beta - 0,023 \sin \beta) P, \quad \text{gdy } \beta (-\pi/2; 0),$$

$$T = -X_1 \cos \beta + X_2 \sin \beta + P \cos \beta = (0,472 \cos \beta - 0,023 \sin \beta) P, \quad \text{gdy } \beta (0; \pi).$$

Obliczone stąd wykresy M_g , N i T podaje rys. 10.37.

6. Sprawdzić, czy pominięte w zadaniu 5 miana oraz fizyczny sens wielkości $\alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{3,2}$ oraz $\alpha_{1,0}$ są prawidłowe.



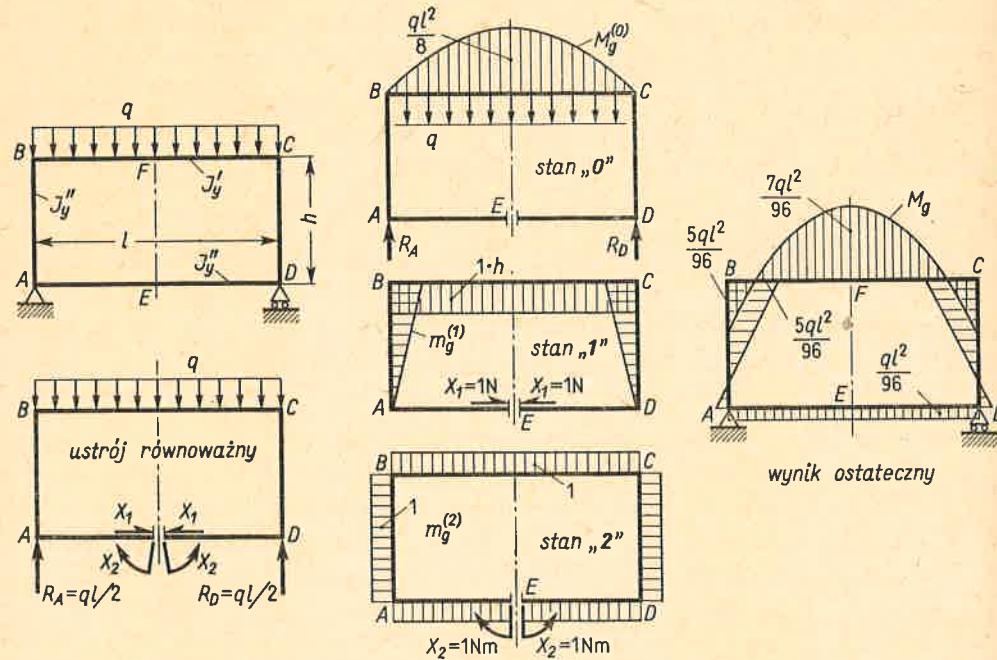
Rys. 10.37. Wynik rozwiązania ramy z rys. 10.36

Dane liczbowe określone są dla kąta $\beta = -90^\circ, -60^\circ, \dots, 180^\circ$.

Od p. $\alpha_{1,0}$ (m), $\alpha_{2,0}$ (m), $\alpha_{3,0}$ (rad) oznaczają odpowiednio przesunięcie poziome i pionowe oraz obrót przekroju C względem podłoża. Wielkości $\alpha_{1,2}$ (m/N) = $\alpha_{2,1}$ (m/N) – przesunięcia w metrach na niuton odpowiedniego obciążenia. Wielkości $\alpha_{1,3}$ (m/N m) i $\alpha_{2,3}$ (m/N m) – przesunięcia poziome i pionowe przekroju C wywołane przez $X_3 = 1$ N m. Wreszcie $\alpha_{3,1}$ (1/N) i $\alpha_{3,2}$ (1/N) – kąty obrotu przekroju C wywołane przez $X_1 = 1$ N lub $X_2 = 1$ N. Pozorna zgodność mian $\alpha_{1,3}$ i $\alpha_{3,1}$ oraz

$\alpha_{2,3}$ i $\alpha_{3,2}$ nie oznaczają ich tożsamości fizycznej, podobnie jak ze zgodności mian momentu siły (Nm) i pracy (Nm) nie wynika fizyczna tożsamość tych wielkości.

7. Znajdź wykres momentu gnącego w symetrycznej ramie symetrycznie obciążonej (rys. 10.38). Przyjmij $J'_y = 2J''_y$, $h = l/2$.



Rys. 10.38. Rozwiązanie symetrycznej ramy symetrycznie obciążonej

Rozwiązanie. Z zasady jednoznaczności (art. 10.2) wynika, że w myślowym przecięciu E na osi symetrii istnieje tylko siła wzdłużna X_1 i moment gnący X_2 , określone z równań

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,0} &= 0, \\ \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,0} &= 0. \end{aligned}$$

Z uwagi na symetrię wykresów $M_g^{(0)}$, $m_g^{(1)}$ i $m_g^{(2)}$ obliczamy wielkości α tylko dla połowy ustroju. W wyniku mamy

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} &= \frac{h \cdot h}{2} \frac{2h}{3} \frac{1}{EJ''_y} + \frac{hl}{2} \frac{h}{EJ''_y} = \frac{h^2 l}{2EJ''_y} \left(1 + \frac{2h}{3l} \frac{J''_y}{J'_y} \right) \left(\frac{m}{N} \right), \\ \alpha_{1,2} &= \frac{h \cdot h}{2} (-1) \frac{1}{EJ''_y} + \frac{hl}{2} (-1) \frac{1}{EJ''_y} = -\frac{hl}{2EJ''_y} \left(1 + \frac{h}{l} \frac{J''_y}{J'_y} \right) \left(\frac{m}{Nm} \right) \end{aligned}$$

i podobnie

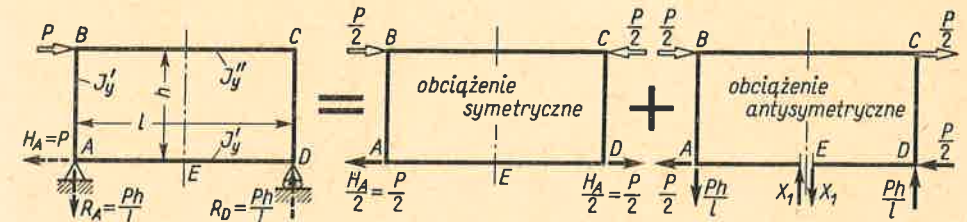
$$\alpha_{2,2} = \frac{l}{EJ''_y} \left(1 + \frac{h}{l} \frac{J''_y}{J'_y} \right), \quad \alpha_{1,0} = -\frac{ql^3 h}{24EJ''_y}, \quad \alpha_{2,0} = \frac{ql^3}{24EJ''_y}.$$

Rozwiązanie równań kanonicznych daje

$$X_1 = \frac{ql^2}{12h} \frac{1}{1+\zeta}, \quad X_2 = \frac{ql^2}{12} \frac{\zeta}{(1+\zeta)(1+3\zeta)},$$

gdzie $\zeta = (h/3l)(J''_y/J'_y)$ – bezwymiarowy parametr. Dla wartości $J'_y = 2J''_y$ i $h = l/2$ mamy: $X_1 = ql^2/16h$, $X_2 = ql^2/96$. Superponując teraz wykresy $M_g^{(0)}$ i $m_g^{(1)} X_1$ oraz $m_g^{(2)} X_2$ widzimy, że niebezpieczny jest przekrój w środku pręta BC, gdzie $(M_g)_{\text{ekstr}} = 7ql^3/96$. Wartość ta stanowi $7/12 \approx 0,58$ ekstremalnej wartości $M_g^{(0)}$ w ramie statycznie wyznaczalnej.

8. Pomijając wpływ sił N i T na odkształcenia określ przebieg M_g w ramie obciążonej poziomą siłą P (rys. 10.39).



Rys. 10.39. Podział obciążenia symetrycznej ramy

Rozwiązanie. Aby uprościć tok obliczeń, rozkładamy naprzód obciążenie na część symetryczną i antysymetryczną. Obciążenie symetryczne przy pominięciu odkształceń od sił wzdłużnych wywołuje tylko rozciąganie pręta AD siłą $N = P/2$ i także ścisnienie pręta BC. Przy antysymetrii obciążenia w przekroju E istnieją według zasady jednoznaczności tylko siły tnące X_1 . Ich wartości wyznaczamy z równania

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0,$$

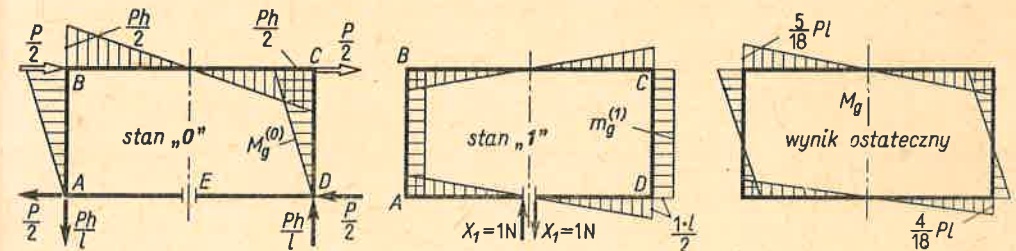
w którym obliczone z wykresów (rys. 10.40) wielkości

$$\alpha_{1,1} = \frac{l^3}{24EJ''_y} \left(1 + \frac{J''_y}{J'_y} + \frac{6h}{l} \frac{J''_y}{J'_y} \right), \quad \alpha_{1,0} = -\frac{Phl^2}{24EJ''_y} \left(1 + \frac{3h}{l} \frac{J''_y}{J'_y} \right).$$

Ostatecznie, przy oznaczeniu $\zeta_1 = (h/l)(J''_y/J'_y)$, mamy

$$X_1 = \frac{Ph}{l} \frac{1+3\zeta_1}{1+6\zeta_1+(J''_y/J'_y)}.$$

Biorąc, jak w zadaniu 7, $J''_y = 2J'_y$ i $h/l = 0,5$ otrzymujemy $X_1 = 4Ph/9l$, a przebieg M_g jak na rys. 10.40.

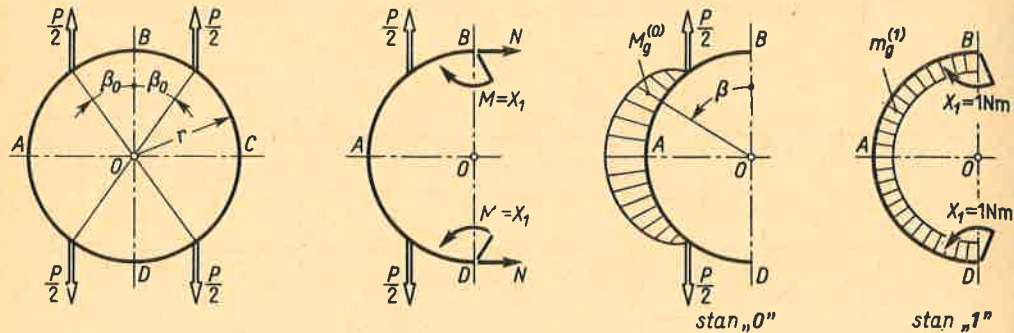


Rys. 10.40. Rozwiązanie ramy z rys. 10.39 obciążonej antysymetrycznie

Podane rozwiązanie ilustruje dobitnie uproszczenie, jakie daje zastosowanie zasady jednoznaczności. Zamiast bowiem układu trzech równań kanonicznych, odpowiadających przecięciu ramy w dowolnym miejscu, np. w narożu C, mamy tu tylko jedno równanie, gdyż pozostałe niewiadome (siła wzdłużna i moment przekroju E) są równe zero.

9. Wyznaczyć przebieg M_θ w pierścieniu o małej krzywiznie i stałej sztywności (rys. 10.41). Z badać przypadek $\beta_0 = 0$.

Rozwiązanie. Fakt, że i ustrój, i obciążenie mają podwójną symetrię (osie AC i BD), wykorzystamy prowadząc *podwójne* przecięcie wzdłuż jednej z osi, np. BD . Z racji symetrii pionowej w prze-



Rys. 10.41. Rozwiązanie ramy z podwójną symetrią obciążenia

krojach B i D istnieją tylko siły wzdłużne i momenty gnące (zasada jednoznaczności). Z racji symetrii poziomej są one odpowiednio równe. Z warunku równowagi rzutów na oś AO dla lewej połowki pierścienia mamy $N = 0$. Nieznany moment $M = X_1$ określamy z równania

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0.$$

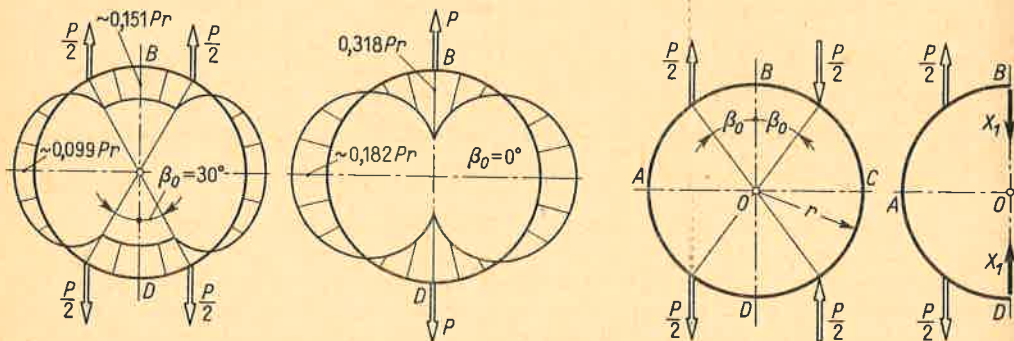
Wielkości α obliczamy jak dla prętów prostych (mała krzywizna), pomijając przy tym wpływ sił wzdłużnych i tnących. Ponieważ $m_g^{(1)} = 1 \text{ N m/N m} = \text{const}$, a $M_g^{(0)} = 0$ dla $\beta (0, \beta_0)$ oraz $M_g^{(0)} = Pr (\sin \beta - \sin \beta_0)/2$ dla $\beta (\beta_0; \pi/2)$, zatem

$$\alpha_{1,1} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^2 r d\beta}{EJ_y} = \frac{2\pi r}{EJ_y}, \quad \alpha_{1,0} = 4 \int_{\beta_0}^{\pi/2} \frac{Pr (\sin \beta - \sin \beta_0) (-1) r d\beta}{2EJ_y} = -\frac{2Pr^2}{EJ_y} \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \sin \beta_0 \right]$$

i w rezultacie

$$X_1 = \frac{Pr}{\pi} \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \sin \beta_0 \right] (\text{Nm}).$$

Gdy $\beta_0 = 0$, wówczas pierścień obciążają siły P przyłożone w punktach B i D , a wtedy $X_1 = Pr/\pi \approx 0,318Pr$. Przebieg momentu gnącego, gdy $\beta_0 = 30^\circ$ i $\beta = 0^\circ$, podaje rys. 10.42.



Rys. 10.42. Wykresy M_θ dla pierścienia z rys. 10.41

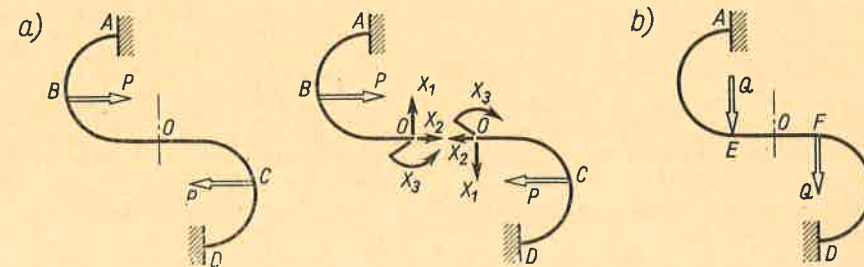
Rys. 10.43. Do zadania 10

10. Rozwiązać zadanie 9 przy obciążeniu jak na rys. 10.43.

Odp. W przekrojach B i D działają tylko siły tnące X_1 symetryczne względem AC . Wartość $X_1 = (P/2) [1 - (2\beta_0/\pi) - (\sin 2\beta_0/\pi)]$.

11. Stosując zasadę jednoznaczności, orzec, jakie składowe wysiłki istnieją w przekroju O ustroju punktowo symetrycznego przy obciążeniu *punktowo symetrycznym* (rys. 10.44a).

Rozwiązanie. Po myślowym rozcięciu z ujawnieniem wszystkich możliwych składowych wysiłku, tj. X_1, X_2, X_3 , obróćmy część OCD do nakrycia się z OBA . Otrzymujemy te same części, tak samo obciążone, a więc dla każdej części wysiłek przekroju O musi być ten sam. Warunek ten spełniają X_1 i X_2 i tylko one mogą istnieć. Zadanie jest więc dwukrotnie statycznie niewyznaczalne.



Rys. 10.44. Analiza ustroju punktowo symetrycznego

12. Powtórzyć zadanie 11 przy punktowo antysymetrycznym obciążeniu ustroju (rys. 10.44b).

Odp. Tylko $X_3 \neq 0$ i ustrój jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.

13. Podać najprostszy sposób rozwiązania ustroju (rys. 10.45) o wielokrotnej symetrii budowy i obciążenia.

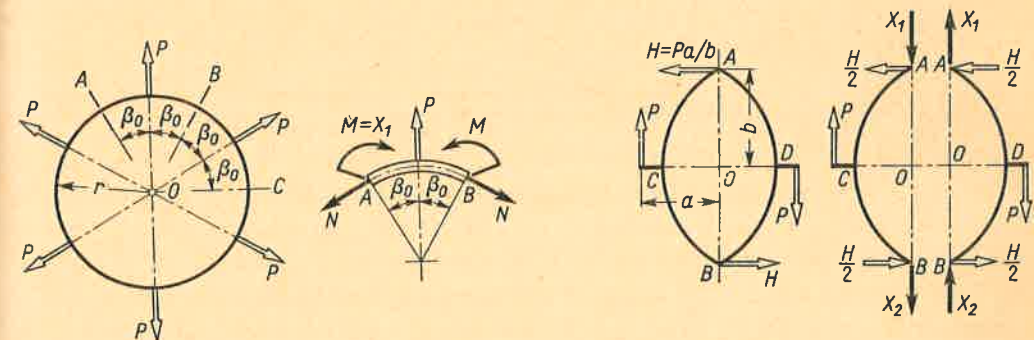
Rozwiązanie. Rozdzielmy ustrój na powtarzające się jednakowe części AB, BC, \dots . Każda z nich jest symetryczna i symetrycznie obciążona, wobec czego w równoprawnych przekrojach A, B, C, \dots istnieją tylko siła wzdłużna N i moment M . Z równowagi jednego z takich elementów, np. AB , wynika, że $N = P/2 \sin \beta_0$ i jedyną niewiadomą jest moment $M = X_1$. Jego wartość określamy z równania kanonicznego

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0,$$

w którym $\alpha_{1,1} = 2\beta_0 r/EJ_y$, $\alpha_{1,0} = -Pr^2 (\beta_0 - \sin \beta_0)/EJ_y \sin \beta_0$, i w rezultacie

$$X_1 = \frac{Pr}{2} \left(\frac{1}{\sin \beta_0} - \frac{1}{\beta_0} \right).$$

14. Bez użycia równań kanonicznych rozwiązać ramę (rys. 10.46).



Rys. 10.45. Wielokrotna symetria ustroju i obciążenia

Rys. 10.46. Dwukrotna symetria ustroju i antysymetria obciążenia

Rozwiązanie. Każdą z sił H dzielimy na połówki, między którymi prowadzimy myślowe przecięcie AOB , otrzymując dwie identyczne części ACB i ADB przeciwnie obciążone. Z racji symetrii ustroju i antysymetrii obciążenia w przekrojach A i B są tylko siły X_1 i X_2 , nie ma zaś sił równoległych do COD i momentów gnących. Po obrocie (w płaszczyźnie rysunku) części ADB do nakrycia się z ACB mamy identyczność obciążenia, skąd $X_1 = X_2$, a z warunku równowagi każdej z części $X_1 = X_2 = P/2$.

15. Sformułować wzory dla współczynników $\alpha_{i,j}$ i wyrazów $\alpha_{i,0}$ równań kanonicznych, gdy pręty ustroju są silnie zakrzywione.

Rozwiązanie. Wykorzystując wzór (9.10) i rys. 9.32 mamy

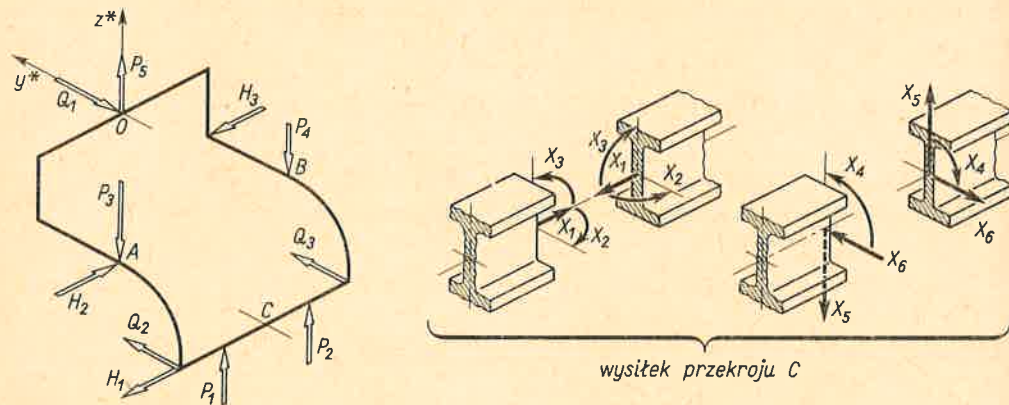
$$\alpha_{i,j} = \int \frac{m_g^{(i)} m_g^{(j)} ds}{EJ_y} + \int \frac{(m_g^{(i)} n^{(j)} + m_g^{(j)} n^{(i)}) e ds}{EJ_z} + \int \frac{n^{(i)} n^{(j)} ds}{EA} + \psi \int \frac{t^{(i)} t^{(j)} ds}{GA} \quad (10.9)$$

$$\alpha_{i,0} = \int \frac{M_g^{(0)} m_g^{(i)} ds}{EJ_y} + \int \frac{(M_g^{(0)} n^{(i)} + N^{(0)} m_g^{(i)}) e ds}{EJ_z} + \int \frac{N^{(0)} n^{(i)} ds}{EA} + \psi \int \frac{T^{(0)} t^{(i)} ds}{GA} \quad (10.10)$$

gdzie $m_g^{(i)}, \dots, m_g^{(j)}, \dots, M_g^{(0)}, \dots$ składowe wysiłku przekroju odpowiednio w stanie „i”, gdy $X_1 = 1$, w stanie „j”, gdy $X_j = 1$, i w stanie „0”. Ponadto ds – długość elementu osi pręta, a $e \approx J_y/Ar$ – odległość między warstwą obojętną a osią pręta (wzór 6.22).

10.6. Ramy przestrzenne i płaskie obciążone przestrzennie

Rozważmy jednoobwodową przestrzenną ramę obciążoną będącym w równowadze układem sił P, H, Q (rys. 10.47). Rama taka jest na ogół ustrojem sześciokrotnie statycznie niewyznaczalnym, gdyż sprowadzenie jej do znanego już z art. 9.2 ustroju statycznie wy-

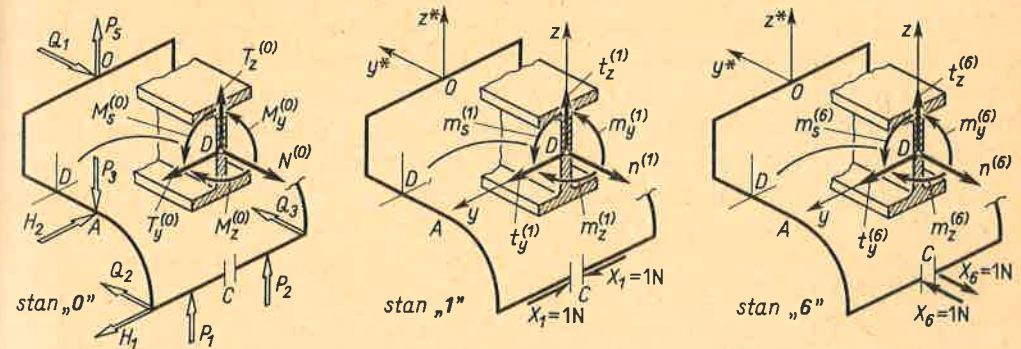


Rys. 10.47. Analiza przestrzennej ramy jednoobwodowej

znaczalnego wymaga myślowego przecięcia jej na przykład w przekroju C . Ujawnione przy tym składowe wysiłku w postaci sił wzdłużnych X_1 , momentów gnących X_2 i X_3 , momentów skręcających X_4 i sił tnących X_5 i X_6 nie mogą być określone z warunków równowagi ramy jako całości, gdyż są one parami przeciwne. Wielkości te wyznaczamy z układu sześciu równań kanonicznych

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,3} X_3 + \alpha_{1,4} X_4 + \alpha_{1,5} X_5 + \alpha_{1,6} X_6 + \alpha_{1,0} &= 0, \\ \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,3} X_3 + \alpha_{2,4} X_4 + \alpha_{2,5} X_5 + \alpha_{2,6} X_6 + \alpha_{2,0} &= 0, \\ \alpha_{3,1} X_1 + \alpha_{3,2} X_2 + \alpha_{3,3} X_3 + \alpha_{3,4} X_4 + \alpha_{3,5} X_5 + \alpha_{3,6} X_6 + \alpha_{3,0} &= 0, \\ \alpha_{4,1} X_1 + \alpha_{4,2} X_2 + \alpha_{4,3} X_3 + \alpha_{4,4} X_4 + \alpha_{4,5} X_5 + \alpha_{4,6} X_6 + \alpha_{4,0} &= 0, \\ \alpha_{5,1} X_1 + \alpha_{5,2} X_2 + \alpha_{5,3} X_3 + \alpha_{5,4} X_4 + \alpha_{5,5} X_5 + \alpha_{5,6} X_6 + \alpha_{5,0} &= 0, \\ \alpha_{6,1} X_1 + \alpha_{6,2} X_2 + \alpha_{6,3} X_3 + \alpha_{6,4} X_4 + \alpha_{6,5} X_5 + \alpha_{6,6} X_6 + \alpha_{6,0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

wyrażających, jak zawsze, ciągłość przemieszczeń w myślowym przekroju C . Aby następnie wyznaczyć współczynniki $\alpha_{i,j}$ i wyrazy wolne $\alpha_{i,0}$, rozdzielamy stan równowagi na stany „0”, „1”, ..., „6” (rys. 10.48) i określamy w każdym z nich przebieg wysiłku przekrojów.



Rys. 10.48. Stany składowe przy rozwiązaniu ramy przestrzennej

Pamiętając, że $\alpha_{i,j}$ jest uogólnionym przesunięciem dla siły X_i , spełniającej rolę „czujnika”, a wywołanym przez $X_j = 1$ mamy z wzoru (9.8)

$$\alpha_{i,j} = \int \left(\frac{m_y^{(i)} m_y^{(j)}}{EJ_y} + \frac{m_z^{(i)} m_z^{(j)}}{EJ_z} + \frac{m_s^{(i)} m_s^{(j)}}{C} + \frac{n^{(i)} n^{(j)}}{EA} + \frac{\psi_z t_z^{(i)} t_z^{(j)}}{GA} + \frac{\psi_y t_y^{(i)} t_y^{(j)}}{GA} \right) ds \quad (10.11)$$

gdzie oznaczenia $m_y^{(i)}, \dots$ są widoczne z rys. 10.48, a inne są jak we wzorze (9.8). Podobnie określamy

$$\alpha_{i,0} = \int \left(\frac{M_y^{(0)} m_y^{(i)}}{EJ_y} + \frac{M_z^{(0)} m_z^{(i)}}{EJ_z} + \frac{M_s^{(0)} m_s^{(i)}}{C} + \frac{N^{(0)} n^{(i)}}{EA} + \frac{\psi_z T_z^{(0)} t_z^{(i)}}{GA} + \frac{\psi_y T_y^{(0)} t_y^{(i)}}{GA} \right) ds \quad (10.12)$$

jako uogólnione przesunięcie dla siły X_i wywołane obciążeniem w stanie „0”. Wszystkie przy tym uwagi podane w art. 9.4 znajdują i tu zastosowanie. W szczególności należy do nich możliwość pominięcia we wzorach (10.11) i (10.12) trzech ostatnich składników reprezentujących wpływ sił wzdłużnych i tnących⁽¹⁾ oraz możliwość stosowania wzorów (10.11) i (10.12) do prętów słabo zakrzywionych.

⁽¹⁾ O ile oczywiście momenty gnące i skręcające nie są tożsamościowo równe zeru. Przypomina się też, że związane z danym przekrojem pręta osie y i z są główne centralne.

Po rozwiązaniu układu równań (a) wypadkowy wysiłek przekroju obliczamy superponując jego składowe w stanie „0” i z odpowiednimi wielokrotnościami składowymi w stanach „1”, ..., „6”, tj.

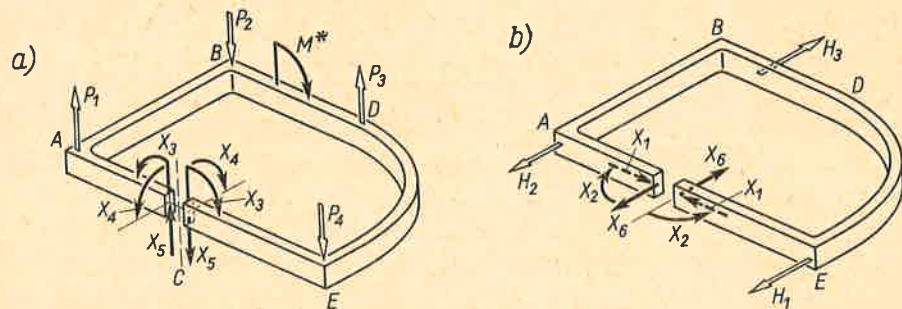
$$M_y = M_y^{(0)} + \sum_1^6 m_y^{(i)} X_i, \quad M_z = M_z^{(0)} + \sum_1^6 m_z^{(i)} X_i, \dots, \quad T_y = T_y^{(0)} + \sum_1^6 t_y^{(i)} X_i. \quad (b)$$

Powyższe ogólne rozwiązanie upraszcza się, gdy badana rama (rys. 10.47) jest symetryczna, na przykład względem płaszczyzny $y^* z^*$. Gdy przekrój C leży też w tej płaszczyźnie, wówczas grupa symetrycznych składowych wysiłku, czyli X_1, X_2 i X_3 , staje się niezależna od grupy antysymetrycznej X_4, X_5, X_6 , albowiem odpowiednie współczynniki układu (a) wyrażające sprzężenie między tymi grupami są równe zero. Dla przykładu zbadajmy współczynnik $\alpha_{1,6}$. Jest rzeczą oczywistą, że w stanie „1” (rys. 10.48) wielkości $m_y^{(1)}, m_z^{(1)}$ i $n^{(1)}$ mają przebieg symetryczny, a $t_z^{(1)}, t_y^{(1)}, m_s^{(1)}$ antysymetryczny, natomiast w stanie „6” sytuacja jest odwrotna. W rezultacie każdy elementarny składnik wzoru (10.11), np. $m_y^{(1)} m_y^{(6)} ds/EJ_y$, kasuje się z identycznym składnikiem dla symetrycznie położonego elementu i cała suma (całka) staje się równa zero, czyli $\alpha_{1,6} = 0$. W wyniku więc mamy zamiast układu (a) dwa układy równań

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,3} X_3 + \alpha_{1,0} &= 0, & \alpha_{4,4} X_4 + \alpha_{4,5} X_5 + \alpha_{4,6} X_6 + \alpha_{4,0} &= 0, \\ \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,3} X_3 + \alpha_{2,0} &= 0, & \alpha_{5,4} X_4 + \alpha_{5,5} X_5 + \alpha_{5,6} X_6 + \alpha_{5,0} &= 0, \\ \alpha_{3,2} X_1 + \alpha_{3,2} X_2 + \alpha_{3,3} X_3 + \alpha_{3,0} &= 0, & \alpha_{6,4} X_4 + \alpha_{6,5} X_5 - \alpha_{6,6} X_6 + \alpha_{6,0} &= 0, \end{aligned} \right\} (c)$$

które rozwiązujemy niezależnie. Jeśli ponadto obciążenie jest symetryczne, to podobnie udowodnimy, że wyrazy $\alpha_{4,0}, \alpha_{5,0}$ i $\alpha_{6,0}$ są równe zero, skąd wynika, że antysymetryczne składowe X_4, X_5 i X_6 są też równe zero. Podobną właściwość wykazuje obciążenie antysymetryczne, dla którego składowe X_1, X_2 i X_3 są zerami. Rozkładając zatem ogólne obciążenie ustroju symetrycznego na część symetryczną i antysymetryczną, jak na rys. 10.10, możemy każdą z nich analizować oddzielnie.

Podobne, lecz nieidentyczne, uproszczenie rozwiązania mamy, gdy przestrzennie obciążona rama jest ściśle płaska (rys. 10.49). Zauważmy bowiem, że dla grupy niewiadomych X_1, X_2 i X_6 istnieją tylko składowe wysiłku działające w płaszczyźnie ramy,



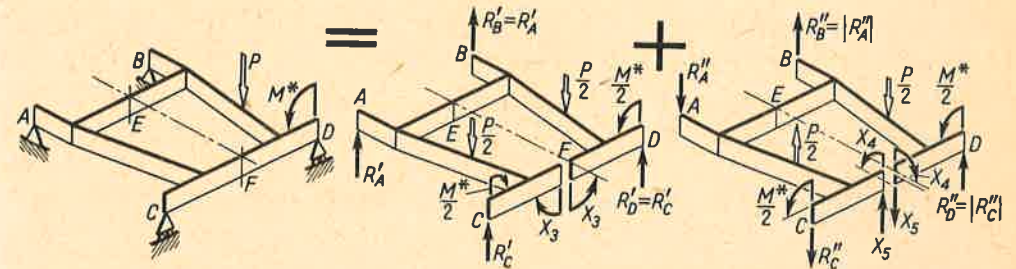
Rys. 10.49. Rozdział obciążenia i wielkości statycznie niewyznaczalnych w ramie ściśle płaskiej: a) układ przestrzenny, b) układ płaski

a pozostałe są równe zero.⁽¹⁾ Odwrotna sytuacja istnieje przy działaniu grupy X_3, X_4 i X_5 , skąd wynika, że sprzężenie tych grup jest zerowe, a układ (a) rozpada się na dwa:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{3,3} X_3 + \alpha_{3,4} X_4 + \alpha_{3,5} X_5 + \alpha_{3,0} &= 0, \\ \alpha_{4,3} X_3 + \alpha_{4,4} X_4 + \alpha_{4,5} X_5 + \alpha_{4,0} &= 0, \\ \alpha_{5,3} X_3 + \alpha_{5,4} X_4 + \alpha_{5,5} X_5 + \alpha_{5,0} &= 0, \end{aligned} \right\} (d)$$

i analogiczny dla grupy niewiadomych X_1, X_2, X_6 . Ten drugi układ, znany już z art. 10.5, odpowiada obciążeniu działającemu w płaszczyźnie ramy, tj. siłom H (rys. 10.49b), natomiast pierwszej grupie odpowiada obciążenie prostopadłe do płaszczyzny ramy (rys. 10.49a). Innymi słowy rozwiązanie ogólne ramy ściśle płaskiej jest zawsze superpozycją dwóch rozwiązań prostszych: przestrzennego i płaskiego.

Gdy przestrzennie obciążona rama ściśle płaska ma oś symetrii (EF na rys. 10.50), a myślowe przecięcie F leży na tej osi, wówczas układ (d) rozpada się z kolei na dwa.



Rys. 10.50. Rozdział obciążenia i wielkości statycznie niewyznaczalnych w symetrycznej ramie ściśle płaskiej

W pierwszym z nich dla obciążenia symetrycznego istnieje tylko jedna niewiadoma X_3 określona zależnością

$$\alpha_{3,3} X_3 + \alpha_{3,0} = 0, \quad (e)$$

podczas gdy w drugim dla obciążenia antysymetrycznego w przekroju F występują pozostałe niewiadome X_4 i X_5 . W tym drugim przypadku trzecią niewiadomą, poza X_4 i X_5 , jest reakcja R'' jednej z czterech podpór ramy, gdyż dysponujemy tu tylko jednym równaniem równowagi (momentów względem osi symetrii EF), a pozostałe warunki są spełnione tożsamościowo. Przy obciążeniu symetrycznym kwestii tej nie ma, gdyż do określenia reakcji $R'_A = R'_B$ i $R'_C = R'_D$ mamy dwa równania równowagi momentów względem osi AB i CD .

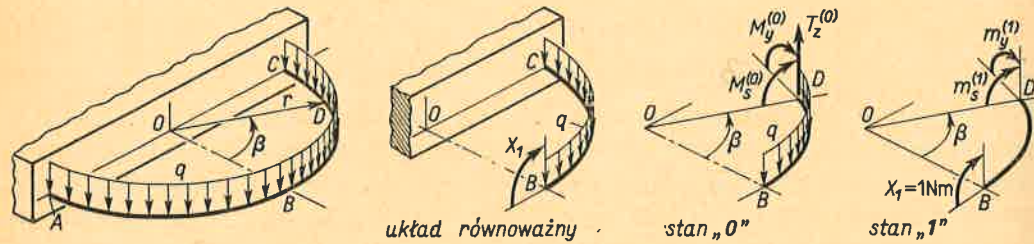
Zadania

1. Traktując półpierścień (rys. 10.51) jako pręt słabo zakrzywiony określić w nim przebieg wysiłku przekroju.

⁽¹⁾ Według rys. 10.48: $m_s \neq 0, n \neq 0, t_y \neq 0, m_y = 0, m_z = 0, t_z = 0$.

Rozwiązanie. Jeśli półpierścień przeciąć w B , to z powodu symetrii i ustroju, i obciążenia występuje tam tylko nie znany moment gnący X_1 określony z równania

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0.$$



Rys. 10.51. Ścisłe płaski półpierścień przestrzennie obciążony

Przez analogię do rys. 9.17 składowe wysiłki stanu „0” są

$$T_z^{(0)} = qr\beta, \quad M_y^{(0)} = -qr^2(1 - \cos \beta), \quad M_s^{(0)} = qr^2(\beta - \sin \beta)$$

i podobnie w stanie „1”:
 $m_y^{(1)} = \cos \beta, \quad m_s^{(1)} = -\sin \beta$, skąd

$$\alpha_{1,1} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \beta r d\beta}{EJ_y} + 2 \int_0^{\pi/2} \frac{(-\sin \beta)^2 r d\beta}{C} = \frac{\pi r}{2} \left(\frac{1}{EJ_y} + \frac{1}{C} \right),$$

$$\alpha_{1,0} = -2 \int_0^{\pi/2} \frac{qr^2(1 - \cos \beta) \cos \beta r d\beta}{EJ_y} - 2 \int_0^{\pi/2} \frac{qr^2(\beta - \sin \beta) \sin \beta r d\beta}{C} =$$

$$= -qr^3 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{1}{EJ_y} + \frac{1}{C} \right)$$

i w rezultacie $X_1 = qr^2[(4/\pi) - 1]$, a wypadkowe wartości

$$M_y = M_y^{(0)} + m_y^{(1)} X_1 = qr^2[(4 \cos \beta/\pi) - 1], \quad M_s = -qr^2[(4 \sin \beta/\pi) - \beta].$$

Ekstremalne wartości M_y i M_s występują w przekroju A lub C , gdzie

$$|M_y| = qr^2, \quad |M_s| = qr^2[-(4/\pi) + (\pi/2)] \approx 0,225qr^2.$$

2. Powtórzyć zadanie 1, gdy zamiast obciążenia q na półpierścień działa siła pionowa P przyłożona w punkcie B .

Odp. $X_1 = Pr/\pi, |M_y|_{\text{ekstr}} = Pr/2, |M_s|_{\text{ekstr}} = (Pr/2)[1 - (2/\pi)]$.

3. Rozwiązać symetryczną ramę (rys. 10.52), jeśli $a = b = l/4, c = l/3, C = EJ_y/3, EJ'_y = EJ_y/4, C' = 1,5EJ'_y, EJ''_y = C'' = 0,5EJ_y$.

Rozwiązanie. Z powodu antysymetrii obciążenia w myślowym przecięciu A występują tylko dwie niewiadome, tj. siły tnące X_1 i momenty X_2 , które wyznaczamy z równań

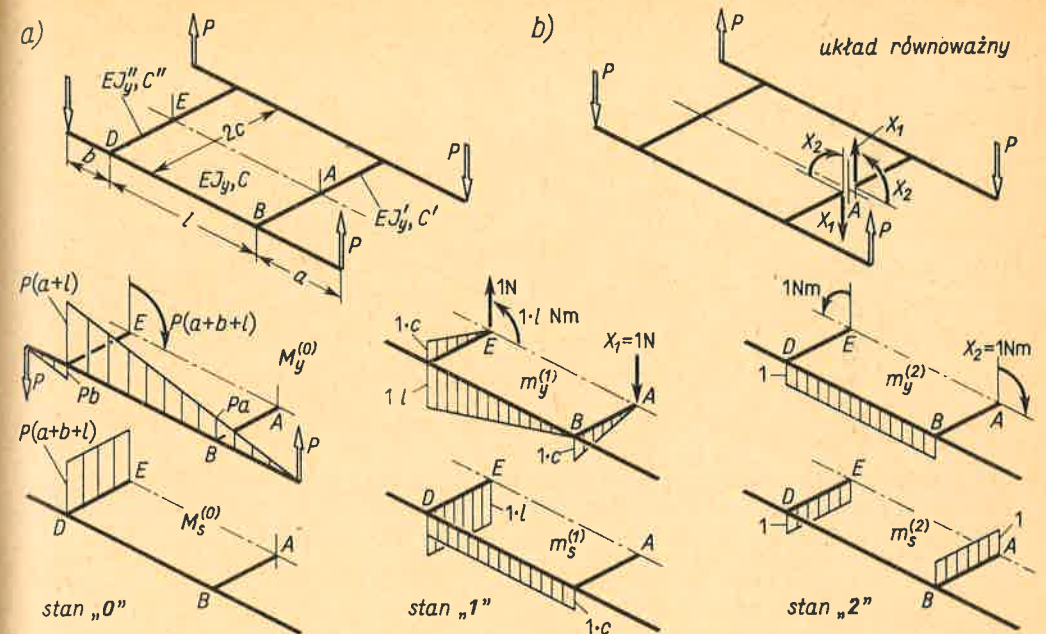
$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,0} = 0, \quad \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,0} = 0.$$

Rozdzielając układ równoważny na stany składowe „0”, „1” i „2”, jak podaje rysunek, obliczamy z (10.11) i (10.12) wielkości

$$\alpha_{1,1} = \frac{l^3}{3EJ_y} \left[1 + \left(\frac{c}{l} \right)^3 \left(\frac{J_y}{J'_y} + \frac{J_y}{J''_y} \right) \right] + \frac{cl^2}{C''} \left(1 + \frac{c}{l} \frac{C''}{C} \right), \quad \alpha_{2,2} = \frac{l}{EJ_y} + \frac{c}{C''} \left(1 + \frac{C''}{C} \right),$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{l^2}{2EJ_y} + \frac{lc}{C''}, \quad \alpha_{1,0} = -\frac{Pl^2(2l+3a)}{6EJ_y} - \frac{P(a+b+l)cl}{C''},$$

$$\alpha_{2,0} = -\frac{Pl(l+2a)}{2EJ_y} - \frac{P(l+a+b)c}{C''}.$$



Rys. 10.52. Ścisłe płaska rama przestrzennie obciążona

W obliczeniach tych uwzględniamy tylko połówkę $ABDE$ ramy, gdyż dla drugiej połówki wartości iloczynów $M_y^{(0)}, m_y^{(1)}, \dots$ są te same. Wstawiając wartości szczególne $a = b = l/4, c = l/3, \dots$, mamy

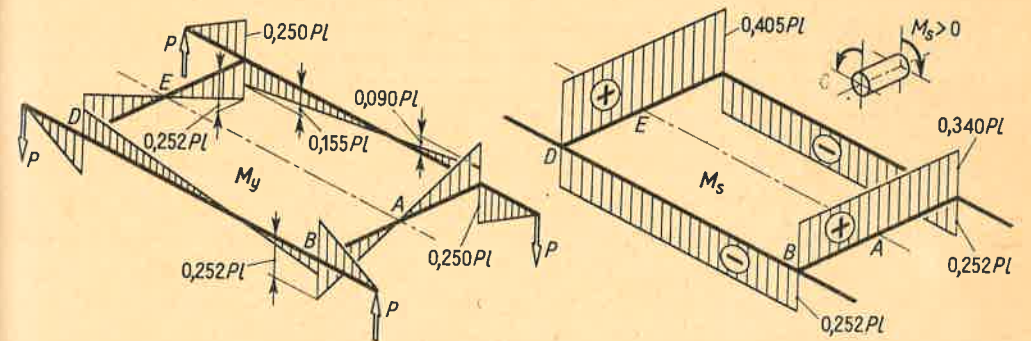
$$\alpha_{1,1} = \frac{1,407 l^3}{EJ_y}, \quad \alpha_{2,2} = \frac{2,555 l}{EJ_y}, \quad \alpha_{1,2} = \frac{1,167 l^2}{EJ_y},$$

$$\alpha_{1,0} = -\frac{1,459 Pl^3}{EJ_y}, \quad \alpha_{2,0} = -\frac{1,750 Pl^2}{EJ_y},$$

a z rozwiązania równań kanonicznych

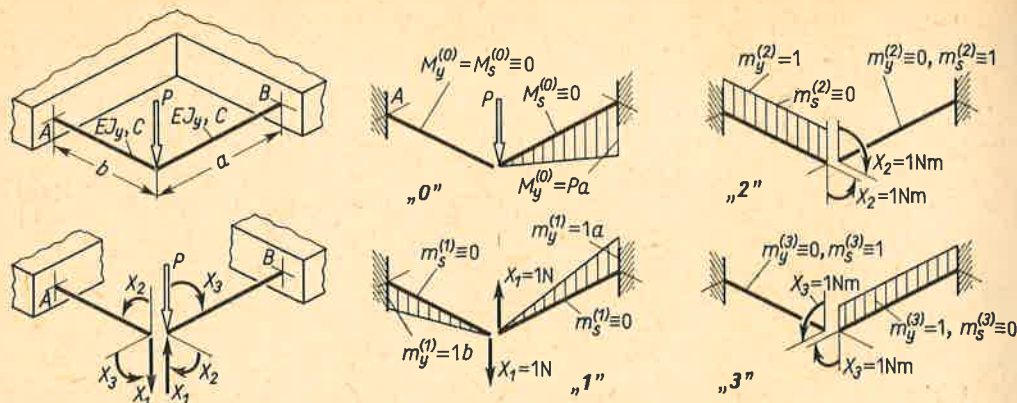
$$X_1 = 0,755P, \quad X_2 = 0,340Pl.$$

Superponując teraz wykresy składowych wysiłki stanu „0” i odpowiednio powiększone wykresy „1” i „2” mamy wynik ostateczny (rys. 10.53).



Rys. 10.53. Wynik rozwiązania dla ramy z rys. 10.52

Dane: $a = b = 0,25l, c = l/3, C = EJ_y/3, EJ'_y = EJ_y/4, C' = 1,5EJ'_y, EJ''_y = C'' = 0,5EJ_y$.



Rys. 10.54. Rozwiązanie ramy ściśle płaskiej

4. Rozwiązać ściśle płaską ramę (rys. 10.54), gdy $C = 0,7EJ_y$, $a = 0,8b$.

Rozwiązanie. Zadanie jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalne jak na rys. 10.49. Oznaczając niewiadome jak na rysunku otrzymujemy z obrazów wysiłku w poszczególnych stanach

$$\alpha_{1,1} = \frac{b^3}{3EJ_y} \left(1 + \frac{a^3}{b^3}\right), \quad \alpha_{1,2} = -\frac{b^2}{2EJ_y}, \quad \alpha_{1,3} = \frac{a^3}{2EJ_y},$$

$$\alpha_{2,2} = \frac{b}{EJ_y} + \frac{a}{C}, \quad \alpha_{2,3} = 0, \quad \alpha_{3,3} = \frac{a}{EJ_y} + \frac{b}{C},$$

$$\alpha_{1,0} = -\frac{Pa^3}{3EJ_y}, \quad \alpha_{2,0} = 0, \quad \alpha_{3,0} = -\frac{Pa^2}{2EJ_y},$$

a po wstawieniu $a = 0,8b$ i $C = 0,7EJ_y$ mamy układ równań

$$\begin{aligned} 0,504 X_1 b - 0,500 X_2 + 0,320 X_3 - 0,1707 Pb &= 0, \\ -0,500 X_1 b + 2,143 X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot Pb &= 0, \\ 0,320 X_1 b + 0 \cdot X_2 + 2,228 X_3 - 0,3200 Pb &= 0, \end{aligned}$$

z którego rozwiązania

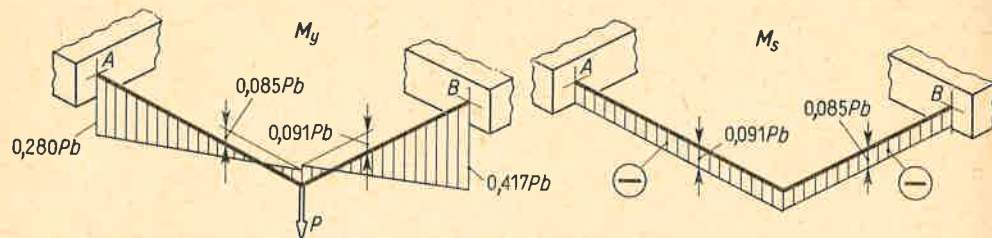
$$X_1 = 0,365 P, \quad X_2 = 0,085 Pb, \quad X_3 = 0,091 Pb.$$

Wypadkowe wykresy M_y i M_s podaje rys. 10.55, przy czym znak minus przy momencie M_s odpowiada umowie z rys. 3.5.

5. Jak zmieni się wynik zadania 4, gdy dwukrotnie zwiększymy: a) tylko wymiary a i b ; b) wszystkie wymiary?

Odp. a) i b) rzędne wykresów momentów wzrosną dwukrotnie.

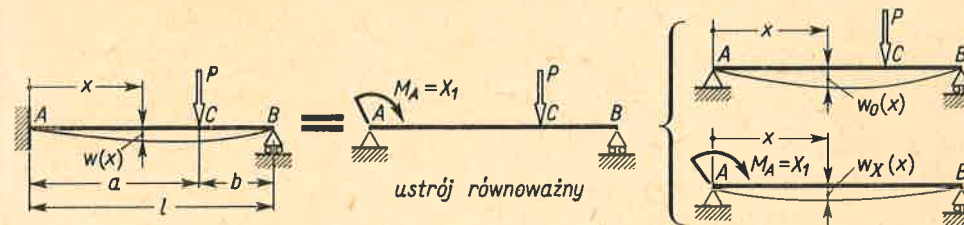
6. Jak zmieni się tok rozwiązania zadania 4, gdy rama pozostając płaska przestaje być ściśle płaska? Odp. Zadanie staje się sześciokrotnie statycznie niewyznaczalne.



Rys. 10.55. Wynik rozwiązania ramy z rys. 10.54, gdy $a = 0,8b$, $C = 0,7 EJ$,

10.7. Wyznaczanie przemieszczeń w ustrojach statycznie niewyznaczalnych

Jak pamiętamy z art. 10.1 i 10.2, wprowadzenie ustroju równoważnego zamienia badany ustrój na statycznie wyznaczalny, z tym że niektóre obciążenia X mają nie znane na razie wartości. Po rozwiązaniu równań kanonicznych obciążenia X stają się znane i ustrój niczym się już nie różni od opisanych w poprzednich rozdziałach konstrukcji statycznie wyznaczalnych. Wynika stąd, że przemieszczenia w takich ustrojach można określić znanymi już metodami. Jedną z nich jest metoda superpozycji zastosowana przykładowo do wyznaczenia linii ugięcia $w(x)$ belki (rys. 10.56). Po wprowadzeniu momentu



Rys. 10.56. Określenie przemieszczeń ustroju metodą superpozycji

$M_A = X_1$ i obliczeniu jego wartości (patrz rys. 10.13 i 10.14) określamy metodami opisanymi w art. 5.8 linię ugięcia $w_0(x)$ odpowiadającą znanemu od początku obciążeniu (siła P) i linię $w_X(x)$ odpowiadającą obciążeniu X_1 wyznaczonemu z równania kanonicznego. Szukane ugięcie jest wtedy

$$w(x) = w_0(x) + w_X(x). \tag{a}$$

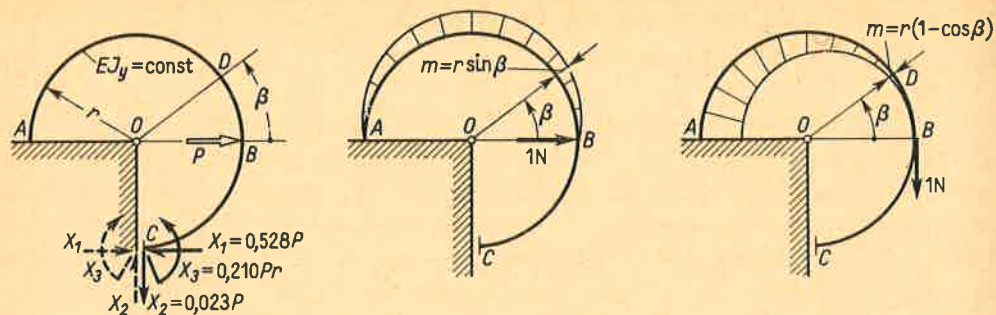
Dla przykładu⁽¹⁾ ugięcie w środku belki ($x = l/2$)

$$(w)_{x=l/2} = \frac{-Pb(3l^2 - 4b^2)}{48EJ_y} + \left[-\frac{Pb(l^2 - b^2)}{2l^2} \right] \left(\frac{-l^2}{16EJ_y} \right) = \frac{5b^2 - 3l^2}{96EJ_y} Pb$$

i gdy $b = l/2$, wówczas $w_{x=l/2} = -7Pl^3/768EJ_y$, a więc przeszło dwa razy mniej niż dla belki podpartej na podporach i obciążonej siłą pośrodku, dla której $w_{x=l/2} = w_0 = -Pl^3/48EJ_y$.

W większości przypadków zwłaszcza ustrojów bardziej złożonych wyznaczenie przemieszczeń ogranicza się do ich określenia tylko w pewnych charakterystycznych punktach ustroju i wtedy stosujemy metodę Maxwella-Mohra opisaną w art. 9.3. Dla przykładu weźmy ramę (rys. 10.36), w której chcemy określić poziome przesunięcie punktu B . Ramę tę zamieniono na ustrój statycznie wyznaczalny przez myślowe rozcięcie w przekroju C i wprowadzenie wielkości X_1, X_2, X_3 jako nie znanej części obciążenia (rys. 10.57). Poziome przesunięcie punktu B tego ustroju statycznie wyznaczalnego obliczamy przykładając w punkcie B poziomą siłę jednostkową spełniającą rolę „czujnika”. Odpowiadający

⁽¹⁾ Zadania 2 i 4 art. 5.8 oraz wzór (10.6).



Rys. 10.57. Określenie przemieszczeń z zasady prac przygotowanych

jej wysiłek istnieje tylko na łuku AB ($0 \leq \beta \leq \pi$) i ma składowe

$$m_g = r \sin \beta \text{ N m/N}, \quad n = \sin \beta \text{ N/N}, \quad t = \cos \beta \text{ N/N},$$

a szukane przesunięcie v_B jest według wzoru (9.2)

$$v_B = \int_0^\pi \frac{M_g m_g r d\beta}{EJ_y} + \int_0^\pi \frac{N n r d\beta}{EA} + \psi \int_0^\pi \frac{T t r d\beta}{GA}, \quad (b)$$

gdzie M_g , N , T składowe wysiłku odpowiadają łącznemu działaniu siły P i obciążenia X_1 , X_2 , X_3 . Fakt, że ostatnie obciążenia wyznaczono z równań kanonicznych, tj. warunków ciągłości przemieszczeń w przekroju C , ma o tyle znaczenie, że wpływa w określony sposób na przebieg M_g , N i T (rys. 10.37).

Wstawiając do wzoru (b) wartość M_g z zadania 5 art. 10.5 i pomijając wpływ sił N i T mamy ostatecznie

$$v_B = \int_0^\pi \frac{(-0,318 + 0,472 \sin \beta + 0,023 \cos \beta) Pr \cdot r \sin \beta r d\beta}{EJ_y} = 0,106 \frac{Pr^3}{EJ_y}.$$

Podobnie obliczamy pionowe przesunięcie w_B punktu B przykładając w nim jako „czujnik” pionową siłę jednostkową, dla której moment $m_g = -r(1 - \cos \beta)$. Wynik

$$w_B = \int_0^\pi \frac{M_g [-r(1 - \cos \beta)] r d\beta}{EJ_y} = -0,033 \frac{Pr^3}{EJ_y} < 0$$

wskazuje, że przesunięcie to zachodzi do góry.

Zadania

1. Wyznaczyć ugięcie w_C punktu C belki (rys. 10.16), gdy $a = b = l/2$. Ile razy jest ono mniejsze od ugięcia podobnej belki nie utwierdzonej na końcach (rys. 5.52)?

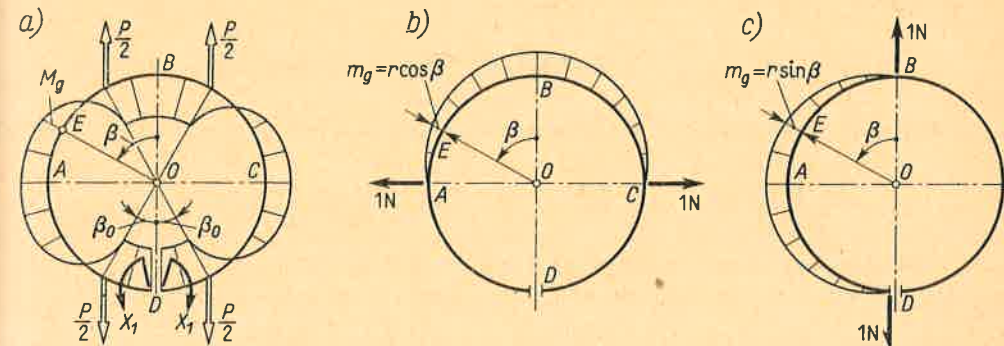
Odp. Obliczone z superpozycji $w_C = Pl^3/192EJ_y$ jest czterokrotnie mniejsze niż wartość f z wzoru (5.30).

2. Wyznaczyć ugięcie w pręśla l_2 belki ciągłej (rys. 10.24) w miejscu działania siły P , jeśli $EJ_y = 1,74 \cdot 10^5 \text{ N m}$.

Odp. $w = (Pa^2b^2/3IEJ_y) + [X_1 b (l^2 - b^2)/6IEJ_y] + [X_2 a (l^2 - a^2)/6IEJ_y]$. Wstawiając $P = 2 \text{ kN}$, $a = 0,175 \text{ m}$, $b = 0,325 \text{ m}$, $l = 0,5 \text{ m}$, $X_1 = -179 \text{ N m}$, $X_2 = -34 \text{ N m}$ otrzymujemy $w = 0,53 \times 10^{-5} \text{ m} = 5,3 \mu\text{m}$.

3. Obliczyć pionowe przesunięcie punktu F ramy (rys. 10.38) biorąc dane jak w zadaniu 7 art. 10.5.

Odp. $f = 5ql^4/768EJ_y'$, słuszne, gdy $h = l/2$, $J_y'' = 0,5J_y'$.



Rys. 10.58. Określenie przemieszczeń w pierścieniu z rys. 10.41

4. Wyznaczyć zmianę długości średnic AC i BD pierścienia (rys. 10.41). Zbadać przypadek, gdy $\beta_0 = 0$.

Rozwiązanie. Potraktujmy pierścień jako rozcięty myślowo w przekroju D (rys. 10.58). Zgodnie z wynikami zadania 9 art. 10.5 ujawniony zostaje przy tym wysiłek pod postacią momentu

$$M_D = X_1 = (Pr/2\pi) [2 - (\pi - 2\beta_0) \sin \beta_0],$$

a wypadkowy moment gnący w przekroju E łuku AB jest

$$M_g = -X_1 = \text{const}, \quad \text{gdy } \beta \in (0, \beta_0); \quad M_g = \frac{1}{2} Pr (\sin \beta - \sin \beta_0) - X_1, \quad \text{gdy } \beta \in [\beta_0, (\pi/2)],$$

przy czym $M_g > 0$ oznacza ściskanie włókien zewnętrznych.

Aby obliczyć zmianę poziomej średnicy AC , wprowadzamy w tak rozciętym statycznie wyznaczalnym pierścieniu „czujnik” pod postacią dwóch jednostkowych sił (rys. 10.58b). Odpowiadający ich działaniu moment istnieje tylko w części ABC i w przekroju E jest

$$m_g = r \cos \beta \text{ N m/N}, \quad \text{gdy } -\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2.$$

Zgodnie z wzorem (9.2) poszukiwana zmiana f_{AC} średnicy AC

$$f_{AC} = \frac{2}{EJ_y} \int_{\beta_0}^{\pi/2} (-X_1) (r \cos \beta) r d\beta + \frac{2}{EJ_y} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \left[\frac{Pr}{2} (\sin \beta - \sin \beta_0) - X_1 \right] (r \cos \beta) r d\beta,$$

przy czym wykorzystano symetrię wykresów M_g i m_g względem osi BD . Po wykonaniu całkowania, podstawieniu znanej już wartości X_1 oraz uporządkowaniu otrzymamy

$$f_{AC} = \frac{Pr^3}{2\pi EJ_y} [(\pi - 4) - \sin \beta_0 (4\beta_0 - \pi \sin \beta_0)].$$

Łatwo sprawdzić, że $f_{AC} < 0$, czyli że średnica AC ulega zmniejszeniu, co zgadza się z intuicją.

Podobnie obliczamy zmianę f_{BD} średnicy pionowej wprowadzając jako „czujnik” dwie jednostkowe siły (rys. 10.58c), przy których działaniu występuje tylko na łuku DAB moment

$$m_g = r \sin \beta \text{ N m/N}, \quad \text{gdy } 0 \leq \beta \leq \pi.$$

Wykorzystując symetrię wykresów M_g i m_g względem osi AC otrzymamy teraz

$$f_{BD} = \frac{2}{EJ_y} \int_0^{\beta_0} (-X_1) r \sin \beta r d\beta + \frac{2}{EJ_y} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{Pr}{2} (\sin \beta - \sin \beta_0) - X_1 \right] r \sin \beta r d\beta,$$

a po wykonaniu całkowania i podstawieniu X_1

$$f_{BD} = \frac{Pr^3}{4\pi EJ_y} [(\pi^2 - 8) + 4 \sin \beta_0 (\pi - 2\beta_0) - \pi (2\beta_0 + \sin 2\beta_0)].$$

W szczególnym przypadku, gdy $\beta_0 = 0$, czyli gdy pierścień obciążają dwie siły P przyłożone w punktach B i D ,

$$f_{AC} = \frac{\pi - 4}{2\pi} \frac{Pr^3}{EJ_y} \approx -0,137 \frac{Pr^3}{EJ_y}, \quad f_{BD} = \frac{\pi^2 - 8}{4\pi} \frac{Pr^3}{EJ_y} \approx 0,149 \frac{Pr^3}{EJ_y}.$$

5. Obliczyć pionowe przesunięcie punktu B półpierścienia (rys. 10.51).

Odp. Przykładając w punkcie B części BC pionową, skierowaną do dołu siłę 1 N, dla której

$$m_y = -r \sin \beta \text{ Nm/N}, \quad m_x = r(1 - \cos \beta) \text{ Nm/N},$$

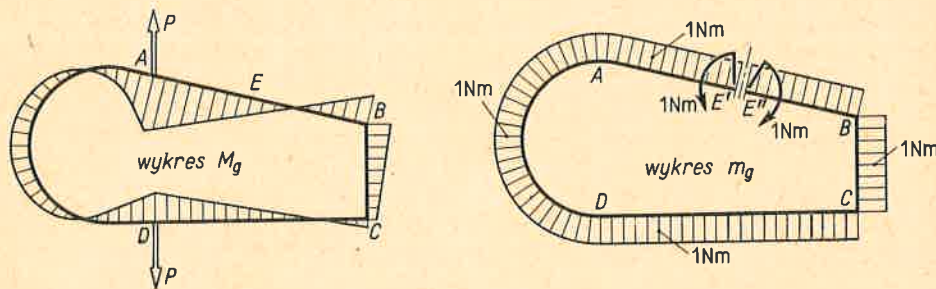
obliczamy według wzoru (9.9)

$$f_B = \frac{1}{EJ_y} \int_0^{\pi/2} qr^2 \left(\frac{4 \cos \beta}{\pi} - 1 \right) (-r \sin \beta) r d\beta + \frac{1}{C} \int_0^{\pi/2} qr^2 \left(\beta - \frac{4 \sin \beta}{\pi} \right) r(1 - \cos \beta) r d\beta,$$

gdzie $M_y = qr^2[(4 \cos \beta/\pi) - 1]$, $M_x = qr^2[\beta - (4 \sin \beta/\pi)]$ są wypadkowymi momentami z zadania 1' art. 10.6. Po scałkowaniu

$$f_B = \frac{(\pi - 2)qr^4}{\pi EJ_y} + \left(\frac{\pi^2 + 8}{8} - \frac{\pi^2 + 4}{2\pi} \right) \frac{qr^4}{C}.$$

6. Udowodnić, że w każdej jednoobwodowej bezprzegubowej ramie ściśle płaskiej o stałej sztywności i płasko obciążonej (rys. 10.59) wypadkowy moment M_g spełnia warunek $\oint M_g ds = 0$.



Rys. 10.59. Oznaczenia do zadania 6

Rozwiązanie. Przetnijmy myślowo ramę w dowolnym punkcie E i obliczmy względny obrót przekrojów E' i E'' . W tym celu, zgodnie z art. 9.4, obciążamy ramę w tych przekrojach dwoma jednostkowymi momentami, dla których $m_g = 1 = \text{const}$. Poszukiwany kąt obrotu jest według (9.2)

$$\theta = \oint \frac{M_g m_g ds}{EJ_y} = \frac{1}{EJ_y} \oint M_g \cdot 1 \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \oint M_g ds = 0,$$

gdyż w rzeczywistym ustroju obydwa przekroje E' i E'' zawsze do siebie pasują. Wynika stąd, że $\oint M_g ds = 0$, c.b.d.d.

Wynik powyższy wykorzystujemy często do wstępnej kontroli prawidłowości rozwiązania takich ustrojów.

10.8. Naprężenia montażowe i ciepłne

W ustrojach statycznie niewyznaczalnych niezależnie od naprężeń wywołanych obciążeniem mogą istnieć tzw. *naprężenia montażowe* jako skutek błędów wykonania elementów ustroju. Weźmy dla przykładu kratownicę (rys. 10.1) nieobciążoną ($P = 0$) i wykonaną ściśle według wymiarów. W takich warunkach przy myślowym przecięciu w miejscu $m-m$ pręta AD szczelina $\alpha_{1,0} = 0$, nie ma bowiem żadnej przyczyny do jej powstania. Konsekwencją tego jest, że we wszystkich prętach wypadkowe siły $N_i = 0$. Jeśli jednak przy myślowym rozcięciu usuniemy *dodatkowo* w miejscu $m-m$ odcinek pręta o długości b , to w miejscu tym powstanie szpara. Dla jej usunięcia potrzeba użyć sił X_1 określonych z równania (10.1), w którym $\alpha_{1,0} = b$, czyli

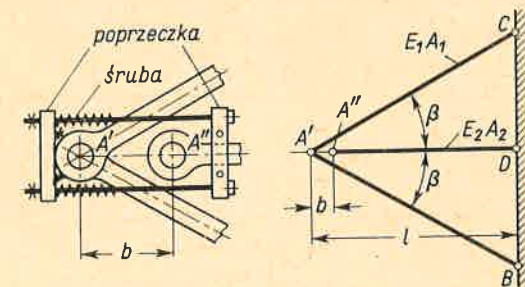
$$X_1 = -b/\alpha_{1,1}, \quad (a)$$

a po podstawieniu $\alpha_{1,1}$ z wzoru (e) art. 10.1

$$X_1 = -\frac{E_2 A_2 (b/l)}{1 + (E_2 A_2 / 2E_1 A_1 \cos^3 \beta)}, \quad (b)$$

przy czym $X_1 < 0$ oznacza, że pręt AD jest rozciągany. W prętach AB i AC powstają ściskające siły $N_1 = X_1/2 \cos \beta$.

Łatwo zauważyć, że opisana myślowa operacja przecięcia pręta AD , usunięcia odcinka b i powtórnego złączenia jest równoznaczna ze zmontowaniem przy użyciu ściągacza⁽¹⁾ „na siłę” ustroju (rys. 10.60), w którym długość pręta $A''D$ jest o b mniejsza od



Rys. 10.60. Montaż niedokładnie wykonanego ustroju

⁽¹⁾ Z początku między uchem A' zespołu prętów $A'B$ i $A'C$ a uchem A'' pręta $A''D$ istnieje szpara b . Dokręcając śruby ściągacza, którego jedną poprzeczkę zaciśnięto na przecięciu $A''D$, a drugą oparto na uchu A' , doprowadzamy do pokrycia się otworów A' i A'' , po czym przez te ucha przetykamy sworzeń, a ściągacz usuwamy.

nominalnej. Gdyby długość ta była większa od nominalnej, we wzorze (b) należałoby podstawić $b < 0$ i wtedy $X_1 > 0$, co odpowiada ściskaniu pręta AD , a rozciąganiu pozostałych (rys. 10.1d).

Ten sam efekt co i niedokładność wykonania powoduje nierównomierne ogrzanie ustroju. Jeśli mianowicie w idealnie wykonanej i zmontowanej w temperaturze t_0 konstrukcji oziębić pręt AD o Δt , to w myślowym rozcięciu $m-m$ powstanie szczelina $b = \lambda_t \Delta t l$, a wartość siły X_1 jest wtedy

$$X_1 = - \frac{E_2 A_2 \lambda_t \Delta t}{1 + (E_2 A_2 / 2 E_1 A_1 \cos^3 \beta)}, \quad (c)$$

gdzie λ_t — współczynnik rozszerzalności cieplnej pręta AD . Powstające przy tym naprężenia w prętach ustroju $\sigma' = -X_1/A_2$ i $\sigma'' = X_1/2A_1 \cos \beta$ nazywamy *cieplnymi* lub *termicznymi*.

Jak widać, zagadnienie naprężeń montażowych i cieplnych sprowadza się do rozwiązania równania kanonicznego, w którym wyraz $\alpha_{1,0}$ przedstawia skutek odchyłek wymiarów spowodowanych wykonaniem bądź zmianą temperatury.

Powyższa reguła obowiązuje i w bardziej złożonych ustrojach. Weźmy dla przykładu nieobciążoną ramę (rys. 10.30), która przez myślowe rozcięcie $a-a'$ stała się statycznie wyznaczalna z nie znanymi na razie wartościami X_1, X_2, X_3 . Jeśli z powodu błędnego wykonania lub zmian temperatury przekroje a i a' tej statycznie wyznaczalnej ramy rozejdą się o pokazane na rysunku wielkości $\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \alpha_{3,0}$, to wielkości X likwidujące to rozejście wyznaczamy z równań kanonicznych (a) i (b) art. 10.5. Odpowiadające im składowe wysiłki M, N i T obliczamy nadal z równań (c), art. 10.5, w których oczywiście człony $M^{(0)}, N^{(0)}$ i $T^{(0)}$ są równe zeru.

Samo określenie nieciągłości („szczelin”) $\alpha_{i,0}$ dokonujemy na ogół bez rachunków z prostych rozważań geometrycznych. W bardziej złożonych przypadkach płaskiego ustroju stosujemy metodę Maxwella–Mohra (art. 9.3). Deformacje $d\theta, du, dw$ elementu (rys. 9.20) są tu wymuszone błędnym wykonaniem bądź zmianą temperatury. Rolę „czujnika” mierzącego wielkość $\alpha_{i,0}$ spełnia teraz siła $X_i = 1$ wywołująca wysiłek o składowych $m = m^{(i)}, n = n^{(i)}, t = t^{(i)}$, wobec czego z wzoru (9.1) mamy

$$\alpha_{i,0} = \int m^{(i)} d\theta + \int n^{(i)} du + \int t^{(i)} dw, \quad (10.13)$$

gdzie całkowanie obejmuje wszystkie elementy ustroju.

Podobnie obliczamy wielkości $\alpha_{i,0}$ w złożonych ustrojach przestrzennych stosując wzór (9.7) i otrzymując w wyniku

$$\alpha_{i,0} = \int (m_y^{(i)} d\theta + m_x^{(i)} d\chi + m_s^{(i)} d\varphi + n^{(i)} du + t_z^{(i)} dw + t_y^{(i)} dv), \quad (10.14)$$

gdzie $d\theta, \dots, dv$ — zadane deformacje elementu (rys. 9.31) spowodowane błędnym wykonaniem lub zmianą temperatury, a $m_y^{(i)}, \dots, t_y^{(i)}$ składowe wysiłki stanu „i” ustroju, gdy $X_i = 1$.

Z całego toku rozumowania widać, że wyrazy $\alpha_{i,0}$ odpowiadające zmianom temperatury bądź odchyłkom wykonania są *niezależne* od wyrazów $\alpha_{i,0}$ spowodowanych obciążeniem. Wynika stąd, że i *naprężenia termiczne i montażowe są całkowicie niezależne od*

naprężeń wywołanych obciążeniem ustroju. Jeśli więc na ustrój mający naprężenia termiczne lub montażowe działają również obciążenia, to całkowite naprężenia są algebraiczną sumą tych dwóch składników. Ich absolutna wartość może być w niektórych przypadkach mniejsza od każdego ze składników, co w rezultacie zwiększa bezpieczeństwo ustroju. Na ogół jednak całkowite naprężenia są większe niż w przypadku działania samych obciążeń, co obniża bezpieczeństwo. Jedyną rzeczą do zrobienia jest wtedy zmniejszenie naprężeń termicznych lub montażowych. Jak widać choćby z wzorów (b) i (c), można to osiągnąć przez zwiększenie dokładności wykonania (zmniejszyć b) bądź zapewnienie takich warunków pracy, w których zmiana Δt temperatury byłaby mała.

Zadania

1. Bardzo długą⁽¹⁾ stalową prostą szynę kolejową umocowano na nieodkształcalnym podłożu przy $t_0 = 10^\circ\text{C}$. Jakie będą w niej naprężenia przy ogrzaniu jej w lecie do $t_1 = 50^\circ\text{C}$ i przy oziębieniu w zimie do $t_2 = -40^\circ\text{C}$? $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\lambda_t = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.

Rozwiązanie. Gdyby szyna składała się z oddzielnych elementów, wówczas przy zmianie temperatury $\Delta t = t_1 - t_0$ każdy z nich wydłużyłby się o $\Delta ds = \lambda_t \Delta t ds$, a względne wydłużenie ich byłoby $\varepsilon_t = \Delta ds/ds = \lambda_t \Delta t$. W rzeczywistości przytwierdzonej do podłoża szynie istnieją naprężenia normalne σ powodujące, że $\varepsilon_t + \varepsilon_\sigma = \varepsilon_t + (\sigma/E) = 0$. Stąd otrzymujemy

$$\sigma = -\lambda_t \Delta t E = -12,5 \cdot 10^{-6} (1/^\circ\text{C}) \cdot 40^\circ\text{C} \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} = -100 \text{ MPa}$$

i podobnie w warunkach zimowych, gdy $\Delta t_2 = -50^\circ\text{C}$, $\sigma = 125 \text{ MPa}$.

2. Jak zmienią się wyniki zadania 2 art. 10.1, gdy zespół tulei i wałka ogrzać o $\Delta t = 50^\circ\text{C}$. Współczynnik λ_t dla duralu $\lambda_{td} = 24 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, a dla stali $\lambda_{ts} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.

Odp. Założmy $P = 0$. Przetnijmy myślowo wałek i załóżmy, że w nowo powstałych przekrojach działają rozciągające siły X_1 , określone z równania $X_1 = -\alpha_{1,0}/\alpha_{1,1}$, gdzie

$$\alpha_{1,0} = -(\lambda_{td} - \lambda_{ts}) \Delta t l, \quad \alpha_{1,1} = [l/(EA)_s] + [l/(EA)_d],$$

a l — długość walca. Stąd

$$X_1 = \frac{(\lambda_{td} - \lambda_{ts}) \Delta t (EA)_s}{1 + [(EA)_s/(EA)_d]}$$

i dalej $\sigma_{ts} = X_1/A_s = 53 \text{ MPa}$, $\sigma_{td} = -X_1/A_d = -24 \text{ MPa}$. Dodając te wartości do otrzymanych uprzednio naprężeń ściskających otrzymujemy ostatecznie $\sigma_s = -115 + 53 = -62 \text{ MPa}$, $\sigma_d = -62 \text{ MPa}$.

3. Jak zmienią się wyniki zadania 6 art. 10.1, jeśli zespół rur (rys. 10.7) ogrzać o $\Delta t = 50^\circ\text{C}$? $\lambda_{tm} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, $\lambda_{tm} = 17 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.

Odp. Spowodowane temperaturą ciśnienie rur na siebie $p_t = X_1$ określamy z równania (10.1), w którym

$$\alpha_{1,1} = (r_{sr}^2/E_s \delta_s) [1 + (E_s/E_m) (\delta_s/\delta_m)], \quad \alpha_{1,0} = -(\lambda_{tm} - \lambda_{ts}) \Delta t r_{sr}$$

oznaczają szczelinę między rurami wywołaną przez $p_t = 1 \text{ MPa}$ bądź przez zmianę temperatury. Stąd $X_1 = 1,25 \text{ MPa}$, a odpowiadające $\sigma'_s = X_1 r_{sr}/\delta_s \approx 19 \text{ MPa}$, $\sigma'_m \approx -31 \text{ MPa}$. Całkowite naprężenia są $\sigma_s \approx 77 \text{ MPa}$, $\sigma_m = -2 \text{ MPa}$ (ściskanie).

4. Wszystkie pręty ustroju (rys. 10.1), w którym $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $A_1 = A_2 = 10 \text{ cm}^2$, $l = 1 \text{ m}$, $\beta = 30^\circ$ ogrzano o $\Delta t = 100^\circ\text{C}$. Wyznaczyć naprężenia termiczne, jeśli $\lambda_t = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.

Odp. Wyraz wolny $\alpha_{1,0}$ obliczamy tym razem z wzoru (10.13), w którym $m_y^{(1)} \equiv 0$, $t^{(1)} \equiv 0$. Po-

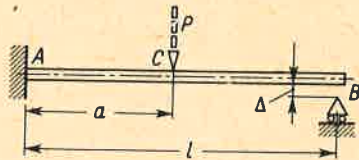
⁽¹⁾ Szynę taką przed montażem spawa się z odcinków.

nieważ siła $n_i^{(1)}$ w pręcie i jest stała, zatem $\int n_i^{(1)} du_i = n_i^{(1)} u_i = \lambda_t \Delta t l_i n_i^{(1)}$. Biorąc $n_i^{(1)}$ z wzorów (c) art. 10.1 mamy

$$\alpha_{1,0} = (2n_1 \lambda_t \Delta t l / \cos \beta) + n_2 \lambda_t \Delta t l = \lambda_t \Delta t l \operatorname{tg}^2 \beta$$

oraz $\alpha_{1,1}$ z wzoru (e) art. 10.1. W rezultacie $X_1 \approx -45$ kN, a naprężenia w prętach AD i AB są $\sigma_{AD} = 45$ MPa, $\sigma_{AB} = -26$ MPa.

5. Na skutek niedokładnego wykonania między podporą B a końcem belki istnieje luz Δ (rys. 10.61). Wyznaczyć wykres momentu gnącego, gdy obciążymy belkę siłą P .



Rys. 10.61. Do zadania 5

Odp. Obierając niewiadomą X_1 jak na rys. 10.19, otrzymujemy równanie kanoniczne $\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} + \Delta = 0$, gdzie $\alpha_{1,1}$ i $\alpha_{1,0}$ są jak w zadaniu 4 art. 10.3. Stąd mamy

$$X_1 = \frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3} - \frac{3EJ_y \Delta}{l^3}$$

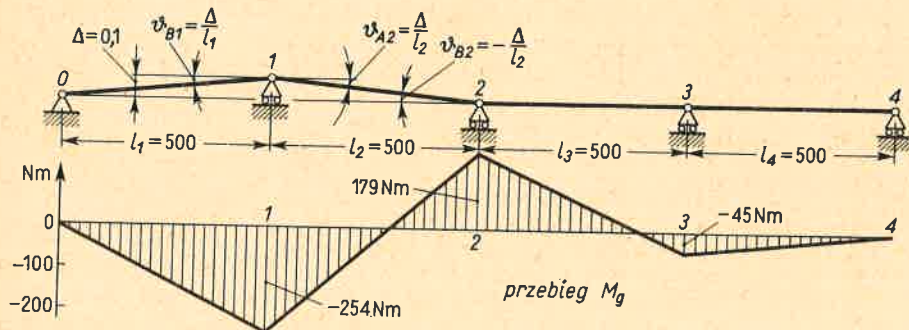
Wynik ten ma sens tylko wtedy, gdy $X_1 > 0$, czyli gdy luz Δ nie jest zbyt duży. Wynik $X_1 < 0$ świadczy, że nawet przy działaniu siły P między belką a podporą jest luz i w rzeczywistości $X_1 = 0$. Dalszy ciąg zadania, jak już wielokrotnie omawiano.

6. Na skutek niedokładnego wykonania łożysko 1 belki ciągłej (rys. 10.24) jest przesunięte do góry o $\Delta = 0,1$ mm. Wyznaczyć wykres M_g po zmontowaniu belki. $EJ_y = 1,74 \cdot 10^5$ N m².

Rozwiązanie. Po myślowym podziale belki na przęsła jak na rys. 10.23b, c narysujmy jej obraz z uwzględnieniem niedokładności wykonania (rys. 10.62). Widać, że niedokładność ta powoduje na podporach 1 i 2 załomy

$$\vartheta_{B,1} + \vartheta_{A,2} = (\Delta/l_1) + (\Delta/l_2) = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad},$$

$$\vartheta_{B,2} + \vartheta_{A,3} = -\Delta/l_2 = -0,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}, \quad \vartheta_{B,3} + \vartheta_{A,4} = 0,$$



Rys. 10.62. Analiza błędu ustawienia łożysk w belce ciągłej

których znaki odpowiadają umowie podanej na rys. 10.23. Podstawiając te dane do równania trzech momentów (10.8) i dzieląc przez jednakową dla wszystkich przęseł długość $l = 0,5$ m mamy:

dla podpory 1: $4X_1 + X_2 + (6 \cdot 1,74 \cdot 10^5 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} / 0,5) = 0,$

dla podpory 2: $X_1 + 4X_2 + X_3 + [6 \cdot 1,74 \cdot 10^5 \cdot (-0,2) \cdot 10^{-3} / 0,5] = 0,$

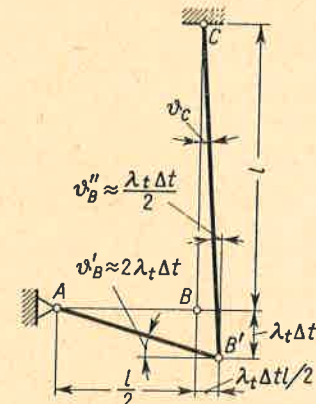
dla podpory 3: $X_2 + 4X_3 + 0 = 0.$

Stąd wyznaczamy $X_1 = -254$ N m, $X_2 = 179$ N m, $X_3 = -45$ N m. Postępując teraz jak w zad. 1 art. 10.4 otrzymujemy wykres M_g . Porównując go z wykresem (rys. 10.24) widzimy, że momenty wywołane obciążeniem są tego rzędu co wynikające z błędów wykonania. Całkowity moment gnący jest sumą tych składników i na przykład w przekroju na podporze 1 jest -433 N m.

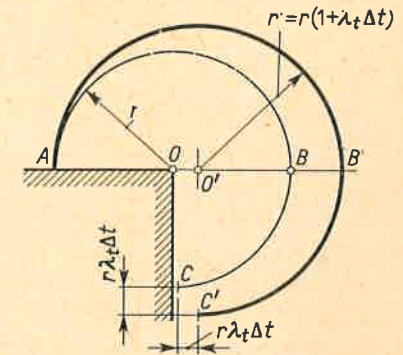
7. Zmontowaną w temperaturze t_0 ramę (rys. 10.35) ogrzano o Δt °C. Wyznaczyć momenty gnące X_1 i X_2 .

Odp. Po wprowadzeniu myślowych przegubów B i C narysujmy obraz ramy po ogrzaniu (rys. 10.63). Widać, że kąt prosty w narożu B zmieni się o $\vartheta_B' + \vartheta_B'' \approx 2,5 \lambda_t \Delta t$, a w punkcie C o $\vartheta_C \approx 0,5 \lambda_t \Delta t$. Te wielkości są jednocześnie wyrazami wolnymi

$$\alpha_{1,0} = -\vartheta_C = -0,5 \lambda_t \Delta t, \quad \alpha_{2,0} = \vartheta_B' + \vartheta_B'' = 2,5 \lambda_t \Delta t$$



Rys. 10.63. Do zadania 7



Rys. 10.64. Do zadania 8

równań kanonicznych, przy czym $\alpha_{1,0} < 0$, gdyż ϑ_C ma zwrot przeciwny do momentu X_1 . Biorąc wyniki zadania 3 art. 10.5 mamy

$$2X_1 + X_2 - (3EJ, \lambda_t \Delta t / l) = 0, \quad X_1 + 3X_2 + (15EJ, \lambda_t \Delta t / l) = 0,$$

skąd $X_1 = 24EJ, \lambda_t \Delta t / 5l, \quad X_2 = -33EJ, \lambda_t \Delta t / 5l.$

8. Zmontowany w temperaturze t_0 pierścień (rys. 10.36) ogrzano o Δt °C. Wyznaczyć wysięk przekroju C .

Odp. Po myślowym rozcięciu pierścienia w przekroju C narysujmy jego obraz po ogrzaniu (rys. 10.64). Konfrontując ten obraz z obrazem sił X_1, X_2, X_3 na rys. 10.36 widzimy, że

$$\alpha_{1,0} = -r \lambda_t \Delta t, \quad \alpha_{2,0} = -r \lambda_t \Delta t, \quad \alpha_{3,0} = 0.$$

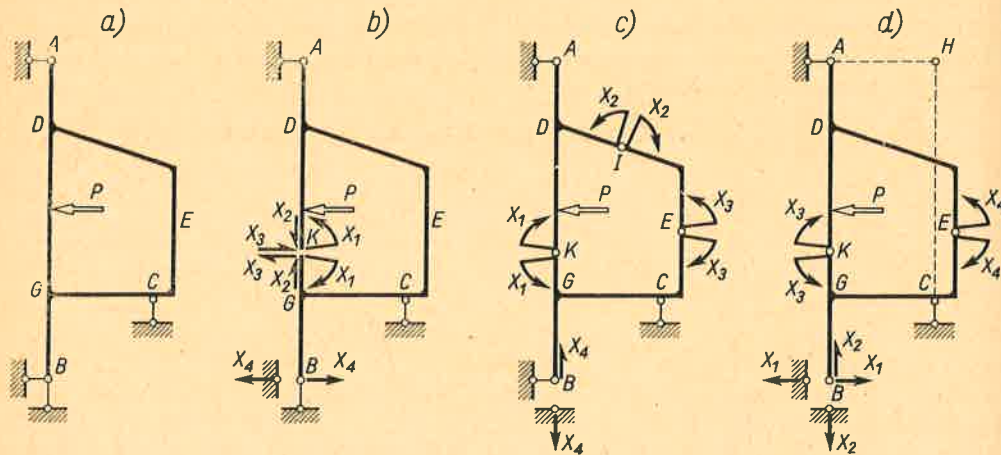
Wobec czego równania kanoniczne (zad. 5 art. 10.5) są

$$\begin{aligned} [(9\pi+8)/4] X_1 r + (1/2) X_2 r - [(3\pi+2)/2] X_3 - (EJ, \lambda_t \Delta t / r) &= 0, \\ (1/2) X_1 r + (3\pi/4) X_2 r - X_3 - (EJ, \lambda_t \Delta t / r) &= 0, \\ -[(3\pi+2)/2] X_1 r - X_2 r + (3\pi/2) X_3 + 0 &= 0, \end{aligned}$$

skąd $X_1 = X_2 \approx 0,693EJ, \lambda_t \Delta t / r^2, \quad X_3 \approx 4,65EJ, \lambda_t \Delta t / r.$

10.9. Uwagi końcowe

Jedynym kryterium stosowanym dotychczas przy obiorze ustroju podstawowego było, żeby ustrój ten nie był przypadkiem mechanizmem, czyli żeby on, jako całość, lub jego elementy nie miały swobody ruchu jako ciała sztywne. Dla przykładu, w ustroju czterokrotnie statycznie niewyznaczalnym (rys. 10.65) kryterium to spełnione jest dla wariantów według rys. 10.65b i c. Nie jest ono natomiast spełnione dla wariantu według rys. 10.65d,



Rys. 10.65. Przykłady różnych ustrojów podstawowych jednej i tej samej konstrukcji statycznie niewyznaczalnej

albowiem ustrój jako całość ma tu swobodę obrotu względem punktu H . Ponadto w swej części $DGCE$ jest on przesywniony, gdyż ciąg ten ma tylko dwa przeguby, a nie trzy (rys. 10.31), wobec czego taki ustrój podstawowy jest niedopuszczalny.

Powstaje pytanie, czy dla danej konstrukcji wszystkie prawidłowe ustroje podstawowe są równoprawne? Odpowiedź na to jest różna zależnie od celu analizy. Gdy celem jest kontrola całkowicie określonego ustroju, odpowiedź jest twierdząca. Inna natomiast jest sytuacja, gdy celem jest kształtowanie, a w szczególności taki dobór wymiarów przekrojów, który daje racjonalne wykorzystanie materiału. W ustrojach bowiem statycznie niewyznaczalnych wysiłek przekroju zależy nie tylko od obciążenia zewnętrznego, lecz i od sił X określonych z równań kanonicznych, których współczynniki z kolei zależą od sztywności elementów. Zmiana więc wymiarów jednego elementu wpływa na wartości naprężeń nie tylko dlatego, że zmieniają się parametry geometryczne przekroju jak A , W_s , W_y itd., lecz i dlatego, że zmienia się wysiłek przekroju. Z tego powodu zadania kształtowania rozwiązujemy na ogół metodą kolejnych przybliżeń. W pierwszym z nich dobór przekrojów przeprowadzamy dla ustroju podstawowego, tj. statycznie wyznaczalnego. Określone stąd sztywności elementów umożliwiają obliczenie sił X oraz skorygowanego przez nie wypadkowego wysiłku przekrojów, a następnie wymiarów przekrojów dobranych z warunku naprężeń dopuszczalnych. Określone dla tych skorygowanych sztywności nowe wartości sił X i nowe wartości wysiłku przekrojów stanowią drugie przybliżenie umożliwiające powtórna

korektę wymiarów itd. Aby ten proces był szybkozbieżny, istotne jest, aby korekty wniesione przez statycznie niewyznaczalne siły X były małe. Jest to możliwe wtedy, gdy przewidywany obraz odkształceń ustroju podstawowego zbliża się do obrazu odkształceń rzeczywistej konstrukcji. Tak na przykład obraz odkształceń stanu „0” belki ciągłej przy podziale jej na dwupodporowe przęsła (rys. 10.23d) jest na pewno bliższy rzeczywistości niż obraz odkształceń stanu „0” według schematu z rys. 10.9. Z tego powodu schemat pierwszy jest lepszy od drugiego.

Określenie stopnia statycznej niewyznaczalności i obiór wielkości X są „konceptyjnymi” etapami rozwiązania dającymi często ogromne ułatwienie zadania. W odróżnieniu od nich ostatni etap, tj. sformułowanie równań kanonicznych, sprowadza się do jednolitego dla wszystkich ustrojów schematu i polega na zsumowaniu uogólnionych przemieszczeń w tym samym punkcie i tym samym kierunku. Niepotrzebne jest przy tym wnikanie, czy zwroty tych przemieszczeń są zgodne, czy nie, gdyż odpowiedź na to dają od razu odpowiednie wzory, jak (10.3), (10.5), (10.11) itd., do których wielkości podcałkowe (momenty gnące, siły wzdłużne itd.) wstawiamy z jednakowymi lub przeciwnymi znakami⁽¹⁾ zależnie od tego, czy ich zwroty są zgodne, czy nie.

Opis ogólnych właściwości ustrojów statycznie niewyznaczalnych zaczniemy od zasady minimum energii odkształcenia. Weźmy dla przykładu belkę ciągłą z ujawnionymi w niej siłami X_1, \dots (rys. 10.9b). Składowe wysiłku przekroju określonego współrzędną x , tj. $M_g(x)$, $T(x)$, są wtedy funkcjami znanych sił P_1, P_2 oraz nieznanymi X_1, X_2, X_3 . Tę samą właściwość ma energia U odkształcenia ustroju obliczona z wzoru (9.23), do którego wstawiamy znalezione poprzednio $M_g(P_1, P_2, X_1, X_2, X_3, x)$, $T(P_1, \dots, X_3, x)$ i całkujemy względem zmiennej x . W wyniku mamy więc

$$U(P_1, P_2, X_1, X_2, X_3).$$

Jeśli teraz obliczymy pochodne cząstkowe $\partial U/\partial X_1, \dots, \partial U/\partial X_3$, to zgodnie z twierdzeniem Castigliana (9.24), są one przemieszczeniami (ugięciami) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, które w rzeczywistym ustroju są równe zero. Tak więc otrzymujemy zależności

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0, \quad (a)$$

warunkujące ekstremum funkcji U . Dodatkowo można dowieść, że to ekstremum oznacza minimum. Podobne rezultaty (a) otrzymujemy dla dowolnego sprężystego i liniowego ustroju statycznie niewyznaczalnego, skąd wynika, że wartości sił statycznie niewyznaczalnych redukują do minimum energię odkształcenia ustroju i to właśnie stanowi istotę wspomnianej zasady.

Rozwinięcie warunków (a) daje w wyniku liniowe równania wiążące ze sobą nieznanne siły X i znane siły P . Równania te są identyczne z równaniami kanonicznymi. W takim ujęciu zasadę minimum energii wykorzystuje się do rozwiązywania zadań statycznie niewyznaczalnych. W porównaniu z metodą sił sposób ten zwłaszcza od strony fizycznej jest mniej przejrzysty, a często bardziej kłopotliwy rachunkowo i dlatego został pominięty.

⁽¹⁾ Osobna, stanowiąca niestety źródło wielu błędów, jest kwestia określenia wysiłku przekrojów, tj. wykresów M_g, m_g, \dots dla ustrojów statycznie wyznaczalnych.

Istotne są natomiast wypływające z tej zasady wnioski ogólne. Obliczmy mianowicie dla dowolnego ustroju energię U_0 w stanie „0”, a więc statycznie wyznaczalnym, i rzeczywistą energię U_{sn} tegoż ustroju, gdy działają również określone z równań kanonicznych siły X . Z zasady minimum energii wynika, że $U_{sn} < U_0$. Jeśli teraz wprowadzić pojęcie średnich w całej objętości V ustroju naprężeń σ_0 i σ_{sn}

$$(\sigma_0^2/2E)V = U_0 \quad \text{i} \quad (\sigma_{sn}^2/2E)V = U_{sn}, \quad (b)$$

to z poprzedniej nierówności wynika, że $\sigma_{sn} < \sigma_0$, czyli że *wprowadzenie statycznej niewyznaczalności w ustroju zmniejsza średnie naprężenia*. Nie oznacza to jednak redukcji naprężeń we wszystkich elementach ustroju.⁽¹⁾ Podobnie stosując twierdzenie Clapeyrona (9.21) można dowieść, że *wprowadzenie statycznej niewyznaczalności zmniejsza średnie odkształcenia ustroju*.

Poza wymienionymi dwiema zaletami dodatkową zaletą ustrojów statycznie niewyznaczalnych w porównaniu ze statycznie wyznaczalnymi jest zwiększenie pewności działania w sytuacjach awaryjnych, gdyż zniszczenie jakiegoś więzu powoduje w pierwszym przypadku na ogół tylko zmianę sposobu pracy, w drugim natomiast zamienia ustrój na mechanizm i powoduje katastrofę całości.

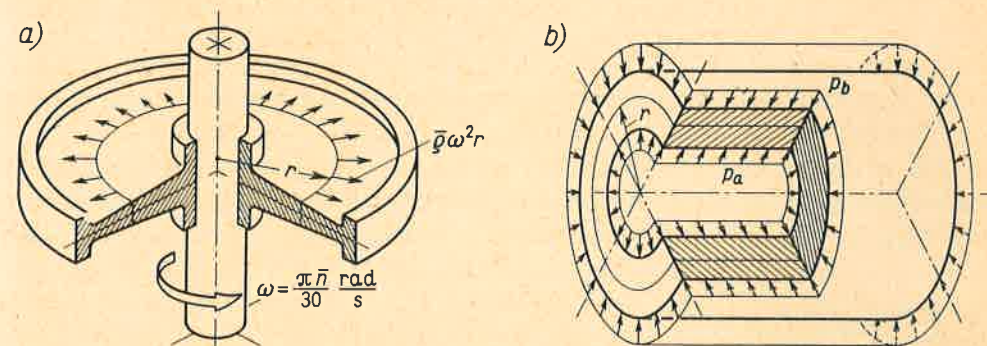
Zasadniczą wadą ustrojów statycznie niewyznaczalnych jest ich czułość na błędy montażu lub zmiany temperatury (art. 10.8). Obydwa te czynniki mają na ogół charakter losowy i należy liczyć się z rozrzutem odpowiadających im naprężeń. Zwiększenie zatem precyzji wykonania bądź montażu jest niezbędnym warunkiem stosowania takich ustrojów w praktyce.

CZĘŚĆ CZWARTA

Ustroje dwuwymiarowe

11 TARCZE KOŁOWE I GRUBOŚCIENNE RURY

W budowie maszyn stosujemy często elementy osiowosymetryczne i osiowosymetrycznie obciążone. Takie są na przykład wirujące płaskie krążki (rys. 11.1a) stosowane jako wirniki maszyn, tarcze szlifierskie itp. Ich analiza staje się zagadnieniem statyki, gdy wprowadzimy



Rys. 11.1. Przykłady osiowosymetrycznych elementów osiowosymetrycznie obciążonych

dzimy masowe „siły bezwładności” wynikające z przyspieszenia dośrodkowego. Ponieważ zazwyczaj oś krążka jest osią obrotu, siły te są promieniowe i osiowosymetryczne, a ich natężenie q_r na jednostkę objętości

$$q_r = \rho \omega^2 r \text{ N/m}^3, \quad (11.1)$$

zależy od gęstości ρ materiału, promienia r określającego odległość badanego elementu od osi obrotu oraz prędkości kątowej $\omega = \pi n/30 \text{ rad/s}$, którą uważamy za stałą. Gdy $\omega \neq \text{const}$, wówczas występują także obwodowe „siły bezwładności” o natężeniu $\rho(d\omega/dt)r$ mające jednak na ogół małe znaczenie. Podobnie pomijamy obciążenia obwodowe wynikające z oporów ruchu itp.

Inny przykład takich elementów osiowosymetrycznych stanowią grubościenne rury

⁽¹⁾ Zadanie 10 art. 10.3.